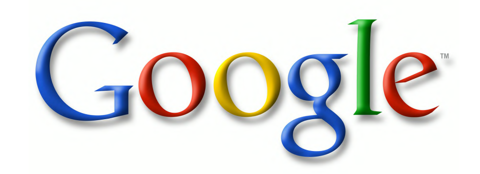
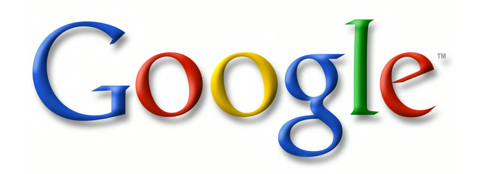






FELIX KLEIN,

VORLESUNGEN

ÜBER DIE

THEORIE DER ELLIPTISCHEN MODULFUNCTIONEN

AUSGEARBEITET UND VERVOLLSTÄNDIGT

VON

DR. ROBERT FRICKE.

ZWEITER BAND.

FORTBILDUNG UND ANWENDUNG DER THEORIE.

MIT EINIGEN IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1892.

Vorrede.

Wenn ich bei der Herausgabe des zweiten Bandes der „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen" noch einmal die Gelegenheit zu einigen einleitenden Worten ergreife, so lasse ich mich dabei durch eine didactische Absicht leiten. Infolge des nicht geringen Umfanges, den die Bearbeitung der Modulfunctionen angenommen hat, liegt nämlich einigermassen die Gefahr vor, dass zumal dem Studierenden bei der Lectüre des Werkes und bei der Aufsuchung seiner Hauptgedanken die Zeit mangelt oder die Kraft erlahmt. Nun ist ja freilich die Umfänglichkeit des vorliegenden Buches zum guten Teil eine Folge jener Breite der Darstellung, deren ich mich eben zur Erleichterung des einführenden Studiums von vornherein befleissigt habe. Andrerseits stellen doch zahlreiche Entwicklungen nur eine Art Concession an sonstige Auffassungsweisen unserer Gegenstände vor, andere Untersuchungen wieder haben nur den Charakter von Einzelausführungen, denen ein systematisches Studium ohne Einbusse für das Gesamtverständnis wenigstens nicht überall gewidmet zu werden braucht. Dabei ist es zweifellos für den Anfänger nicht immer leicht, einer gerade vorliegenden Untersuchung sogleich mit sicherem Urteil anzusehen, welche Stellung derselben im Gesamtaufbau des Buches zukommt; ich glaube demnach der Brauchbarkeit des letzteren nur dienen zu können, wenn ich hier in der fraglichen Hinsicht ein paar Fingerzeige zu geben mir erlaube.

Jedenfalls denke ich es mir weitaus am zweckmässigsten, das Studium des Buches mit den drei ersten Kapiteln des zweiten Abschnitts zu beginnen, wobei man gern, wenn man will, die auf Abschnitt I zurückbezüglichen §§ 6 bis 8 im Kapitel II, 1 zuvörderst überspringen mag. Immerhin wird § 9 verständlich sein, wenn man sich nur den Begriff der Modulsubstitution aus Abschnitt I aneignen will*). Demnächst würde das systematische Studium des Kapitels I, 3

*) Zur Auffindung der betreffenden Stellen bediene man sich des am Schlusse vorliegenden Bandes angefügten Sachregisters.

anzuempfehlen sein, insofern in den vier bis nun genannten Kapiteln das eigentliche Fundament für die Theorie der Modulfunctionen zu erblicken ist. Wenn sich übrigens im zuletztgenannten Kapitel I, 3 zahlreiche Beziehungen teils auf vorangegangene Entwicklungen teils auf die Vorlesungen über das Ikosaeder finden, so hoffe ich sollen dieselben mehr anregen als das Verständnis erschweren.

Die Bezugnahme auf die Theorie der elliptischen Functionen in ihrer hergebrachten Gestalt weist aus dem wesentlichen Gedankenkreise des Buches hinaus. In diesem Sinne kann ich nur sehr betonen, dass die Kapitel I, 1 und I, 2 sowie Teile von I, 4 in keiner Weise zu den grundlegenden zu rechnen sind, dass ihnen vielmehr nur eine beiläufige Bedeutung zuzurechnen ist. Ich kann demnach auch nur raten, man wolle sich beim anfänglichen Studium nach Absolvierung der vier oben genannten Kapitel II, 1, 2, 3, I, 3 sogleich die beiden Grundprobleme der Modullehre zu eigen machen, wie sie im Kapitel I, 4 Seite 139 ff. entwickelt sind, um demnächst in einer gleich zu bezeichnenden Weise das Studium fortzusetzen. Im übrigen wird der Kenner der Ikosaedertheorie schon von selbst nach der ausführlichen Begründung jener beiden Grundprobleme in den §§ 6 bis 13 des Kapitels I, 4 greifen. Dass aber durch das Kapitel I, 2 sowie durch die Anfangsparagraphen von I, 4 die Wünsche der Differentialgleichungstheoretiker ausreichende Berücksichtigung gefunden haben, darf ich gewiss hoffen.

Als ganz wesentliche Erörterungen muss ich jetzt weiter diejenigen bezeichnen, welche den Inhalt der beiden Kapitel II, 4, 5 ausmachen. Zumal sind es die geometrischen Überlegungen und Massnahmen, die hier durch immer erneute Einübung zur Gewohnheit werden sollen; und es ist eine durchaus missverständliche Auffassung, wollte man in den fraglichen Kapiteln der Geometrie nur eine nebensächliche Rolle, etwa als Mittel der Veranschaulichung sonstiger (analytischer) Massnahmen, zuerteilen. Die hier bezweckte Schulung in der anschauungsmässigen Behandlung gruppentheoretischer und functionentheoretischer Gegenstände ist namentlich auch für die Theorie der automorphen Functionen (auf welche unser Buch doch vorbereiten soll) von der allergrössten Wichtigkeit.

Weit eher dürfte in den beiden folgenden Kapiteln II, 6, 7 eine Kürzung der Lectüre zulässig sein; ich kann hier als unentbehrlich geradezu nur die drei ersten Paragraphen von II, 6 und die fünf ersten von II, 7 bezeichnen. Alles übrige, sowie namentlich auch die beiden Kapitel II, 8 und II, 9 haben den Charakter von Einzelausführungen. Hiermit soll diesen Specialentwicklungen die Bedeutung, welche sie für sich haben mögen, keineswegs abgesprochen werden;

es wäre ja in der That unzweckmässig gewesen, hätten wir bis dahin beständig Hülfsmittel auf Hülfsmittel für künftige Untersuchung gehäuft, wenn wir deren Brauchbarkeit nun nicht auch unmittelbar an der Materie unserer Untersuchung aufweisen wollten. Gleichwohl muss man es einigermassen dem Leser überlassen, aus den mannigfachen gruppentheoretischen Einzelheiten der genannten Kapitel nach eigenem Urteil und Geschmack eine Auswahl zu treffen. Es sei nur noch betont, dass die halbmetacyclischen Untergruppen von pag. 460 in den späteren Teilen des Werkes immer wieder eine Rolle spielen, und dass vor allem der pag. 489 formulierte wunderbare Satz von Galois im Verein mit seinen künftigen Anwendungen (pag. 646 und 749 im ersten Bande, pag. 419 des zweiten Bandes) wohl die schönste Zierde der Theorie der Modulfunctionen geliefert hat.

Die functionentheoretischen Ausführungen betreffend, so greifen die beiden Kapitel III, 1, 2, und dann zugleich auch ihre Fortsetzung im zweiten Bande (Kapitel VI, 1, 2 daselbst) über die eigentliche Gedankenentwicklung der Modulfunctionen hinaus, insofern die genannten Kapitel einen für sich stehenden Abriss der allgemeinen Riemann'schen Theorie der algebraischen Functionen liefern. Dass in der Fortentwicklung der Modulfunctionen übrigens immer nur einzelne Resultate der genannten allgemeinen Theorie zur Verwertung kommen, durfte nicht hindern, dem Leser die Kenntnisnahme auch des Weges, der zu diesen Resultaten hinführt, wenigstens zu ermöglichen. Aber ich kann nicht zweifeln, dass ein Leser, welcher sich nur den Sinn der Existenztheoreme, die Eigenart der Functionen φ, sowie endlich einiges Wenige über die curventheoretische Vorstellungsweise zu eigen gemacht hat, in den Abschnitten III, IV, V kaum Schwierigkeiten finden wird. Das volle Verständnis der allgemeinen Theorie der algebraischen Correspondenzen und der Modularcorrespondenzen setzt indessen durchaus einen etwas weiter gehenden Überblick über die Theorie der algebraischen Functionen voraus und erfordert das eingehendere Studium der genannten Kapitel.

Die Anwendbarkeit der allgemeinen Riemann'schen Existenztheoreme auf das functionentheoretische Grundproblem der Modullehre führt im Kapitel III, 3 zur allgemeinen Auflösung dieses Problems, und man darf in diesem Sinne das Kapitel III, 3 als den wesentlichen Mittelpunkt des ganzen Werkes ansehen. Von den weiter folgenden vier letzten Kapiteln des dritten Abschnitts gilt wieder dasselbe, wie von den Schlusskapiteln des zweiten Abschnitts, nämlich dass sie Einzelausführungen darstellen, und zwar hier von der allgemeinen Theorie in III, 3. Dass hierbei die weitaus interessanteste Theorie

der siebenten Stufe an die letzte Stelle gelangte, hat seinen Grund in der Absicht, dass ihr gegenüber Entwicklungen, wie die zur achten und sechzehnten Stufe gehörenden, die doch zumal auch historisch einiges Interesse beanspruchen, nicht gar zu sehr in den Hintergrund gedrängt erscheinen möchten.

War schon im bisherigen dem Leser mehrfach anheimgestellt, gemäss seinen eigenen Zwecken eine Auswahl aus dem dargebotenen Stoffe zu treffen, so gilt dies in noch weit höherem Grade von dem gesamten Inhalte des zweiten Bandes. Umfangreiche Partieen sind hier als zur Theorie der elliptischen Functionen gehörig anzusehen, und dies gilt in erster Linie vom grössten Teile des vierten Abschnitts. Die Transformationstheorie nimmt hier im Gegensatze zur Teilung der doppeltperiodischen Functionen den breiteren Raum ein; und ich will nicht unterlassen, das Kapitel IV, 2 sowie die Paragraphen 6, 7, 8 und 9 im Kapitel IV, 3 als die wichtigsten zu bezeichnen. Mit den fünf ersten Paragraphen des Kapitels IV, 3 aber ist es ein eigen Ding. Zur systematischen Ableitung der in der Transformationstheorie höherer Stufe eintretenden Fragen erschien mir die Einschaltung der abstracten und folglich schwierigen Überlegungen in §§ 3 und 4 des in Rede stehenden Kapitels nötig; aber die Möglichkeit der Transformationsgleichungen und speciell der Modulargleichungen in „Specialfällen“ von Congruenzmoduln höherer Stufe wird man mit Hülfe der §§ 6 ff. von IV, 3 sicher auch ohne die allgemeinen Principien in §§ 3, 4 klarlegen können. Als zwei weiterhin gar nicht mehr zur Verwendung kommende Entwicklungen möchte ich endlich die in § 10 und 11 des fraglichen Kapitels bezeichnen.

Es wäre wohl nutzlos, die Anweisungen für das Studium des vorliegenden Werkes in der bisherigen detaillierten Weise fortzuführen. Es wird sich aus den übrig bleibenden Kapiteln des zweiten Bandes auch ohnedies der Geometer die Theorie der elliptischen Normalcurven und die der Correspondenzen herausgreifen, der Analytiker aber die Darstellungen in den Kapiteln V, 2 bis V, 4, zumal die merkwürdigen Potenzreihen in V, 3. Es findet des ferneren der Arithmetiker die mannigfachen Anwendungen auf die Theorie der binären quadratischen Formen und ihre Classenzahlrelationen vor, während endlich für den Functionentheoretiker der Ausbau der Theorie der elliptischen Functionen nach Seite der Modulargleichungen und -Correspondenzen in Betracht kommt.

Nur in letzterer Beziehung sei hier noch eine Bemerkung gestattet. Man wird vielleicht finden, dass die Theorie der Modular-

gleichungen in Abschnitt V zu weit in die Einzelheiten hineingetrieben sei. Ich kann hierauf — wenn anders es überhaupt einer Abwehr bedarf — nur mit dem gleichen Gedanken antworten, den ich mir oben schon einmal erlaubte: was hilft die wiederholte Angabe, durch die Theorie der Modulfunctionen seien die überkommenen Probleme der elliptischen Functionen ein gut Teil weiter gelöst, wenn wir nicht, wo es angeht, zeigen, dass dem wirklich so ist!

Unserer Behandlung der Modularcorrespondenzen entspringt vielleicht der gegenteilige Vorwurf, nicht hinreichend weit den Einzelentwicklungen gerecht zu werden, die hier einmal vorliegen. Der Kundige weiss ja, dass es sich hier um das vielumworbene Gebiet der ϑ-Relationen und irrationalen Modulargleichungen handelt. Gewiss sei gleich zugegeben, dass nur ein sehr begrenzter Ausschnitt aus den vielfachen hierher gehörenden Untersuchungen directe Berücksichtigung (in VI, 6) finden konnte. Aber hier lag es auch durchaus nicht im Sinne unseres Werkes, das Überkommene durch neue Einzelresultate zu überbieten; vielmehr lag aller Nachdruck darauf, an einer enge umgrenzten Auswahl von Beispielen die neue Auffassung der irrationalen Modulargleichungen klarzulegen, die dann künftighin ihren Weg auch zu den übrigen ϑ-Relationen finden mag. Und der Wert dieser neuen Auffassung schien darin zu bestehen, dass die irrationalen Modulargleichungen nicht als unverstandene Producte einer zufällig geleiteten analytischen Rechnung erschienen, dass sie vielmehr als Darstellungsformen gewisser Modularcorrespondenzen und damit als notwendige Glieder einer geometrisch-algebraischen Gedankenentwicklung auftraten, deren wirksame Zugkraft man in sonstigen Gebieten der Functionentheorie nicht in Frage stellt. —

Vielleicht sollte ich hier am Schlusse des Vorwortes mir noch eine kurze Mitteilung über die geplante Fortsetzung der „Vorlesungen über die Theorie der Modulfunctionen" erlauben; aber ich könnte doch nur wiederholen, was in Anbetracht einer künftigen Behandlung der „automorphen Functionen" in den Schlusszeilen unseres gegenwärtigen Buches in Aussicht genommen ist.

Kiel, den 31. Juli 1892.

Robert Fricke.

Inhalts-Verzeichnis.

Vierter Abschnitt.

Einführung von Teilungs- und Transformationsgrössen und deren algebraischen Relationen.

Erstes Kapitel.

Die Teilwerte doppeltperiodischer Functionen und die speciellen Teilungsgleichungen.

Zweites Kapitel.

Die Transformation n^{ter} Ordnung erster Stufe und die Transformationsgleichungen erster Stufe.

Drittes Kapitel.

Allgemeine Grundlagen für die Transformation n^{ter} Ordnung einer beliebigen Modulfunction.

Viertes Kapitel.

Von der Aufstellung der Modulargleichungen höherer Stufe unter besonderer Berücksichtigung von $m = 5$ und 16.

Fünftes Kapitel.

Anwendung der Modulargleichungen erster Stufe auf die Theorie der ganzzahligen binären quadratischen Formen.

Sechstes Kapitel.

Anwendung der Ikosaedermodulargleichungen auf die Theorie der ganzzahligen binären quadratischen Formen.

Fünfter Abschnitt.

Analytische Behandlung des functionentheoretischen Grundproblems für die Congruenzgruppen.

Erstes Kapitel.

Einführung in die Theorie der elliptischen Normalcurven n^{ter} Ordnung.

Zweites Kapitel.

Die Grössen X_α betrachtet als Functionen der Perioden ω_1, ω_2.

Drittes Kapitel.

Bildung neuer Functionen n^{ter} Stufe durch bilineare Verbindungen der X_α.

Viertes Kapitel.

Formentheoretisch-analytische Ausführungen im Gebiete der niedersten Stufenzahlen.

Fünftes Kapitel.

Die Modulsysteme elfter Stufe und die zugehörigen Resolventen elften und zwölften Grades.

Sechstes Kapitel.

Von den durch die Modulargleichungen erster Stufe definierten algebraischen Gebilden bei $n > 11$.

Sechster Abschnitt.

Theorie der Modularcorrespondenzen und der aus ihnen hervorgehenden Classenzahlrelationen.

Erstes Kapitel.

Neue Ausführungen zu Riemann's Theorie der algebraischen Functionen.

Zweites Kapitel.

Allgemeine Theorie der algebraischen Correspondenzen und des Correspondenzprincips.

Drittes Kapitel.

Theorie der Integrale erster Gattung bei den Congruenzgruppen von Primzahlstufe.

Viertes Kapitel.

Specielle Theorie der Modularcorrespondenzen $n$ter Ordnung einer beliebigen Stufe.

Fünftes Kapitel.

Die Classenzahlrelationen einer beliebigen Primzahlstufe, mit besonderen Ausführungen für $q = 7$ und 11.

Sechtes Kapitel.

Von der algebraischen Darstellung der Modularcorrespondenzen, mit speciellen Ausführungen für $q = 7$.

Vierter Abschnitt.

Einführung von Teilungs- und Transformationsgrössen und deren algebraischen Relationen.

Erstes Kapitel.

Die Teilwerte doppeltperiodischer Functionen und die speciellen Teilungsgleichungen.

In der Einleitung zum ersten Abschnitt unserer Entwicklungen über die Modulfunctionen haben wir bereits auf die enge Beziehung der letzteren zur Theorie der elliptischen Functionen hingewiesen. Es trat aber diese Beziehung im weiteren Fortgang der gruppentheoretischen sowie functionentheoretischen Erörterungen, wie sie im zweiten und dritten Abschnitt zu entwickeln waren, durchaus zurück. Nunmehr aber wollen wir jene Beziehung wieder aufnehmen und es geradezu als *wesentlichsten Zielpunkt unserer künftigen Entwicklungen hinstellen, dass wir das Ineinandergreifen der beiden genannten mathematischen Disciplinen insoweit beschreiben wollen, als uns das heutzutage vorliegende Untersuchungsmaterial die Mittel dazu giebt.* Man wird dabei zuvörderst die im ersten Bande gewonnenen functionen- und gruppentheoretischen Anschauungsweisen auf ihre Brauchbarkeit prüfen wollen, welche ihnen bei der Auflösung der für uns in Betracht kommenden Probleme der überlieferten Theorie der elliptischen Functionen zukommt. Indem wir diese Absicht zu einem Teile im gegenwärtigen vierten Abschnitt durchführen, werden wir von den in Rede stehenden Problemen und ihrer Auflösung nicht nur ein in manchem Betracht inhaltvolleres, sowie der Natur möglichst gemässes Bild entfalten, sondern wir werden auch in einer zielbewufsten Fortentwicklung jener Probleme über den Rahmen der Überlieferung hinaus geführt werden. Im folgenden fünften Abschnitt sollen uns dann umgekehrt die doppeltperiodischen

Functionen Hilfe leisten, um die functionentheoretische Betrachtung der Congruenzmoduln und die Lösung unserer algebraischen Fundamentalaufgaben bis zu demjenigen Abschluss zu führen, welcher nach den bezüglichen Entwicklungen im ersten Bande erwünscht sein muss. Endlich soll der sechste Abschnitt für ein vom vierten her bleibendes Problem die Erledigung bringen, die wir darum hinausschieben müssen, weil sie sich erst nach Einschaltung gewisser allgemeiner Untersuchungen gestalten lässt; es werden diese letzteren Untersuchungen eine Weiterführung jener grundlegenden functionentheoretischen Entwicklungen darstellen, mit denen wir den dritten Abschnitt begannen.

Sei übrigens vorweg noch folgende Bemerkung gestattet. Eine *erschöpfende* Behandlung aller somit in Aussicht genommenen Untersuchungen ist gegenwärtig für uns weder möglich noch erforderlich. Überall werden wir uns vielmehr damit begnügen dürfen, durch Beschreibung der zur Zeit wirklich ausgeführten Untersuchungen den Weg gewiesen zu haben, den eine für die Zukunft anzustrebende allseitige Durchführung unseres Programms zu gehen hätte. Ein tieferes Eingehen auf die *überlieferte* Theorie der elliptischen Functionen selbst erachten wir gleichfalls nicht als zu unserer Aufgabe gehörig; wir dürfen, was die Einzelheiten der früheren Entwicklung angeht, auf die älteren Lehrbücher, vornehmlich aber auf die umfassende geschichtliche Darstellung des Enneper'schen Werkes verweisen*). Auf der anderen Seite wollen wir schon hier auf das neuerdings erschienene Buch von Hrn. H. Weber über *„Elliptische Functionen und algebraische Zahlen“* aufmerksam machen**), in welchem namentlich der dritte, arithmetische Teil manchen bislang schwieriger zugänglichen Gegenstand dem allgemeinen Verständnis gewonnen hat.

§ 1. Gruppentheoretische Grundlagen für die Theorie der elliptischen Functionen.

Die doppeltperiodischen Functionen $\wp$ und $\wp'$ lernten wir in I p. 149 u. f.***) als von den drei Argumenten u, ω_1, ω_2 abhängige Functionen kennen, die unverändert blieben einerseits bei Ausübung einer beliebigen homogenen Modulsubstitution (also einer linearen Substitution der ω_1, ω_2 allein), andererseits bei Vermehrung des u um

---

*) Enneper, *Theorie und Geschichte der elliptischen Functionen,* 2. Aufl., bearbeitet von Felix Müller (Halle, 1890).

**) Braunschweig, 1890.

***) Wir geben die Citate auf den ersten Band stets in dieser Form; Citate mit blosser Seitenzahl beziehen sich immer auf den vorliegenden Band.

ganzzahlige Vielfache der Perioden ω_1, ω_2. Die beiderlei auf die Argumente ausgeübten Umänderungen ziehen wir dadurch in eins zusammen, dass wir auf die drei Variabelen u, ω_1, ω_2 *eine beliebige ternäre ganzzahlige Substitution der Determinante* 1 *und der Gestalt:*

$$(1)\quad u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2, \quad \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2$$

ausgeübt denken. Diese Substitutionen bilden in ihrer Gesamtheit eine *ternäre Gruppe*, die $\Gamma^{(3)}$ heisse, und es gelten für die Combination zweier in ihr enthaltenen Operationen in einer sofort verständlichen Bezeichnungsweise die Regeln:

$$(2)\quad \begin{cases} m_1'' = m_1' + m_1\alpha' + m_2\gamma', \quad m_2'' = m_2' + m_1\beta' + m_2\delta', \\ \alpha'' = \alpha\alpha' + \beta\gamma', \; \beta'' = \alpha\beta' + \beta\delta', \; \gamma'' = \gamma\alpha' + \delta\gamma', \; \delta'' = \gamma\beta' + \delta\delta'. \end{cases}$$

Alle Operationen der $\Gamma^{(3)}$ von der Gestalt:

$$(3)\quad u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2, \quad \omega_1' = \omega_1, \quad \omega_2' = \omega_2$$

bilden eine in der $\Gamma^{(3)}$ enthaltene *ausgezeichnete unäre Untergruppe*, die wir $\Gamma^{(1)}$ nennen; und auf der anderen Seite bilden alle Operationen:

$$(4)\quad u' = u, \quad \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2$$

eine *nicht-ausgezeichnete binäre Untergruppe* $\Gamma^{(2)}$, die wir direct als die homogene Modulgruppe auffassen können. Hier können wir nun durch Anwendung der Begriffsbestimmungen der Gruppentheorie auf $\Gamma^{(3)}$ für die Theorie der doppeltperiodischen Functionen in derselben Weise ein systematisch geordnetes Bild gewinnen, wie wir dies bislang durch entsprechende Betrachtungen auf dem engeren Gebiete der elliptischen Modulfunctionen allein gethan haben. Es mögen hier einleitend die Grundlagen einer solchen Betrachtungsweise in aller Kürze skizziert werden.

Fürs erste können wir nach den *Untergruppen* der $\Gamma^{(3)}$ fragen. Dabei ist es freilich nicht der allgemeinste Ansatz, aber es reicht doch für unsere Zwecke völlig aus, wenn wir folgenden zuvörderst an die $\Gamma^{(1)}$ anknüpfenden Gedankengang einschlagen. Die Untergruppen eines endlichen Index der Gruppe $\Gamma^{(1)}$ sind, wie man sofort bemerkt, ausnahmslos Congruenzgruppen, und wir können deren Gesamtheit durch den bereits in I p. 320 u. f. ausgebildeten Entwicklungsgang in Erfahrung bringen. In diesem Sinne reduciere man $\Gamma^{(1)}$ modulo n auf eine endliche Gruppe G_{n^2} der Ordnung n^2, welch' letztere nunmehr in ihre Untergruppen zu zerlegen ist. Unter den n^2 modulo n incongruenten Zahlenpaaren m_1, m_2 giebt es aber im ganzen $\varphi(n)\cdot\psi(n)$ solche Paare, bei denen der grösste gemeinsame Teiler von m_1, m_2 prim gegen n ist*). Jede zugehörige Substitution $u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$

*) Die Bedeutung von φ und ψ findet man in I p. 460 angegeben.

erzeugt modulo n eine cyclische G_n, welche offenbar noch aus $\varphi(n)-1$ weiteren, in ihr enthaltenen Substitutionen dieser Art hätte hergestellt werden können. Wir finden solcherweise innerhalb der G_{n^2} im ganzen $\psi(n)$ cyclische G_n, denen wir ebenso viele Untergruppen $\Gamma_n^{(1)}$ der $\Gamma^{(1)}$ zuordnen; diese $\psi(n)$ Congruenzgruppen $\Gamma_n^{(1)}$ sind zwar nicht innerhalb der $\Gamma^{(1)}$ gleichberechtigt, sie werden es jedoch innerhalb $\Gamma^{(3)}$, wie wir nebenher bemerken. Hierüber hinaus notieren wir auch noch die Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe $\Gamma_{n^2}^{(1)}$, welche der identischen Substitution der G_{n^2} zuzuordnen ist.

Indem wir auf der anderen Seite die $\Gamma^{(2)}$ für sich einer analogen Betrachtung unterziehen, kommen wir direct zum ursprünglichen gruppentheoretischen Modulproblem zurück. Es wird sich dann aber weiter darum handeln, durch Combination der Untergruppen von $\Gamma^{(1)}$ mit denen von $\Gamma^{(2)}$ ternäre Untergruppen von $\Gamma^{(3)}$ zu gewinnen, und in diesem Betracht findet sich eine gewisse, wenn auch nicht weit reichende organische Beziehung zwischen den beiden Gruppen $\Gamma^{(1)}$ und $\Gamma^{(2)}$. *Combinieren wir nämlich eine jener $\psi(n)$ Gruppen $\Gamma_n^{(1)}$ mit einer Untergruppe $\Gamma_\nu^{(2)}$ von $\Gamma^{(2)}$ und verlangen, dass die ersten Zeilen in den Substitutionen der so erzeugten Gruppe nur Operationen der $\Gamma_n^{(1)}$ aufweisen sollen, so muss $\Gamma_\nu^{(2)}$ in einer gewissen der $\psi(n)$ gleichberechtigten Congruenzgruppen n^{ter} Stufe $\Gamma_{\psi(n)}^{(2)}$ enthalten sein* (cf. 1 p. 461). Ist z. B. $\Gamma_n^{(1)}$ durch $m_1 \equiv 0$, (mod. n) definiert, so folgern wir aus (2), dass die soeben formulierte Bedingung nur unter der Voraussetzung $\gamma' \equiv 0$, (mod. n) erfüllt sein kann; durch diese letztere Congruenz ist aber gerade eine jener Gruppen $\Gamma_{\psi(n)}^{(2)}$ festgelegt. Indem wir die $\Gamma_n^{(1)}$ einzeln geradezu mit ihren zugehörigen $\Gamma_\psi^{(2)}$ combinieren, entspringen $\psi(n)$ gleichberechtigte ternäre Congruenzgruppen n^{ter} Stufe $\Gamma_{n\psi(n)}^{(3)}$. — Neben ihnen merken wir vor allem noch die *ternäre Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe* an, die alle modulo n zur Identität congruenten ternären Substitutionen (1) umfasst, und deren Index in der gesamten $\Gamma^{(3)}$ sich zu $n^3\varphi(n)\psi(n)$ berechnet. Durch Zerlegung der zugehörigen endlichen $G_{n^3\varphi\psi}$ in ihre Untergruppen könnten wir in bekannter Weise alle ternären Congruenzgruppen n^{ter} Stufe ableiten. Die hier zu Tage tretende endliche Gruppe $G_{n^3\varphi\psi}$ ist im Falle $n=2$ eine G_{24} vom Oktaedertypus, im Falle $n=3$ eine G_{216}, die eine auch von anderer Seite her bekannte Structur zeigt u. s. w.*).

*) Untergruppen der $\Gamma^{(2)}$, welche nicht mehr allein durch Congruenzen bezüglich eines festen Zahlmoduls definierbar sind, haben wir hier ganz ausser Acht gelassen; es würden andernfalls unsere gleich zu entwickelnden functionentheoretischen Formulierungen zu weit über das hergebrachte Schema der elliptischen Functionen hinausgreifen.

Für das Studium der Untergruppen von $\Gamma^{(1)}$ kann man von *der Parallelogrammteilung der u-Ebene* genau denselben Gebrauch machen, zu welchem wir beim gruppentheoretischen Grundproblem des zweiten Abschnitts die Modulteilung heranzogen. Die Fundamentalpolygone der u-Ebene sind dabei in einfachster Weise stets Parallelogramme, deren gegenüberliegende Seiten jeweils auf einander bezogen sind. Insbesondere aber werden wir der ternären Hauptcongruenzgruppe $\Gamma^{(3)}_{n^2\varphi\psi}$ als Fundamentalbereich ein *Paar* von Polygonen zuweisen: das eine ist ein Parallelogramm der u-Ebene, das aus n^2 Elementarparallelogrammen besteht, das andere ist das in der ω-Halbebene gelegene Polygon der Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe $\Gamma^{(2)}_{n\varphi\psi}$. In analoger Weise gestaltet man auch für die ψ Gruppen $\Gamma^{(3)}_{n\psi}$ Paare von Polygonen der u-Ebene und der ω-Halbebene zu Fundamentalbereichen.

§ 2. Hinzutretende functionentheoretische Momente. Entwicklung der Grundprobleme der Theorie der elliptischen Functionen.

Den voraufgehenden gruppentheoretischen Überlegungen reihen sich nun unmittelbar die nachfolgenden functionentheoretischen an:

Eine eindeutige, homogene Function der drei Argumente u, ω_1, ω_2 benennen wir stets und nur unter den drei folgenden Bedingungen als eine ***doppeltperiodische oder elliptische Function*** *n^{ter}* ***Stufe:***

sie muss ungeändert bleiben, wenn man auf ihre Argumente eine Operation der Hauptcongruenzgruppe $\Gamma^{(3)}_{n^2\varphi\psi}$ ausübt;

sie soll, bei stehenden ω_1, ω_2 als Function von u gedeutet, im Fundamentalparallelogramm der $\Gamma^{(1)}_{n^2}$ wesentlich singuläre Punkte nicht aufweisen;

sie soll endlich für constante Werte des u als Function der ω_1, ω_2 den Charakter einer algebraischen Modulform n^{ter} Stufe besitzen (cf. I p. 616 u. f.)*).

Als die beiden Grundprobleme der Theorie der elliptischen Functionen aber können wir die folgenden anreihen: *Erstlich soll man elliptische Functionen erster und höherer Stufe wirklich bilden, fürs zweite*

---

*) Man vergl. übrigens hiermit die Definitionsweise der hyperelliptischen Functionen bei Burkhardt, *Systematik der hyperelliptischen Functionen* (nach Vorträgen von F. Klein), Math. Ann. Bd. 35 p. 217 ff. (1889); die betreffende Definition kann dort allerdings nicht ganz so principiell gefasst werden, wie hier im Texte für die elliptischen Functionen geschieht, weil man im Falle der hyperelliptischen Functionen immer mit Functionen mehrerer Variabelen zu thun hat, deren algebraische Singularitäten sich minder einfach charakterisieren lassen, auch statt der Fundamentalpolygone Fundamentalräume in Betracht zu ziehen sind, deren Eigenart man noch nicht beherrscht.

aber die zwischen allen diesen Grössen bestehenden Beziehungen der Untersuchung unterwerfen.

In dieser principiellen Weise ist das Problem der elliptischen Functionen explicit wohl noch nicht gestellt worden. Inzwischen hat sich die historische Entwicklung der Theorie thatsächlich in der somit bezeichneten Richtung bewegt, wobei eine directe Auflösung allerdings nur für die beiden niedersten Fälle der ersten und zweiten Stufe gegeben wurde: für die erste Stufe liegt die Weierstrass'sche Theorie vor, für die zweite aber die Jacobi'sche (womit zugleich das gegenseitige Verhältnis dieser beiden Theorien auf das einfachste gekennzeichnet ist). In der That erkennt man sofort in $\wp(u \mid \omega_1, \omega_2)$, $\wp'(u \mid \omega_1, \omega_2)$, g_2, g_3 elliptische Functionen *erster* Stufe und hat umgekehrt den Satz, dass jede solche Function erster Stufe rational in $\wp, \wp', g_2, g_3$ darstellbar ist. Der zweiten Stufe liegt, wie wir bemerkten, eine ternäre G_{24} vom Oktaedertypus zu Grunde, und in letzterer giebt es bekanntlich drei gleichberechtigte G_2, welche zusammengefügt die ausgezeichnete Vierergruppe innerhalb der G_{24} bilden. Diesen G_2 entsprechen ebenso viele gleichberechtigte ternäre $\Gamma_{12}^{(3)}$ zweiter Stufe. Indem wir ihnen drei zweckmässig gewählte, gleichberechtigte doppeltperiodische Functionen zweiter Stufe zuweisen und selbige durch Zufügung geeigneter Factoren homogen von der Dimension Null gestalten, werden wir zu den drei Jacobi'schen Functionen sin am u, cos am u, Δ am u geführt. Da in der Jacobi'schen Theorie überhaupt allenthalben an der Dimension Null festgehalten wird, so muss zugleich an Stelle der Formen g_2, g_3 erster Stufe hier die Modul*function* zweiter Stufe λ treten, welche nun aber wieder im Verein mit sin am, cos am, Δ am zur rationalen Darstellung aller elliptischen Functionen zweiter Stufe der Dimension Null ausreicht.

Eine entsprechende Theorie dritter oder höherer Stufe liegt, wie bereits angedeutet, bislang nicht ausgebildet vor, obgleich es nicht schwer wäre, eine solche zu entwerfen (vgl. die Entwicklungen des fünften Abschnitts)*). Dagegen kennt man seit lange zweierlei Mittel, auf indirectem Wege aus elliptischen Functionen niederer Stufe solche einer höheren Stufe herzustellen. Wir geben diese Hilfsmittel hier kurz an, indem wir sie ausschliesslich auf die Functionen *erster Stufe* anwenden. Fürs erste bezeichnen wir als *n-Teilung* den Übergang von

$$\wp(u \mid \omega_1, \omega_2), \quad \wp'(u \mid \omega_1, \omega_2)$$

zu den neuen Functionen

*) Vgl. auch den Aufsatz von Klein: *Über unendlich viele Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung* in den Sitzungsberichten der Münchener Akademie von 1880 (abgedruckt in Bd. 17 der Mathematischen Annalen).

(1) $\wp\left(\frac{u+\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\,\middle|\,\omega_1,\omega_2\right),\quad \wp'\left(\frac{u+\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\,\middle|\,\omega_1,\omega_2\right),$

wobei λ, μ irgend zwei ganze Zahlen sein sollen. Ohne für den Augenblick auf die Natur dieser Grössen (1) des näheren einzugehen, bemerken wir hier nur, dass sie wirklich in unserem Sinne doppeltperiodische Function n^{ter} Stufe vorstellen. Auf der anderen Seite benennt man als *Transformation n^{ter} Ordnung* den Übergang von

$$\wp(u\mid\omega_1,\omega_2),\quad \wp'(u\mid\omega_1,\omega_2),\quad g_2(\omega_1,\omega_2),\quad g_3(\omega_1,\omega_2)$$

zu den Grössen

(2) $\wp(u\mid n\omega_1,\omega_2),\quad \wp'(u\mid n\omega_1,\omega_2),\quad g_2(n\omega_1,\omega_2),\quad g_3(n\omega_1,\omega_2).$

Die so gewonnenen Grössen gehören als Functionen von u zu der durch $m_1\equiv 0$, (mod. n) definierten Congruenzgruppe $\Gamma_n^{(1)}$; als elliptische Functionen n^{ter} Stufe gehören sie zur bezüglichen ternären $\Gamma^{(1)}_{n\psi(n)}$. Da im Gegensatz zur Teilung die Transformation n^{ter} Ordnung eine auf die Perioden (und zwar ausschliesslich auf diese) angewandte Operation vorstellt, so unterliegen derselben selbstverständlich auch g_2 und g_3, und man kann sich, wenn man will, auf Betrachtung der Transformation allein von g_2 und g_3 beschränken; man wolle diesen Umstand für später festhalten. Die hiermit definierten Operationen der Teilung und Transformation n^{ter} Ordnung lassen sich zwanglos auch auf beliebige doppeltperiodische Functionen höherer Stufe anwenden; wir werden in diesem Sinne später von einer *Teilung bez. Transformation n^{ter} Ordnung m^{ter} Stufe* sprechen.

Wir bezeichneten die *Herstellung* geeigneter doppeltperiodischer Functionen oben als das erste Problem; als zweites Problem aber gaben wir an, dass die *Beziehungen* zwischen den elliptischen Functionen der verschiedenen Stufen der Untersuchung unterworfen werden sollen. Der hierbei eintretende Hauptsatz ist aber der, *dass eine elliptische Function n^{ter} Stufe stets eine algebraische Function von $\wp$, $\wp'$, g_2, g_3 ist.* Man kann diesen Satz mit Hilfe Riemann'scher Principien beweisen; inzwischen werden wir die Durchführung dieses Nachweises, sowie auch eine präcisere Ausgestaltung und Verallgemeinerung des Satzes als Untersuchungsgegenstände einer ausführlichen Theorie der elliptischen Functionen ansehen dürfen. Für uns sollen hier ausschliesslich die bei der Teilung und Transformation n^{ter} Ordnung auftretenden algebraischen Relationen in Betracht kommen. Aber auch diese Relationen werden wir weiterhin nur insoweit zu berücksichtigen haben, als sie in das engere Modulprogramm hineingehören. Wir wollen demnach an Stelle der Teilung schlechtweg die sogenannte *„specielle“ Teilung* setzen; die letztere beschäftigt sich mit

denjenigen Functionen von ω_1, ω_2 allein, die aus den Grössen von der Art (1) durch die Substitution $u = 0$ entspringen. Dass diese, als n^{te} *Teilwerte* zu bezeichnenden Modulformen wirklich algebraische sind, werden wir späterhin noch explicite nachweisen. Wir wollen des ferneren an Stelle der Transformation n^{ter} Ordnung schlechtweg die *specielle Transformation einer Modulfunction oder Modulform* treten lassen. Während wir aber die Teilung nur der ersten Stufe und auch diese nur nebenher durchführen wollen, soweit es für die Zwecke einer allgemeinen Orientierung sowie für spätere Anwendungen erforderlich scheint, werden wir die Transformation n^{ter} Ordnung nicht nur für die erste, sondern auch für die höheren Stufen ausführlicher besprechen. Diese verschiedenartige Berücksichtigung zweier coordinierter Probleme ruht nicht auf principiellen Erwägungen, sondern ist wesentlich durch den Stand der Vorarbeiten bedingt.

§ 3. Gruppentheoretische Untersuchung der n^{ten} Teilwerte $f_{\lambda\mu}$ einer doppeltperiodischen Function erster Stufe.

Ist $f(u \mid \omega_1, \omega_2)$ irgend eine doppeltperiodische Function der ersten Stufe, so wolle man sich deren n^{te} Teilwerte herstellen und bezeichne dieselben durch:

$$(1) \qquad f_{\lambda,\mu}(\omega_1, \omega_2) = f\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n} \,\middle|\, \omega_1, \omega_2\right),$$

wobei λ, μ offenbar auf ein System von n^2 modulo n incongruenten Zahlenpaaren eingeschränkt werden darf. Als besonders wichtige Beispiele von Teilwerten dieser Art haben wir diejenigen der $\wp$-Function $\wp_{\lambda,\mu}$, sowie die $\wp'_{\lambda,\mu}$, und jedenfalls lässt sich $f_{\lambda,\mu}$ mit Hilfe von g_2, g_3 in $\wp_{\lambda,\mu}$, $\wp'_{\lambda,\mu}$ rational darstellen. Aber infolge des besonderen Charakters der $\wp$- und $\wp'$-Function haften diesen letzteren Teilwerten particuläre Eigenschaften an, die wir um der Allgemeinheit willen von den $f_{\lambda,\mu}$ vorab nicht voraussetzen wollen. Man nehme also von f an, dass es als Function von u weder gerade noch ungerade sei, dass ferner keine der Zahlcombinationen (λ, μ) infolge Verschwindens oder Unendlichwerdens von $f_{\lambda,\mu}$ auszulassen ist; letzterer Umstand tritt offenbar bei den $\wp_{\lambda,\mu}$, $\wp'_{\lambda,\mu}$ für die Combination $\lambda = \mu = 0$ ein. Nach diesen Festsetzungen mögen die n^2 Teilwerte $f_{\lambda,\mu}$ als Functionen von ω_1, ω_2 nach einander der gruppentheoretischen und functionentheoretischen Betrachtung unterzogen werden.

Die durchzuführende gruppentheoretische Betrachtung steht nun in engster Beziehung zu den Entwicklungen in I p. 460 u. f., wenn wir uns die letzteren, was keine Schwierigkeit hat, für homogene Modul-

substitutionen durchgeführt denken*). Man ziehe nämlich zunächst den besonderen Teilwert $f_{0,1}$ heran und übe auf denselben eine beliebige Modulsubstitution aus. Es folgt:

$$(2) \qquad f_{0,1}(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2,\ \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = f_{\gamma,\delta}(\omega_1, \omega_2),$$

und also wird $f_{0,1}$ nur durch die n modulo n unterschiedenen Operationen $1, S, S^2, \ldots, S^{n-1}$ in sich transformiert. *Nach den l. c. gegebenen Sätzen gehört somit $f_{0,1}$ zu einer homogenen Congruenzgruppe $\Gamma_{\varphi(n)\psi(n)}$ der n^{ten} Stufe und ist deshalb eine unter $\varphi(n)\psi(n)$ mit einander gleichberechtigten Modulformen n^{ter} Stufe.* Aus (2) können wir unter Rücksicht auf die in I p. 390 ff. durchgeführte Überlegung diese $\varphi(n)\psi(n)$ Moduln n^{ter} Stufe sofort angeben: *Es sind einfach alle diejenigen Teilwerte $f_{\lambda,\mu}$, bei denen der grösste gemeinsame Factor τ von λ und μ prim gegen n ist.* Aber es giebt, wie wir wissen, im ganzen nur $\psi(n)$ gleichberechtigte Gruppen $\Gamma_{\varphi\psi}$; *daher müssen zu jeder dieser Untergruppen insgesamt $\varphi(n)$ unserer Modulformen $f_{\lambda,\mu}$ gehören.* So gehören z. B. die $\varphi(n)$ Moduln $f_{0,\mu}$, in denen μ ein System incongruenter und gegen n primer Zahlen durchläuft, gemeinsam zu derjenigen $\Gamma_{\varphi\psi}$, die sich mod. n auf die n Substitutionen S^ν reduciert. Solche $\varphi(n)$ zusammengehörige Teilwerte werden unter einander permutiert durch die Operationen einer derjenigen Gruppen $G_{\varphi(n)}$, welche mit der bezüglichen G_n combiniert die zugehörige metacyclische $G_{n\varphi(n)}$ bilden (cf. I p. 461). Verbindungen jener $\varphi(n)$ Teilwerte, welche gegenüber den Operationen der $G_{\varphi(n)}$ unveränderlich sind, werden uns also Grössen liefern, die zu der metacyclischen $G_{n\varphi(n)}$ oder, besser gesagt, zur bezüglichen Congruenzgruppe $\Gamma_{\psi(n)}$ gehören, was wir hier nebenher bemerken wollten**).

Haben jetzt weiter λ, μ, n den grössten Teiler $\tau > 1$ gemeinsam, so ist $f_{\lambda,\mu}$ „eigentlich" ein $\left(\frac{n}{\tau}\right)^{\text{ter}}$ Teilwert und gehört demnach zur Stufe $\frac{n}{\tau}$. Zur Sicherstellung der voraufgehenden Entwicklungen haben wir also den Zusatz zu machen: *Eigentlich zur n^{ten} Stufe gehören überhaupt nur jene $\varphi(n)\psi(n)$ gleichberechtigten Teilwerte, von denen $f_{0,1}$ ein einzelner war.* Indem aber die Gesamtzahl der eigentlich und uneigent-

*) Für homogene Substitutionen kommt übrigens, wie man sich leicht überzeugt, die damalige Bedingung $n > 4$ in Fortfall. Im Falle $n = 1$ wolle man übereinstimmend $\varphi = \psi = 1$ nehmen.

**) Diese letzteren Verhältnisse sind in ausgiebiger Weise von Hrn. Kiepert verfolgt in der Arbeit: *Über Teilung und Transformation der elliptischen Functionen*, Math. Ann. Bd. 26 (1885). Der einfachste Fall ist der, dass der Teilungsgrad n eine Primzahl q ist; alsdann werden die Gruppen $G_{\varphi(n)}$, wie wir wissen, cyclisch, was im allgemeinen keineswegs der Fall ist.

lich zur n^{ten} Stufe gehörenden Teilwerte $f_{\lambda,\mu}$, wie wir fanden, n^2 ist, entspringt die Gleichung:

$$\sum_{\tau} \varphi\left(\frac{n}{\tau}\right)\psi\left(\frac{n}{\tau}\right) = n^2, \tag{3}$$

wo über die gesamten Teiler τ von n zu summieren ist; für $\tau = n$ haben wir die Grösse erster Stufe $f_{0,0}$, welche natürlich in Formel (3) mitgezählt ist.

Die für die Functionen $\wp(u)$, $\wp'(u)$ eintretenden Besonderheiten kann man nunmehr leicht angeben. Hier fallen erstlich die Werte $\wp_{0,0}$; $\wp'_{0,0}$ aus, die beide ∞ sind. Überdies kommen, weil $\wp$ eine gerade, $\wp'$ aber eine ungerade Function von u ist, direct die I p. 460 für nicht-homogene Modulsubstitutionen gegebenen Abzählungen zur Geltung; wir haben also $\frac{1}{2}\varphi(n)\psi(n)$ eigentlich zur n^{ten} Stufe gehörende $\wp_{\lambda,\mu}$ und ebenso viel wesentlich verschiedene $\wp'_{\lambda,\mu}$, während wir einfach durch Zeichenwechsel dieser Moduln die andere Hälfte der n^{ten} Teilwerte $\wp'_{\lambda,\mu}$ erhalten. Eine bekannte Ausnahmerolle spielt hier nur wieder der Fall $n = 2$, wo wir nicht $\frac{1}{2}\varphi(n)\psi(n)$, sondern direct $\varphi(n)\psi(n) = 3$ verschiedene Teilwerte haben. Doch gilt dies letztere Resultat nur für $\wp$; denn die Function $\wp'(u)$ wird an den drei Stellen $u = \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{2}$ mit Null identisch, so dass wir überhaupt keine zweite $\wp'$-Teilwerte besitzen. Die Gesamtzahl der wesentlich verschiedenen beim n^{ten} Teilungsgrad entspringenden Teilwerte von $\wp$ und $\wp'$ ist sonach $\frac{n^2-1}{2}$ für ungerades n; dagegen haben wir bei geradem n im ganzen $\frac{n^2+2}{2}$ Teilwerte $\wp_{\lambda,\mu}$ und $\frac{n^2-4}{2}$ wesentlich verschiedene $\wp'_{\lambda,\mu}$.

§ 4. Die zu den Teilwerten $f_{\lambda,\mu}$ gehörenden Teilungsgleichungen.

Im allgemeinsten Falle der am Anfang des vorigen Paragraphen gedachten Modulformen $f_{\lambda,\mu}$ war ein eigentlich zur n^{ten} Stufe gehörendes $f_{\lambda,\mu}$ eines unter $\varphi(n)\psi(n)$ gleichberechtigten. Indem wir sogleich im folgenden Paragraphen den ausführlichen Beweis der algebraischen Natur der Moduln $f_{\lambda,\mu}$ nachholen, haben wir hier als wichtiges unmittelbares Ergebnis der in Bd. I entwickelten Principien: *Es ist $f_{\lambda,\mu}$ Wurzel einer irreducibelen*) algebraischen Gleichung des Grades $\varphi(n)\psi(n)$:*

*) Die Irreducibilität, wie die sogleich anzugebende Monodromiegruppe, bezieht sich hier stets auf den Rationalitätsbereich g_2, g_3. Übrigens wird, indem wir uns auf die allgemeinen Principien von Bd. I beziehen, ein neues Moment in die Theorie der Teilungsgleichungen eingeführt; man hat bisher die Existenz der Teilungsgleichungen immer ausschliesslich aus dem Additionstheorem der doppeltperiodischen Functionen abgeleitet.

$$(1)\quad f^{\varphi\psi} + R_1(g_2, g_3) f^{\varphi\psi-1} + R_2(g_2, g_3) f^{\varphi\psi-2} + \cdots + R_{\varphi\psi}(g_2, g_3) = 0,$$

deren Coefficienten rationale Functionen von g_2 und g_3 sind. Wir bezeichnen diese Relation als eine *Teilungsgleichung* oder auch genauer als eine *specielle Teilungsgleichung* für den n^{ten} Teilungsgrad, wobei wir durch letztere Bezeichnung die vorliegende Relation (1) von der allgemeinen Teilungsgleichung unterscheiden wollen, die im Sinne des im vorletzten Paragraphen (p. 7) namhaft gemachten Hauptsatzes bei der Teilung der doppeltperiodischen Functionen auftritt. Durch die hier gewählte Herleitung ist zugleich ohne weiteres evident, *dass die Teilungsgleichung* (1) *eine Resolvente des bei der n^{ten} Stufe auftretenden Galois'schen Problems $2\mu(n)^{\text{ten}}$ Grades ist*, und wir können also umgekehrt sagen, die Gleichung (1) habe eine Galois'sche Gruppe*) der Ordnung $2\mu(n)$. So gehört als Galois'sche Resolvente der Gleichung (1) des fünften Teilungsgrades die homogene Ikosaedergleichung zu, derjenigen des siebenten Grades aber etwa das homogene Problem der A_y vom Grade $2 \cdot 168$ (cf. I p. 740 (7)). Ist n eine zusammengesetzte Zahl, so könnte man alle auf die Teiler von n als Teilungsgrade bezüglichen Gleichungen (1) mit einander multiplicieren, um solcherweise eine Gleichung vom Grade n^2 zu erhalten, welcher alle beim Teilungsgrad n auftretenden Teilwerte genügen. Wir wollen diese Gleichung fernerhin im Gegensatze zu der *irreducibelen* Gleichung (1) kurz als die zum Teilungsgrade n gehörende *reducibele* Teilungsgleichung bezeichnen.

Ist $f(u)$ eine ungerade Function, so fallen in (1) alle Coefficienten R_ν mit ungeraden Exponenten als identisch verschwindend aus; solches tritt z. B. für $\wp'_{\lambda,\mu}$ ein. Ist $f(u)$ gerade, wie z. B. $\wp(u)$, so tritt eine Modification unserer bisherigen Untersuchung für alle Teilungsgrade $n > 2$ ein. Hier wird offenbar (1) reducibel, indem die linke Seite dieser Gleichung in das Quadrat eines Ausdrucks vom Grade $\frac{1}{2}\varphi(n)\psi(n)$ übergeht. Dieser Ausdruck, für sich gleich Null gesetzt:

$$(2)\qquad f^{\frac{1}{2}\varphi\psi} + R_1(g_2, g_3) f^{\frac{1}{2}\varphi\psi-1} + \cdots + R_{\frac{1}{2}\varphi\psi}(g_2, g_3) = 0,$$

liefert uns jetzt die irreducibele Teilungsgleichung, deren Gruppe ersichtlich die Ordnung $\mu(n)$ besitzt.

Um auch die reducibele Teilungsgleichung für $\wp$ bez. $\wp'$ in Bezug auf ihren Grad sogleich näher zu charakterisieren, müssen wir wieder, wie am Schluss des vorigen Paragraphen, ein ungerades n von einem

*) Gemeint ist hier wieder die Monodromiegruppe. Auch die eigentliche Galois'sche Gruppe ist wenigstens für einige Teilungsgleichungen näher untersucht worden; man sehe die hierauf bezügliche Note des folgenden Paragraphen.

geraden sondern. Für ungerade n wird die vom allgemeinen Falle $f_{\lambda,\mu}$ her bekannte Gleichung vom Grade n^2 deshalb zuvörderst auf den Grad $(n^2 - 1)$ sinken, weil die eine der in Betracht kommenden Wurzeln $\wp_{0,0}$ bez. $\wp'_{0,0}$ den Wert ∞ hat; ausserdem aber wird die linke Seite der Gleichung für $\wp$ das Quadrat eines Ausdrucks vom Grade $\frac{n^2-1}{2}$. Bei geradem n tritt wieder Reduction des Grades auf $(n^2 - 1)$ ein; sodann aber spaltet sich bei $\wp'$ der Factor $\wp'^3$, bei $\wp$ aber $(4\wp^3 - g_2\wp - g_3)$ ab, während im letzteren Falle das Quadrat eines Ausdrucks vom Grade $\frac{n^2-4}{2}$ zurück bleibt.

§ 5. Der algebraische Charakter der $f_{\lambda,\mu}$. Besondere Eigenschaften der Teilwerte $\wp_{\lambda,\mu}$, $\wp'_{\lambda,\mu}$.

Um den voraufgehend bereits wiederholt benutzten algebraischen Charakter der Teilwerte $f_{\lambda,\mu}$ darzuthun, sowie um weiter eine Reihe besonderer Eigenschaften der $\wp_{\lambda,\mu}$, $\wp'_{\lambda,\mu}$ abzuleiten, erscheint es zweckmässig, an analytische Darstellungen dieser letzteren Teilwerte anzuknüpfen. Dieselben entspringen aus den Reihenentwicklungen (4) in I p. 150 unter Benutzung von Formel (2) in I. p. 153. Unter ε die primitive n^{te} Einheitswurzel $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ verstanden, ergeben sich zunächst für diejenigen Teilwerte, welche ein $\lambda > 0$ haben, die Darstellungen

$$(1)\quad \begin{aligned}\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^2 \wp_{\lambda,\mu} = -\frac{1}{12} - \varepsilon^{\mu} r^{\frac{\lambda}{n}} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{\mu s} r^{\frac{\lambda s}{n}}\right)^2 \\ + \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty} s\left(2r^{st} - \varepsilon^{s\mu} r^{\frac{s(nt+\lambda)}{n}} - \varepsilon^{-s\mu} r^{\frac{s(nt-\lambda)}{n}}\right),\end{aligned}$$

$$(2)\quad \begin{aligned}\left(\frac{\omega_2}{2i\pi}\right)^3 \wp'_{\lambda,\mu} = \left(\varepsilon^{\mu} r^{\frac{\lambda}{n}} + \varepsilon^{2\mu} r^{\frac{2\lambda}{n}}\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{\mu s} r^{\frac{\lambda s}{n}}\right)^3 \\ + \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty} s^2\left(\varepsilon^{s\mu} r^{\frac{s(nt+\lambda)}{n}} - \varepsilon^{-s\mu} r^{\frac{s(nt-\lambda)}{n}}\right).\end{aligned}$$

Bei $\lambda = 0$ lassen sich die Reihen mühelos noch etwas weiter zusammenziehen; dortselbst erhalten wir

$$(3)\quad \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^2 \wp_{0,\mu} = -\frac{1}{12} + \frac{1}{4\sin^2\frac{\mu\pi}{n}} + \sum_{m=1}^{\infty} h_{\mu}(m) r^m,$$

$$(4)\qquad \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^3 \wp'_{0,\mu} = -\frac{\cos\frac{\mu\pi}{n}}{4\sin^3\frac{\mu\pi}{n}} + \sum_{m=1}^{\infty} h'_\mu(m) r^m,$$

und es haben h und h' die nachfolgende Bedeutung:

$$(5)\qquad \begin{cases} h_\mu(m) = 2\sum_t t\left(1 - \cos\frac{2t\mu\pi}{n}\right), \\ h'_\mu(m) = 2\sum_t t^2 \sin\frac{2t\mu\pi}{n}, \end{cases}$$

summiert über alle Teiler t von m.

Alle diese Reihenentwicklungen (1) bis (4) subsumieren sich unter die allgemeine Gestalt:

$$a_0 + a_1 r^{\frac{1}{n}} + a_2 r^{\frac{2}{n}} + \cdots *),$$

und wir betonen einer in § 6 zu ziehenden Folgerung wegen schon hier, dass sich die Coefficienten $a_0, a_1, \ldots$ numerisch rational, und zwar mit Ausnahme von a_0 sogar *ganz* aus der n^{ten} Einheitswurzel ε^μ aufbauen. Vor allem aber gelingt es jetzt mühelos, *den algebraischen Charakter unserer Teilwerte zur Evidenz zu bringen.* Aus der Natur der Functionen $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ entnimmt man ohne weiteres, dass irgend ein Teilwert $\wp_{\lambda,\mu}$, $\wp'_{\lambda,\mu}$ niemals in einem im Innern des Polygons n^{ter} Stufe gelegenen Punkte unendlich werden kann. In der Spitze des Polygons bei $\omega = i\infty$ aber werden $\omega_2^2\wp_{\lambda,\mu}$, $\omega_2^3\wp'_{\lambda,\mu}$, allgemein zu reden, mit einer ganzzahligen Potenz von $r^{\frac{1}{n}}$ proportional, und in den übrigen Spitzen des Polygons erkennt man vermöge der in I p. 587 für diesen Fall vorbereiteten Regel den gleichen Charakter der Teilwerte. *Es haben demnach $\wp_{\lambda,\mu}$, $\wp'_{\lambda,\mu}$, innerhalb des Polygons betrachtet, nirgends einen wesentlich singulären Punkt und sind eben deshalb algebraische Modulformen n^{ter} Stufe. — Dasselbe gilt denn sofort auch allgemein für die $f_{\lambda,\mu}$,* da sich diese Teilwerte, wie wir ja bereits bemerkten, rational in $\wp_{\lambda,\mu}$, $\wp'_{\lambda,\mu}$, g_2, g_3 darstellen lassen.

Indem wir jetzt zu den irreducibeln Teilungsgleichungen für $\wp$ und $\wp'$ zurückkehren, bemerke man, dass die Coefficienten derselben *ganze* symmetrische Verbindungen der in Betracht kommenden Teilwerte sind. Nun aber werden, wie wir schon sagten, die $\wp_{\lambda,\mu}$, $\wp'_{\lambda,\mu}$ im Innern des Polygons n^{ter} Stufe nicht unendlich, und also können jene Coefficienten $R_\nu(g_2, g_3)$ der Teilungsgleichungen im Ausgangsdreieck höchstens noch in der Spitze $\omega = i\infty$ unendlich werden. Sei jetzt die

*) cf. Formel (5) I p. 587.

Dimension von R_ν in ω_1, ω_2 durch $-\varkappa$ bezeichnet, so wird $R_\nu^{12}\Delta^{-\varkappa}$ eine Modulfunction erster Stufe sein, die im Ausgangsdreieck höchstens bei $\omega = i\infty$ unendlich wird. Wir haben demnach in $R_\nu^{12}\Delta^{-\varkappa}$ eine *ganze* rationale Function von J, etwa des σ^{ten} Grades:

$$R_\nu^{12}\Delta^{-\varkappa} = aJ^\sigma + bJ^{\sigma-1} + \cdots + h.$$

Wenn man jetzt für J den Quotienten $g_2^3 : \Delta$ einführt und $\varkappa - \sigma = \tau$ schreibt, so wird

$$R_\nu^{12} = \Delta^\tau . G(g_2, g_3),$$

wo τ eine negative oder positive ganze Zahl, G aber eine ganze rationale Function von g_2, g_3 ist, die (zufolge der vorletzten Formel) bei $\omega = i\infty$ bis auf eine Potenz von ω_2 mit einer endlichen, von Null verschiedenen Grösse identisch wird. Sonach wird $\omega_2^{12\varkappa} R_\nu^{12}$ bei $\omega = i\infty$ mit r^τ proportional, und nun bemerke man, dass in den Reihenentwicklungen für $\wp_{\lambda,\mu}$, $\wp'_{\lambda,\mu}$ Potenzen von r mit negativen Exponenten überall nicht auftreten. Dieserhalb ist $\tau \geqq 0$, und wir können $\Delta^\tau G(g_2, g_3)$ in $G'(g_2, g_3)$ zusammenfassen; ist aber die zwölfte Potenz von $R_\nu(g_2, g_3)$ eine *ganze* Function von g_2, g_3, so gilt ein Gleiches von R_ν selbst. Damit haben wir den Hauptsatz gewonnen: *Die Teilwerte $\wp_{\lambda,\mu}$, $\wp'_{\lambda,\mu}$ genügen den Gleichungen*:

$$(6) \qquad \begin{cases} \wp^{\frac{1}{2}\varphi\psi} + G_2\wp^{\frac{1}{2}\varphi\psi-1} + G_4\wp^{\frac{1}{2}\varphi\psi-2} + \cdots + G_{\varphi\psi} = 0, \\ \wp'^{\varphi\psi} + G'_6\wp'^{\varphi\psi-2} + G'_{12}\wp'^{\varphi\psi-4} + \cdots + G'_{3\varphi\psi} = 0, \end{cases}$$

wo G_ν, G'_ν ganze rationale Functionen von g_2, g_3, $(-\nu)^{\text{ter}}$ Dimension in den ω_1, ω_2 sind. Wir benennen in diesem Sinne die n^{ten} Teilwerte der Functionen $\wp$ und $\wp'$ als *ganze* Modulformen n^{ter} Stufe.

Nun aber giebt es bei der Dimension der g_2, g_3 keine ganze Function der g_2, g_3, die in den ω_1, ω_2 die $(-2)^{\text{te}}$ Dimension hätte; es ist also G_2 identisch Null. Die einzig existierende Function G_4 ist ag_2, wo a numerisch ist; die einzige G_6 ist bg_3 u. s. w. Dank unseres formentheoretischen Ansatzes sind wir also ohne weiteres im Stande, für gegebenes n die in Rede stehenden Coefficienten der Teilungsgleichung bis auf numerische Bestandteile anzugeben. So haben wir bei noch nicht specificiertem n die Anfangsglieder:

$$(7) \qquad \begin{aligned} &\wp^{\frac{1}{2}\varphi\psi} + ag_2\wp^{\frac{1}{2}\varphi\psi-2} + bg_3\wp^{\frac{1}{2}\varphi\psi-3} + cg_2^2\wp^{\frac{1}{2}\varphi\psi-4} \\ &\qquad + dg_2g_3\wp^{\frac{1}{2}\varphi\psi-5} + \cdots = 0, \end{aligned}$$

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\wp'^{\varphi\psi} + a'g_3\wp'^{\varphi\psi-2} + (b'g_2^3 + c'g_3^2)\wp'^{\varphi\psi-4} \\ &\qquad + (d'g_2^3g_3 + e'g_3^3)\wp'^{\varphi\psi-6} + \cdots = 0^*). \end{aligned}$$

*) Die älteren Arbeiten über unseren Gegenstand beziehen sich natürlich alle auf die Teilungsgleichungen für die Functionen zweiter Stufe sin am u etc. Diesen Gleichungen gelten denn auch die Entwicklungen über die zugehörigen

§ 6. Methode zur endgültigen Bestimmung der Coefficienten $G(g_2, g_3)$. Das Absolutglied der Teilungsgleichung der $\wp'_{\lambda,\mu}$.

Zur endgültigen Bestimmung der numerischen Bestandteile innerhalb der Coefficienten $G_\nu(g_2, g_3)$ der speciellen Teilungsgleichungen (7), (8) § 5 kann man z. B. nach einer weiterhin noch sehr häufig zur Anwendung kommenden Methode*) wie folgt verfahren: Man entwickele auf Grund der Reihen des § 5 diejenigen ganzen symmetrischen Functionen der gerade in Betracht kommenden Teilwerte in eine Reihe nach r, welche die gewünschten Coefficienten von (7) bez. (8) § 5 geben. Die einzelne solche Potenzentwicklung wird nur noch ganze Potenzen von r aufweisen, und die auftretenden Coefficienten dieser Potenzen werden rationale Zahlen sein. In der That kann im einzelnen Coefficienten die Einheitswurzel ε nur noch insoweit enthalten sein, dass dieser Coefficient unverändert bleibt, wenn wir ε durch eine andere primitive n^{te} Einheitswurzel ersetzen. Auf der anderen Seite aber ist der in Rede stehende Coefficient der Teilungsgleichung:

$$G_\nu(g_2, g_3) = \sum_{\sigma,\tau} a_\sigma g_2^\sigma g_3^\tau,$$

summiert über alle nicht negativen ganzzahligen Lösungen der Gleichung $4\sigma + 6\tau = \nu$; und wenn wir hier für g_2, g_3 ihre Entwicklungen nach ansteigenden Potenzen von r einsetzen, so entspringt eine zweite Entwicklung von G_ν nach r. In dieser sind die Coefficienten (immer von einer gemeinsamen Potenz von $\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)$ abgesehen) lineare

---

Galois'schen Gruppen, deren wir in der Note zu p. 11 im Vorbeigehen gedachten. Die betreffenden Arbeiten, welche letzteren Gegenstand zum ersten Male erschöpfend behandeln, sind die von Sylow, *Sur le groupe de l'équations pour la division des périodes des fonctions elliptiques*, Forhandlingar i Videnskabs-Selskabet i Christiania (1871) und Kronecker, *Über die algebraischen Gleichungen, von denen die Teilung der elliptischen Functionen abhängt*, Berliner Monatsberichte 1875. Durch diese Entwicklungen, in denen übrigens die weiterhin noch zu erwähnenden Abel'schen Relationen eine wichtige Rolle spielen, wird als diejenige numerische Irrationalität, durch deren Adjunction die Galois'sche Gruppe auf die Monodromiegruppe zurückkommt, die im Texte mit ε bezeichnete primitive n^{te} Einheitswurzel angegeben. Neuerdings ist auf diesen Gegenstand auch Hr. Weber in seiner Abhandlung *„Zur Theorie der elliptischen Functionen"*, Acta mathem. Bd. 6 (1885) zurückgekommen. Der Satz über die Adjunction des ε gilt übrigens ohne jede Modification auch für die zur Teilung erster Stufe gehörenden Gleichungen (7) und (8) des Textes.

*) Diese Methode wurde in unwesentlich modificierter Gestalt auch bereits in Bd. I gelegentlich zur Anwendung gebracht; man vgl. z. B. die Rechnungen p. 755 und 757.

homogene Functionen der unbekannten Zahlen a_σ mit rationalen numerischen Bestandteilen. Indem wir aber entsprechende Coefficienten der beiderseitigen Entwicklungen von G_ν nach r mit einander identificieren, erhalten wir lineare Gleichungen zur Bestimmung der a_σ, aus denen sich die a_σ offenbar als rationale Zahlen bestimmen lassen. Merken wir uns also zugleich den Satz: *Die Coefficienten der Teilungsgleichungen für $\wp$ und $\wp'$ sind ganze Functionen von g_2, g_3 mit rationalen Zahlencoefficienten.*

Um nach dieser Methode etwa die für $n = 3$ existierende Gleichung

$$(1) \qquad \wp^4 + a g_2 \wp^2 + b g_3 \wp + c g_2^2 = 0$$

zu berechnen, genügt bereits die Berücksichtigung der ersten Glieder

$$g_2 = \frac{1}{12}\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4, \quad g_3 = \frac{1}{216}\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6.$$

Schreiben wir alsdann noch abkürzend x für $\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^2 \wp$, so wird aus (1)

$$(2) \qquad x^4 + \frac{a}{12}x^2 + \frac{b}{216}x + \frac{c}{144} = 0.$$

Andererseits haben wir für die vier dritten Teilwerte die Anfangsglieder:

$$\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^2 \wp_{0,1} = \frac{1}{4}, \quad \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^2 \wp_{\lambda,\mu} = -\frac{1}{12}, \quad (\lambda > 0),$$

so dass (2) identisch sein wird mit

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{1}{12}\right)^3 = x^4 - \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{216}x - \frac{1}{48 \cdot 144} = 0.$$

Daraus bestimmen sich a, b, c ohne weiteres, und wir erhalten:

$$(3) \qquad \wp^4 - \frac{1}{2} g_2 \wp^2 - g_3 \wp - \frac{1}{48} g_2^2 = 0$$

als fertige Teilungsgleichung.

Auch im allgemeinen Falle eines beliebigen Teilungsgrades würde man ohne besondere Mühe die Anfangsterme der Teilungsgleichungen ausführlich angeben können; darüber hinaus aber können wir wenigstens im Falle von $\wp'$ über das Absolutglied $G'_{3\varphi\psi}$ eine Reihe interessanter Sätze angeben. Wir müssen in diesem Betracht die folgenden Bemerkungen vorausschicken, welche einen principiellen Unterschied zwischen den Teilwerten $\wp_{\lambda,\mu}$ und $\wp'_{\lambda,\mu}$ bei allen eingehenderen functionentheoretischen Betrachtungen begründen. Die Nullstellen von $\wp'(u)$ in der u-Ebene liegen bekanntermassen (cf. I p. 157 (3)) an den Stellen $\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{2}$, (wobei λ und μ nicht beide zugleich gerade sein sollen). Bei $n > 2$ hat also $\wp'_{\lambda,\mu}$ die besonders wichtige Eigenschaft, *für alle Punkte ω im Innern der Halbebene nicht nur endlich, sondern*

auch von Null verschieden zu sein. Demgegenüber hängt die Lage der Nullpunkte von $\wp(u)$ in der u-Ebene durchaus vom Quotienten ω der Perioden ab, und es giebt immer specielle Werte von ω, für welche eine Nullstelle von $\wp(u)$ nach einem vorgeschriebenen Perioden-n-teil $\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}$ zu liegen kommt. Das heisst dann gerade, dass an solchen Stellen ω der Teilwert $\wp_{\lambda,\mu}$ verschwindet.

Nach dieser Überlegung erkennt man für *ungerades* n*) im Absolutglied $G'_{3\varphi\psi}$ der $\wp'$-Teilungsgleichung eine Modulform erster Stufe $(-3\varphi\psi)^{\text{ter}}$ Dimension, die im Innern der Halbebene allenthalben endlich und nicht-verschwindend ist. Nach bekannten Sätzen haben wir also direct die Identität:

$$G'_{3\varphi\psi}(g_2, g_3) = \varkappa \cdot \Delta^{\frac{1}{4}\varphi\psi} \tag{4}$$

mit einer numerischen Constanten $\varkappa$.

Die endgültige Bestimmung dieser Constanten $\varkappa$ wollen wir (bis aufs Vorzeichen) durchführen, was in gewohnter Weise durch eine Näherungsrechnung bei $\omega = i\infty$ angebahnt wird. Unter Rücksichtnahme auf die Anfangsterme der Reihenentwicklungen für die $\wp'_{\lambda,\mu}$ kommt offenbar:

$$\pm\varkappa = \prod \frac{\cos\frac{\mu\pi}{n}}{4\sin^3\frac{\mu\pi}{n}}, \tag{5}$$

wo μ ein System incongruenter und zu n relativ primer Zahlen zu durchlaufen hat. Wir wollen dies Product kurz $P(n)$ benennen, schreiben dagegen $Q(n)$ für dasjenige Product (5), bei dem μ ein volles Restsystem von n mit Ausnahme von $\mu = 0$ durchläuft. Nach Sätzen der Kreisteilungstheorie ist $P(n) = \pm q^{-3}$, wenn n Potenz der Primzahl q ist; dagegen ist $P(n) = \pm 1$, so oft die ungerade Zahl n wenigstens zwei verschiedene Primfactoren q_1, q_2 besitzt.

Um indessen diesen Satz hier nicht als bekannt vorauszusetzen, skizzieren wir kurz einen Beweis desselben. Jedenfalls ist:

$$Q(n) = \prod_{\tau} P\left(\frac{n}{\tau}\right), \tag{6}$$

wo τ alle Teiler von n durchläuft, und ferner verificiert man leicht:

$$Q(n) = \pm n^{-3}. \tag{7}$$

Jetzt haben wir (unter q eine ungerade Primzahl verstanden) offenbar $Q(q^\nu) : Q(q^{\nu-1}) = P(q^\nu)$, und also folgt nach (7) gemäss unserer Behauptung:

*) Bei geradem n tritt leicht ersichtlich eine unwesentliche Modification der Betrachtung ein.

(8) $$P(q^{\nu}) = \pm q^{-s}.$$

Sind ferner q_1 und q_2 von einander verschiedene ungerade Primzahlen, so ist $Q(q_1 q_2) = P(q_1)P(q_2)P(q_1 q_2)$, und also nach (7) und (8):

(9) $$P(q_1 q_2) = \pm 1.$$

Allgemeiner haben wir nach (6):

$$Q(q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2}) = Q(q_1^{\nu_1})Q(q_2^{\nu_2}) \cdot \prod_{\mu_i} P(q_1^{\mu_1} q_2^{\mu_2}), \quad 0 < \mu_i < \nu_i,$$

$$\prod_{\mu_i} P(q_1^{\mu_1} q_2^{\mu_2}) = \pm 1.$$

Wissen wir aber, dass alle Factoren dieses Products mit Ausnahme des einen $P(q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2})$ mit ± 1 identisch sind, so ist offenbar auch $P(q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2}) = \pm 1$. Mit Hülfe von (9) folgt also durch den Schluss der vollständigen Induction $P(q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2}) = \pm 1$. Man nimmt leicht noch eine dritte, eine vierte Primzahl hinzu und beweist solcherweise unseren Satz allgemein.

Mit Hülfe dieser Überlegungen aber haben wir das merkwürdige Resultat gewonnen: *Bei ungeradem n ist das Absolutglied der irreducibelen $\wp'$-Teilungsgleichung entweder*

(10) $$\pm q^{-s} \Delta^{\frac{1}{4}\varphi\psi} \quad oder \quad \pm \Delta^{\frac{1}{4}\varphi\psi},$$

je nachdem n Potenz der Primzahl q ist, oder doch wenigstens zwei von einander verschiedene Primfactoren aufweist.

§ 7. Normierung der $\wp_{\lambda,\mu}$, $\wp'_{\lambda,\mu}$. Specialbetrachtungen für $n = 3, 4, 5$.

Wennschon die Brauchbarkeit formentheoretischer Betrachtungen bei der Aufstellung der Teilungsgleichungen aus den voraufgehenden Entwicklungen evident sein dürfte, so kann man doch insbesondere bei niederen Stufenzahlen auch durch functionentheoretische Schlussweisen zur Kenntnis dieser Gleichungen gelangen. Zu diesem Ende würde das Nächstliegende sein, dass wir die Teilwerte durch Zusatz gewisser Factoren der *ersten* Stufe zu Modul*functionen* normierten; wir würden in diesem Sinne an Stelle von $\wp_{\lambda,\mu}$, $\wp'_{\lambda,\mu}$ beziehungsweise die Grössen

(1) $$\frac{g_2}{g_3}\wp_{\lambda,\mu}, \quad \frac{\wp'^2_{\lambda,\mu}}{g_3}$$

betrachten. Aber hierbei begeben wir uns des Vorteils, mit Functionen zu thun zu haben, welche im Innern der ω-Halbebene nirgends unendlich werden; und dieserhalb ziehen wir vor, weiterhin die folgenden normierten Teilwerte zu gebrauchen:

(2) $$x_{\lambda,\mu} = \frac{\wp_{\lambda,\mu}}{\sqrt[6]{\Delta}}, \quad y_{\lambda,\mu} = \frac{\wp'_{\lambda,\mu}}{\sqrt[4]{\Delta}},$$

die in der That die gekennzeichnete Eigenschaft mit den $\wp_{\lambda,\mu}$, $\wp'_{\lambda,\mu}$ gemein haben.

Nun aber sind die Zusatzfactoren in (2) von der sechsten bez. vierten Stufe. Wir gehen also in beiden Fällen aus dem Rationalitätsbereich g_2, g_3 hinaus, und zwar tritt für die $x_{\lambda,\mu}$ zufolge I p. 690 an dessen Stelle der Rationalitätsbereich $\sqrt{J-1}$, $\sqrt[3]{J}$. Die Coefficienten der $x_{\lambda,\mu}$-Teilungsgleichung sind dementsprechend ganze rationale Functionen von $\sqrt{J-1}$ und $\sqrt[3]{J}$, und es wird diese Gleichung die Anfangsterme besitzen:

$$x^{\frac{1}{2}\varphi\psi} + a\sqrt[3]{J}\cdot x^{\frac{1}{2}\varphi\psi-2} + b\sqrt{J-1}\cdot x^{\frac{1}{2}\varphi\psi-3} + c\left(\sqrt[3]{J}\right)^2\cdot x^{\frac{1}{2}\varphi\psi-4} + \cdots = 0.$$

Besonders einfach gestalten sich die Verhältnisse bei $y_{\lambda,\mu}$. Hier kommt offenbar nur $\sqrt{\Delta}$ zur Geltung, und also besteht der Rationalitätsbereich aus der einzigen Grösse:

(3) $$Y = \frac{g_3}{\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\sqrt{J-1}.$$

Die Teilungsgleichung gewinnt daraufhin die Gestalt:

(4) $$y^{\varphi\psi} + aY\cdot y^{\varphi\psi-2} + \cdots + G_\nu(Y)\cdot y^{\varphi\psi-2\nu} + \cdots + G_{\frac{1}{2}\varphi\psi} = 0,$$

wobei $G_\nu(Y)$ eine ganze rationale Function höchstens vom ν^{ten} Grade in Y mit rationalen Zahlencoefficienten ist. Der letzte Term ist dabei stets von Y unabhängig, und zwar haben wir für ungerade n:

(5) $$G_{\frac{1}{2}\varphi\psi} = \pm q^{-3} \quad \text{oder} \quad = \pm 1,$$

je nachdem der eine oder andere der beiden am Schlusse von § 6 (p. 18) charakterisierten Fälle eintritt.

Unter den zu Modulfunctionen normierten Teilwerten sind nun insbesondere diejenigen der $\wp'$-Function einer directen functionentheoretischen Betrachtung auf dem Polygon sehr leicht zugänglich, und wir wollen in dieser Richtung für ein paar Anfangswerte n hier einige Entwicklungen über die $\wp'_{\lambda,\mu}$ geben. Wir gewinnen so einerseits Kenntnis der Beziehungen dieser Teilwerte zu jenen Modulfunctionen, die wir in I auf rein functionentheoretischem Wege für die betreffenden Stufenzahlen n kennen lernten, andrerseits erhalten wir eben auf diesem Wege neue Mittel, die betreffenden Teilungsgleichungen ohne Benutzung der in § 5 und 6 entwickelten Ansätze in fertiger Form anzugeben.

Im Falle des Teilungsgrades $n = 3$ wollen wir eine von (2) noch etwas verschiedene Normierung anwenden. Wir besitzen hier in $\wp'_{01}$,

$\sqrt[3]{\Delta}$ und der in I p. 630 definierten Grösse ξ_4 drei Modulformen dritter Stufe, welche nur in den Spitzen des Polygons dritter Stufe (I p. 354 Fig. 81) verschwinden oder unendlich werden können. Das Gleiche gilt also auch von der Modulfunction

$$\frac{\wp'_{01}\xi_4}{\sqrt[3]{\Delta}}, \tag{6}$$

welche überdies bei der Substitution S unverändert bleibt, wie man mit Hülfe von I p. 624 (3) und p. 630 (6) leicht verificiert. Letzterem Umstande zufolge ist die Modulfunction (6) bereits rational in ξ^3, und es genügt für die Untersuchung von (6) bereits der dritte Teil des cit. Polygons, den wir etwa zwischen den in $\omega = \pm \frac{1}{2}$ senkrecht stehenden Geraden der Modulteilung eingrenzen. Dieser Teil bildet für sich genommen das Polygon F_4 der durch $\gamma \equiv 0 \pmod{3}$ charakterisierten Congruenzgruppe Γ_4 und besitzt im ganzen nur zwei Spitzen ($\omega = i\infty$, 0), in denen $\xi^3 = \infty$ bez. $= 1$ wird*). Sofern also die Modulfunction (6) nicht einer Constanten gleich ist, wird sie in der einen dieser Spitzen ∞, in der andern im gleichen Grade (auf F_4 gemessen) Null werden. Wir haben dementsprechend den Ansatz:

$$\frac{\wp'_{01}\xi_4}{\sqrt[3]{\Delta}} = c\,(\xi^3 - 1)^\nu, \tag{7}$$

wo c eine Constante, ν aber eine positive oder negative ganze Zahl oder aber die Null bedeutet. Formel (7) specificieren wir jetzt für $\omega = i\infty$, indem wir die Näherungswerte von ξ_4 und $\sqrt[3]{\Delta}$ aus I l. c., denjenigen von $\wp'_{01}$ aus (4) p. 13 abschreiben:

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} = c(27r)^{-\nu}.$$

Hier ergiebt sich unmittelbar $\nu = 0$, $c = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ und damit als Darstellung von $\wp'_{01}$:

$$\wp'_{01} = -\frac{\sqrt[3]{\Delta}}{\xi_4\sqrt{3}}, \tag{8}$$

so dass die $\wp'$-Teilwerte in engster Beziehung zu den reciproken Werten der mit ξ_4 gleichberechtigten Modulformen stehen.

---

*) Man gewinnt übrigens bei beliebigem n ein „Polygon der Teilungsgleichung" oder, kurz gesagt, ein n^{tes} Teilungspolygon $F_{\frac{1}{2}\varphi\psi}$ in ganz entsprechender Weise, indem man aus dem Gesamtpolygon n^{ter} Stufe genau so einen n^{ten} Teil herausschneidet. Die Zusammengehörigkeit der Randcurven lässt sich dabei immer leicht bestimmen, sofern dieselbe für das Gesamtpolygon n^{ter} Stufe bekannt ist.

Um von hier aus die Teilungsgleichung zu berechnen, combinieren wir (8) mit der dritten Gleichung (7) in I p. 630 und finden:

$$\xi_4 = -\frac{\sqrt[3]{\Delta}}{\wp'_{01}\sqrt{3}}, \quad \xi_3{}^3 = -\frac{\Delta}{3\sqrt{3}\wp'^3_{01}} - 3\sqrt{3}\wp'_{01}.$$

Setzen wir diese Werte in die zweite Gleichung (7) I. p. 630 ein, so entspringt mit Unterdrückung der unteren Indices von $\wp'_{01}$ direct:

$$\wp'^8 - 8g_3\wp'^6 - \tfrac{2}{3}\Delta\wp'^4 - 3^{-3}\Delta^2 = 0 \tag{9}$$

in voller Übereinstimmung mit unseren voraufgehenden Entwicklungen als Teilungsgleichung für den dritten Teilungsgrad.

Für $n = 4$ findet sich durch eine ebenso leichte Untersuchung die engste Beziehung der $\wp'_{\lambda,\mu}$ zu den verschiedenen gleichberechtigten Gestalten des Hauptmoduls μ. Wir haben nämlich einfach:

$$\wp'_{01} = -\mu\sqrt[4]{\Delta} \tag{10}$$

und gewinnen von hier aus durch zweckmässigen Gebrauch der Octaedergleichung (I p. 20 (4)) als Teilungsgleichung:

$$\begin{aligned}\wp'^{12} - 54g_3\wp'^{10} - 33\Delta\wp'^8 + 108g_3\Delta\wp'^6 - 33\Delta^2\wp'^4 \\ - 54g_3\Delta^2\wp'^2 + \Delta^3 = 0.\end{aligned} \tag{11}$$

Für $n = 5$ könnte man die Teilungsgleichung am zweckmässigsten an die Resolvente sechsten Grades knüpfen, indem man z. B. die Teilwerte $\wp'_{01}$, $\wp'_{02}$ in ihrer Beziehung zu dem in I p. 637 aufgestellten Hauptmodul τ untersucht. Man beweist in dieser Hinsicht ohne besondere Mühe die Relationen:

$$\wp'^2_{01}\wp'^2_{02} = -\frac{\Delta}{\tau}, \quad \wp'^2_{01} + \wp'^2_{02} = \frac{-216g_3}{\tau^2 - 4\tau - 1} \tag{12}$$

und könnte von hier aus mit Hülfe einiger Rechnungen die Teilungsgleichung entwickeln. Aber schon hierbei würden wir bemerken, was wir weiterhin für unsere functionentheoretischen Zwecke von den Teilwerten zu gewärtigen haben, so einfach sich auch soeben die Verhältnisse bei $n = 3$ und 4 gestalteten. Freilich liefern uns die Teilwerte für allgemeine Stufenzahlen n Resolventen der betreffenden Galois'schen Probleme der Grade $\mu(n)$ bez. $2\mu(n)$; aber diese Resolventen sind vom Grade $\varphi(n)\psi(n)$ (homogen gedacht), während wir doch wissen, dass es stets Resolventen $\psi(n)^{\text{ten}}$ Grades giebt. So werden wir denn auch weiterhin auf anderen Wegen neue Moduln n^{ter} Stufe kennen lernen, die ein weit einfacheres functionentheoretisches Verhalten darbieten und eben deshalb unserer Absicht, die niedersten Resolventen der Galois'schen Probleme $\mu(n)^{\text{ten}}$ Grades kennen zu lernen und diese Probleme selbst in geeigneter Weise zu formulieren, sehr viel mehr entsprechen.

§ 8. Einführung der Functionen $\sigma_{\lambda,\mu}(u \mid \omega_1, \omega_2)$.

Wie die σ-Function in der Theorie der doppeltperiodischen Functionen als das einfachste Element zu betrachten ist, so könnte man vermuten, dass die Übertragung der n-Teilung auf die σ-Function besonders zweckmässige Teilgrössen liefern möchte. Wir werden in der That ohne Mühe sehen, dass die den voraufgehenden Entwicklungen zu Grunde liegenden gruppentheoretischen Erörterungen (§ 3, p. 8 ff.) für die Teilgrössen

$$\sigma\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n} \,\Big|\, \omega_1, \omega_2\right) \tag{1}$$

im wesentlichen ihre Bedeutung behalten werden. Inzwischen gestalten sich hier des genaueren die Verhältnisse deshalb etwas schwieriger, weil sich $\sigma(u)$ bei Vermehrung von u um Perioden um eine multiplicative Exponentialgrösse ändert. Dies hat nämlich zur Folge, dass sich der Teilwert (1) bei Ausübung einer mit der Identität mod. n congruenten Substitution im allgemeinen um einen von ω_1, ω_2 abhängigen Exponentialfactor ändert. Wir haben in den Grössen (1) also jedenfalls noch keine algebraischen Modulformen; aber es gelingt, aus ihnen durch eine sehr einfache Modification solche herzustellen.

Betrachten wir z. B. die besondere Teilgrösse $\sigma\left(\frac{\omega_1}{n} \,\Big|\, \omega_1, \omega_2\right)$ und üben auf dieselbe die mit 1 mod. n congruente Substitution S^n:

$$\omega_1' = \omega_1 + n\omega_2, \quad \omega_2' = \omega_2$$

aus. Wir haben nach I p. 156 (8) ohne weiteres:

$$\sigma\left(\frac{\omega_1'}{n} \,\Big|\, \omega_1', \omega_2'\right) = e^{\frac{2\omega_1\eta_2 + n\omega_2\eta_2}{2n} + \pi i}\,\sigma\left(\frac{\omega_1}{n} \,\Big|\, \omega_1, \omega_2\right). \tag{2}$$

Hier aber knüpfen wir an den rechts auftretenden Exponenten die folgende Entwicklung: Die Perioden η_1, η_2 sind (cf. I p. 122) mit ω_1, ω_2 cogredient; es ist also:

$$\omega_1'\eta_1' - \omega_1\eta_1 = n(\omega_1\eta_2 + \omega_2\eta_1) + n^2\omega_2\eta_2,$$

und wenn wir hier rechter Hand die Legendre'sche Relation (I p. 117) anwenden:

$$\frac{\omega_1'\eta_1'}{2n^2} - \frac{\omega_1\eta_1}{2n^2} + \frac{(n+1)\pi i}{n} = \frac{2\omega_1\eta_2 + n\omega_2\eta_2}{2n} + \pi i.$$

Rechts steht in der letzten Formel gerade der Exponent von (2), und also geht diese Formel sofort über in:

$$e^{-\frac{\omega_1'\eta_1'}{2n^2}}\,\sigma\left(\frac{\omega_1'}{n} \,\Big|\, \omega_1', \omega_2'\right) = e^{\frac{(n+1)\pi i}{n}} \cdot e^{-\frac{\omega_1\eta_1}{2n^2}}\,\sigma\left(\frac{\omega_1}{n} \,\Big|\, \omega_1, \omega_2\right). \tag{3}$$

Wenn wir demgemäss $\sigma\left(\frac{\omega_1}{n}\right)$ noch mit dem Factor $e^{-\frac{\omega_1\eta_1}{2n^2}}$ versehen und $e^{-\frac{\eta_1\omega_1}{2n^2}}\sigma\left(\frac{\omega_1}{n}\right)$ als n^{ten} σ-Teilwert bezeichnen wollen, so ist der bei S^n auftretende Factor von ω_1, ω_2 unabhängig, und zwar eine n^{te} oder $(2n)^{\text{te}}$ Einheitswurzel, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Wenden wir auf den so gewonnenen Teilwert eine beliebige Modulsubstitution an, indem wir als deren ersten und zweiten Coefficienten sogleich λ und μ schreiben, und setzen endlich noch (zur Vereinfachung späterer Formeln) das negative Zeichen hinzu, *so erhalten wir als allgemeine Gestalt eines n^{ten} σ-Teilwertes:*

$$(4)\qquad \sigma_{\lambda,\mu}(\omega_1, \omega_2) = -e^{-\frac{(\lambda\eta_1+\mu\eta_2)(\lambda\omega_1+\mu\omega_2)}{2n^2}}\sigma\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\,\Big|\,\omega_1, \omega_2\right).$$

Ehe wir die genauere Untersuchung dieser Grössen unternehmen, müssen wir zur Vorbereitung späterer Untersuchungen die gegenwärtige Entwicklung mit derjenigen von I p. 158 in Beziehung setzen. Auf Grund alleiniger Betrachtung der Abhängigkeit von u hatten wir damals die Grösse construiert:

$$(5)\qquad c_{\lambda,\mu}\cdot e^{\frac{(\lambda\eta_1+\mu\eta_2)u}{n}}\cdot\sigma\left(u-\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\,\Big|\,\omega_1, \omega_2\right),$$

wo $c_{\lambda,\mu}$ von u unabhängig war, aber sehr wohl noch von den Perioden abhängen durfte. Diesen Factor $c_{\lambda,\mu}$ werden wir jetzt offenbar so bestimmen wollen, dass (5) für $u=0$ in (4) übergeht; dann heisst die Function (5) ausführlich geschrieben:

$$(6)\qquad \sigma_{\lambda,\mu}(u\mid\omega_1, \omega_2) = e^{\frac{\lambda\eta_1+\mu\eta_2}{n}\left(u-\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{2n}\right)}\sigma\left(u-\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\,\Big|\,\omega_1, \omega_2\right),$$

ebendieselbe Grösse, die wir auch bereits I p. 159 vorläufig namhaft machten*).

Für $n=1$ kommt in (6) nur die eine Combination $\lambda=\mu=0$ in Betracht, und wir erhalten solcherweise die ursprüngliche σ-Function wieder. Indem wir aber für höhere n die zunächst sich aufdrängenden

*) Teilwerte der σ-Function, bez. der ϑ-Functionen sind von jeher in der Theorie der elliptischen Functionen unter mehr oder minder principiellen Gesichtspunkten betrachtet worden. Die im Texte zu Grunde gelegte Normierung, vermöge deren das *einzelne* $\sigma_{\lambda,\mu}$ als eine algebraische Modulform erscheint, wurde von Klein eingeführt in der nun wiederholt zu nennenden Abhandlung: *Über die elliptischen Normalcurven der n^{ten} Ordnung und zugehörige Modulfunctionen der n^{ten} Stufe* (Abh. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. 13 Nr. 4, 1885). Wir citieren diese Abhandlung fortan kurzweg als „Normalcurven".

Grössen $\sigma\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)$ in der angegebenen Weise ausgestalten, haben wir das denkbar einfachste Verhalten derselben gegenüber Vermehrung des u um Perioden, sowie gegenüber der Ausübung von Modulsubstitutionen d. i. gegenüber den ternären Operationen der in § 1 eingeführten $\Gamma^{(3)}$ erreicht, wie wir nun noch ins einzelne zu entwickeln haben. Für die Vermehrung des u um Perioden entnehmen wir die betreffende Fundamentalformel ohne Rechnung aus I p. 158 (3) unter Rücksicht auf I p. 156 (9); sie lautet:

$$(7) \quad \begin{aligned} &\sigma_{\lambda,\mu}(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2) \\ &= (-1)^{m_1 m_2 + m_1 + m_2} \cdot e^{(m_1\eta_1 + m_2\eta_2)\left(u + \frac{m_1\omega_1 + m_2\omega_2}{2}\right) + \frac{2i\pi}{n}(m_1\mu - m_2\lambda)} \cdot \sigma_{\lambda,\mu}(u). \end{aligned}$$

Über die Ausübung von Modulsubstitutionen müssen wir eine etwas ausführlichere Untersuchung anstellen, wobei wir übrigens vorübergehend die Variabele u auch noch beibehalten mögen.

§ 9. Ausführliche gruppentheoretische Untersuchung der σ-Teilwerte.

Um eine mit 1 modulo n congruente homogene Modulsubstitution auch äusserlich als solche zu kennzeichnen, schreiben wir sie:

$$(1) \quad \omega_1' = (an + 1)\omega_1 + bn\omega_2, \quad \omega_2' = cn\omega_1 + (dn + 1)\omega_2.$$

Die Function $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ gehe durch Ausübung von (1) in $\sigma'_{\lambda,\mu}(u)$ über; dieses $\sigma'_{\lambda,\mu}(u)$ stellt sich dann mit Hülfe von (7) § 8, sowie der Legendre'schen Relation nach kurzer Rechnung in der Gestalt dar:

$$(2) \quad \begin{aligned} &\sigma'_{\lambda,\mu}(u) \\ &= (-1)^{\lambda^2(ab+a+b) + \lambda\mu(ad+bc) + \mu^2(cd+c+d)}\, e^{\frac{\pi i}{n}(b\lambda^2 + (d-a)\lambda\mu - c\mu^2)}\, \sigma_{\lambda,\mu}(u). \end{aligned}$$

Functionen, die bei Ausübung der Substitutionen einer Γ_μ sich bis auf multiplicative Einheitswurzeln reproducieren, sollen *dieser Untergruppe* Γ_μ *adjungiert* genannt werden. In diesem Sinne sprechen wir den Satz aus: *Die zum Teilungsgrad* n *gehörenden* $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ *sind insgesamt der Hauptcongruenzgruppe* n^{ter} *Stufe oder, kurz gesagt, der* n^{ten} *Stufe adjungiert.*

Um zu sehen, welcher Stufe die $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ absolut angehören, schreiben wir uns erstlich die von den vier Zahlen a, b, c, d jedenfalls erfüllte Bedingung

$$(3) \quad (ad - bc)n + a + d = 0$$

auf und müssen nun die ungeraden n von den geraden scheiden.

Im ersteren Falle (d. i. bei ungeradem n) folgern wir aus (3) die Congruenzen:

$$ad + bc \equiv a - d, \quad ab + a \equiv cd + d \equiv 0, \quad (\text{mod. } 2),$$

die wir zur Umgestaltung von (2) verwerten. Unter der Abkürzung $e^{\frac{2i\pi}{n}} = \varepsilon$ geht Formel (2) über in:

$$(4) \qquad \sigma'_{\lambda,\mu}(u) = \varepsilon^{\frac{n-1}{2}(-b\lambda^2 + (a-d)\lambda\mu + c\mu^2)} \cdot \sigma_{\lambda,\mu}(u).$$

Man prüfe jetzt nach einander die drei Combinationen $(\lambda, \mu) = (0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ und überblickt sofort, dass notwendig $b \equiv c \equiv a - d \equiv 0$, (mod. n) sein muss, wenn die gesamten bei n-Teilung entspringenden $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ durch Ausübung der in Rede stehenden Substitution in sich übergeführt werden sollen. Die letzte Congruenz $a - d \equiv 0$, (mod. n) spaltet sich mit Rücksicht auf (3) in $a \equiv d \equiv 0$, (mod. n), und also entspringt das Resultat: *Bei ungeradem n bilden diejenigen Substitutionen, welche die gesamten $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ unverändert lassen, die homogene Hauptcongruenzgruppe $\Gamma_{2\mu(n^2)}$ der Stufe n^2.*

Für ein gerades n schreiben wir die auf der rechten Seite von (2) auftretende Einheitswurzel:

$$(5) \qquad \varepsilon^{\frac{1}{2}\left\{\lambda^2(nab + na + nb + b) + \lambda\mu(n(ad - bc) + d - a) + \mu^2(ncd + nc + nd - c)\right\}}.$$

Damit dieselbe für alle Combinationen (λ, μ) die Einheit selbst sei, ist hinreichend und notwendig:

$$(6) \qquad \left.\begin{aligned} nab + na + nb + b &\equiv 0, \\ n(ad - bc) + d - a &\equiv 0, \\ ncd + nc + nd - c &\equiv 0, \end{aligned}\right\} (\text{mod. } 2n).$$

Die mittlere dieser Congruenzen ergiebt mit Hülfe von (3) $a \equiv d \equiv 0$, (mod. n), und daraufhin geht die erste und dritte in $(n + 1)b \equiv 0$ bez. $(n - 1)c \equiv 0$ über, woraus wir sofort schliessen $b \equiv c \equiv 0$, (mod. $2n$). Dementsprechend fordert dann wieder die zweite Congruenz (6) $a \equiv d$, (mod. $2n$), womit nun aber die sämtlichen Forderungen zur Erledigung gekommen sind. Wir gestalten das gewonnene Resultat zu dem Satze aus: *Die Modulsubstitutionen, welche bei geradem n die gesamten $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ in sich transformieren, bilden diejenige ausgezeichnete homogene Congruenzgruppe $\Gamma_{\mu(2n^2)}$, welche sich modulo $2n^2$ auf die Substitutionen:*

$$(7) \qquad \begin{pmatrix} n^2 + 1, & 0 \\ 0, & n^2 + 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{mod. } 2n^2)$$

reduciert.

Was die zu einem *einzelnen* $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ gehörende Untergruppe anlangt, so treten hier die allgemein für Teilwerte in § 3 p. 8 ff. entwickelten Gesichtspunkte unter unwesentlichen Modificationen in Kraft.

Erstlich zerfallen alle n^2 beim Teilungsgrad n eintretenden $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ der Formel (3) p. 10 entsprechend in ebensoviel getrennte Systeme als n Teiler hat; dabei gehören zum Teiler $\frac{n}{\tau}$ im ganzen $\varphi\left(\frac{n}{\tau}\right)\psi\left(\frac{n}{\tau}\right)$ verschiedene $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$, und im speciellen gehören zu n selbst diejenigen $\varphi(n)\psi(n)$ Grössen $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$, in welchen der grösste gemeinsame Teiler von λ und μ prim gegen n ist.

Ferner sind die $\varphi(n)\psi(n)$ eigentlich zum Grade n gehörenden $\sigma_{\lambda,\mu}$ mit einander gleichberechtigt und gruppieren sich zu je $\varphi(n)$ in $\psi(n)$ verschiedene Systeme, welch' letztere bestimmten $\psi(n)$ gleichberechtigten Untergruppen zugeordnet sind. Diese Untergruppen entspringen aus der den gesamten n^2 Grössen $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ soeben zugeordneten ausgezeichneten $\Gamma_{2\mu(n^2)}$ bez. $\Gamma_{\mu(2n^2)}$ durch Zusatz einer jeweils modulo n wohlcharakterisierten parabolischen Substitution der Amplitude 1. So werden wir für die $\varphi(n)$ Grössen $\sigma_{0,\mu}(u)$ zur eben gedachten ausgezeichneten Untergruppe die Substitution S hinzusetzen, um durch Combination die zu den $\sigma_{0,\mu}$ gehörende Gruppe zu erzeugen.

Für ausführliche Untersuchungen ist es übrigens von Wichtigkeit, dass die n^{te} bez. $(2n)^{\text{te}}$ Potenzen der $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ absolut der n^{ten} Stufe angehören. Des Näheren aber sind die diesen Potenzen der $\sigma_{\lambda,\mu}$ zugehörenden Congruenzgruppen n^{ter} Stufe eben dieselben, welche an analoger Stelle im ersten Teile des Kapitels bei den Teilwerten $f_{\lambda,\mu}$ auftraten.

Allenthalben dachten wir hier die λ, μ gleich auf ein System von n^2 mod. n incongruenten Zahlenpaaren eingeschränkt. Immerhin mögen wir uns jedoch noch die unwesentliche Modification anmerken, welche die $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ erleiden, falls wir λ und μ um beliebige ganzzahlige Vielfache an bez. bn der Zahl n vermehren; es ergiebt sich mit Hülfe der Legendre'schen Relation leicht:

$$(8) \qquad \sigma_{\lambda+an,\mu+bn}(u) = (-1)^{a^2+ab+b^2} \cdot e^{-\frac{\pi i}{n}(a\mu-b\lambda)} \sigma_{\lambda,\mu}(u).$$

§ 10. Functionentheoretische Betrachtung der Teilwerte $\sigma_{\lambda,\mu}$.

In den Functionen des vorigen Paragraphen setzen wir nunmehr $u = 0$ und kehren damit zu den σ-Teilwerten

$$(1) \qquad \sigma_{\lambda,\mu}(\omega_1, \omega_2) = -e^{-\frac{(\lambda\omega_1+\mu\omega_2)(\lambda\eta_1+\mu\eta_2)}{2n^2}} \sigma\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$$

zurück. Dieser Schritt erfordert eine ergänzende Bemerkung zur gruppentheoretischen Darlegung des vorigen Paragraphen. Die σ-Function ist eine ungerade Function ihres ersten Argumentes u, und eben deshalb wird die Gleichung

(2) $$\sigma_{-\lambda,-\mu}(\omega_1, \omega_2) = -\sigma_{\lambda,\mu}(\omega_1, \omega_2)$$

bestehen. Von den $\varphi(n)\psi(n)$ eigentlich zum Teilungsgrade n gehörenden Teilwerten unterscheidet sich demnach wieder die eine Hälfte von der andern nur durch das Vorzeichen (jedoch wie oben vom particulären Falle $n = 2$ abgesehen). Wir werden also bereits alle $\frac{1}{2}\varphi(n)\psi(n)$ wesentlich verschiedenen $\sigma_{\lambda,\mu}$ gewinnen, wenn wir λ auf das Intervall

(3) $$0 \leqq \lambda \leqq \frac{n}{2}$$

einschränken.

Um jetzt die functionentheoretische Eigenart unserer neuen Teilwerte zu erkennen, gehen wir auf I p. 161 (4) zurück und ziehen aus der ersten dieser Formeln die nachfolgende Relation:

(4) $$-\sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[8]{\Delta}\cdot\sigma_{\lambda,\mu}(\omega_1, \omega_2) = e^{\frac{(\lambda^2\omega+\lambda\mu)i\pi}{2n^2}}\vartheta_1\left(\frac{\lambda\omega+\mu}{n}\pi, r\right),$$

wodurch die Zurückführung der $\sigma_{\lambda,\mu}$ auf Teilwerte der Function ϑ_1 geleistet ist. Benutzen wir nun für ϑ_1 die I p. 160 (3) gegebene Reihe, so kommt nach kurzer Zwischenrechnung die sehr wertvolle analytische Darstellung:

(5) $$\sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[8]{\Delta}\cdot\sigma_{\lambda,\mu}(\omega_1, \omega_2) = i\varepsilon^{\frac{\mu(\lambda+n)}{2n}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\varepsilon^{\mu m}r^{\frac{1}{2}\left(m+\frac{2\lambda+n}{2n}\right)^2},$$

die eine im Innern der ω-Halbebene stets convergente Reihenentwicklung für unsere Teilwerte liefert. Bei $\omega = i\infty$ finden wir auf Grund von (5) die Näherungswerte:

(6) $$\sigma_{0,\mu} = -\frac{\omega_2}{\pi}\sin\frac{\mu\pi}{n},$$
$$\sigma_{\lambda,\mu} = \frac{\omega_2}{2i\pi}\varepsilon^{\frac{\mu(\lambda-n)}{2n}}r^{\frac{\lambda(\lambda-n)}{2n^2}}, \quad \lambda > 0,$$

während nach unserm Princip von I p. 587 vermöge der Relation:

(7) $$\sigma_{\lambda,\mu}(\alpha\omega_1+\beta\omega_2, \gamma\omega_1+\delta\omega_2) = \sigma_{\alpha\lambda+\gamma\mu,\beta\lambda+\delta\mu}(\omega_1, \omega_2)$$

das Verhalten von $\sigma_{\lambda,\mu}(\omega_1, \omega_2)$ bei Annäherung an den Punkt $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ mit demjenigen von $\sigma_{\alpha\lambda+\gamma\mu,\beta\lambda+\delta\mu}$ bei Annäherung an $\omega = i\infty$ übereinstimmt. *Hiermit haben wir in den Teilwerten $\sigma_{\lambda,\mu}$ algebraische Modulformen (der ersten Dimension) erkannt und können auf dieselben deswegen die von* I *gelieferten Hülfsmittel in Anwendung bringen.*

Bevor wir dies unternehmen, müssen wir noch der Productentwicklung der $\sigma_{\lambda,\mu}$ gedenken, wie sie aus I p. 159 Formel (1) zu entnehmen ist; es findet sich nach kurzer Zwischenrechnung:

$$(8)\qquad \sqrt[12]{\Delta}\cdot\sigma_{\lambda,\mu} = -i\varepsilon^{\frac{\mu(\lambda-n)}{2n}} r^{\frac{\lambda(\lambda-n)}{2n^2}+\frac{1}{12}} \prod_{m=0}^{\infty}\left(1-\varepsilon^{\mu} r^{m+\frac{\lambda}{n}}\right)\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\varepsilon^{-\mu} r^{m-\frac{\lambda}{n}}\right),$$

und wir folgern aus dieser Darstellung ohne weiteres den wichtigen Satz: *Wie die $\wp'_{\lambda,\mu}$ sind auch die Teilwerte $\sigma_{\lambda,\mu}$ im Innern der ω-Halbebene allenthalben endlich und von Null verschieden.*

Zwischen den beiden Darstellungen (5) und (8) für die $\sigma_{\lambda,\mu}$ besteht ein principieller Unterschied, den wir nicht unerwähnt lassen dürfen. Beide Male ist $\sigma_{\lambda,\mu}$ mit einer derartigen Grösse multipliciert, dass das Product nur noch von ω allein abhängt; aber der Zusatzfactor ist in (5) ein wesentlich anderer als in (8). Unter den Wurzeln aus Δ ist nach I p. 623 einzig $\sqrt[12]{\Delta}$ eine eindeutige Modulform (sowie natürlich deren ganze Potenzen); $\sqrt[8]{\Delta}\cdot\sigma_{\lambda,\mu}$ ist also überhaupt nicht mehr eine eindeutige Modulform und kann nur erst wieder durch Multiplication mit $\sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}$ zu einer von ω eindeutig abhängigen Grösse werden. Hat das entspringende Product also nicht mehr das glatte Verhalten einer Modulform*), so besitzen wir doch für dasselbe von der ϑ_1-Reihe aus eine höchst brauchbare Reihenentwicklung, was man z. B. aus einem Vergleich der Formel (5) mit den oben (p. 12) für die $\wp_{\lambda,\mu}$, $\wp'_{\lambda,\mu}$ gegebenen Entwicklungen ermessen wolle. *Im Gegensatz zur Reihe* (5) *haben wir in der Productentwicklung* (8) *direct eine eindeutige algebraische Modulfunction* $\sqrt[12]{\Delta}\cdot\sigma_{\lambda,\mu}$ *vor uns;* dieselbe ist der n^{ten} Stufe adjungiert und hat die zweckmässige Eigenschaft, dass ihre Null- und Unstetigkeitspunkte ausschliesslich in den Spitzen des Polygons gelegen sind.

Was wir nun noch allgemein über den functionentheoretischen Charakter der $\sigma_{\lambda,\mu}$ zu sagen haben, ist leicht erledigt. Bei ungeradem n sind die n^{ten} Potenzen der $\varphi\psi$ eigentlich zum Teilungsgrade n gehörenden $\sigma_{\lambda,\mu}$ die Wurzeln einer irreducibelen Gleichung $\varphi\psi^{\text{ten}}$ Grades, in welcher alle ungeraden Potenzen der Unbekannten ausfallen. Die Coefficienten dieser *speciellen Teilungsgleichung für n-Teilung der σ-Function* sind rational in g_2, g_3 und haben leicht ersichtlich die Gestalt $\Delta^{\nu}\cdot G(g_2, g_3)$. Da sich aber in den Reihenentwicklungen von $\sigma_{\lambda,\mu}$ Anfangsglieder mit negativen Exponenten von r zeigen, so wird ν im

*) Wir verweisen hier auf die diesen Gegenstand betreffenden gruppentheoretischen Erörterungen im zweiten Teile des nächstfolgenden Kapitels; vgl. auch die bezüglichen Bemerkungen am Eingang vom dritten Kapitel des nächsten Abschnitts (§ 1 daselbst).

allgemeinen eine negative ganze Zahl sein, *und also sind im Gegensatz zu $\wp_{\lambda,\mu}$, $\wp'_{\lambda,\mu}$ die σ-Teilwerte keineswegs ganze algebraische Modulformen**). Für gerades n gelten entsprechende Sätze unter geringen Modificationen: An Stelle der n^{ten} Potenzen der $\sigma_{\lambda,\mu}$ treten jetzt die $(2n)^{\text{ten}}$, während der Grad der irreducibeln Teilungsgleichung auf $\frac{1}{2}\varphi\psi$ zurücksinkt (den particulären Fall $n=2$ wieder ausgenommen). Man bemerkt sonach, dass die äussere Gestalt der Teilungsgleichung bei geraden und ungeraden n gar keine Verschiedenheit aufweist.

§ 11. Specialuntersuchung der $\sigma_{\lambda,\mu}$ für $n=2$ und 3.

Haben sich die σ-Teilwerte in bequemer Weise dem Schema der allgemeinen Theorie der Modulfunctionen eingeordnet, so werden wir nunmehr in Kürze die Frage streifen, inwieweit die $\sigma_{\lambda,\mu}$ zweckmässige Hülfsmittel zur Behandlung unseres functionentheoretischen Grundproblems gewähren. Wie bei den $\wp_{\lambda,\mu}$ bahnen wir diese Untersuchung wieder dadurch an, dass wir für niederste Stufenzahlen n die uns von I her bekannten einfachsten Moduln mit den $\sigma_{\lambda,\mu}$ in Vergleich stellen.

Für $n=2$ haben wir die drei Teilwerte $\sigma_{01}, \sigma_{10}, \sigma_{11}$, deren vierte Potenzen zur zweiten Stufe gehören. Wir ziehen die in I p. 628 (1) definierten Modulformen zweiter Stufe vierter Dimension λ_3, λ_4 heran und betrachten insbesondere das Product $\sigma_{01}^4\lambda_4^{-1}$, welches eine gegenüber der Operation S invariante Modulfunction zweiter Stufe darstellt. Selbige wird sich bereits auf dem zweiten Teilungspolygon**) betrachten lassen, welch' letzteres zwei Spitzen $\omega=0, i\infty$ hat. $\sigma_{01}^4\lambda_4^{-1}$ ist nun entweder mit einer Constanten identisch oder wird in besagten zwei Spitzen 0 bez. ∞. Von beiden Fällen findet aber ersterer statt, da man -8 als Näherungswert von $\sigma_{01}^4\lambda_4^{-1}$ bei $\omega=i\infty$ findet. Wir haben also die Relation $\sigma_{01}^4=-8\lambda_4$, und wenn wir auf selbige erst T, sodann aber auf die entspringende Formel S ausüben, kommt als Gesamtdarstellung unserer drei Teilwerte:

$$\sigma_{01}^4=-8\lambda_4,\quad \sigma_{10}^4=8\lambda_3,\quad \sigma_{11}^4=-8(\lambda_3-\lambda_4). \tag{1}$$

Unmittelbare Folgen aus (1) sind die Relationen:

$$\sigma_{01}^4+\sigma_{10}^4+\sigma_{11}^4=0, \tag{2}$$

$$\lambda(\omega)=-\left(\frac{\sigma_{10}}{\sigma_{01}}\right)^4,\quad 1-\lambda(\omega)=-\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{01}}\right)^4. \tag{3}$$

---

*) Es verdient betont zu werden, dass demgegenüber die in (8) gegebenen Modulfunctionen $\sqrt[12]{\Delta}\cdot\sigma_{\lambda,\mu}$ *ganze* algebraische Functionen von J sind.

**) Wir benannten schon in einer Note des § 7 (p. 20) als n^{tes} Teilungspolygon denjenigen n^{ten} Ausschnitt aus dem Gesamtpolygon n^{ter} Stufe, welcher in den Fundamentalbereich der Operation S entfällt.

Mit Hinblick auf (7) § 9 finden wir unmittelbar den in I p. 678 ausgesprochenen Satz bestätigt, dass $\sqrt[4]{\lambda}$, $\sqrt[4]{1-\lambda}$ das Modulsystem einer ausgezeichneten Γ_{96} achter Stufe bilden, und erkennen jetzt in (2) direct die homogen geschriebene Gleichung der bereits l. c. namhaft gemachten Normalcurve C_4 der Γ_{96}.

Die zweiten Teilwerte $\sigma_{\lambda,\mu}$ haben wir übrigens bereits I p. 161 betrachtet und entnehmen aus den damaligen Formeln (4) die nachfolgenden Beziehungen zu den Nullwerten der drei geraden ϑ-Functionen:

$$(4)\qquad \sigma_{01} = \frac{-\vartheta_2}{\sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[8]{\Delta}},\quad \sigma_{10} = \frac{-i\vartheta_0}{\sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[8]{\Delta}},\quad \sigma_{11} = \frac{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\vartheta_3}{\sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[8]{\Delta}}.$$

Führen wir auf der andern Seite durch I p. 665 (3) an Stelle von λ die Moduln k, k' der überlieferten Theorie der elliptischen Functionen ein, so setzen sich (2) und (3) in die sehr bekannten Formeln um:

$$(5)\qquad \begin{gathered} \vartheta_0^4 + \vartheta_2^4 = \vartheta_3^4, \\ k^2 = \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4},\qquad k'^2 = \frac{\vartheta_0^4}{\vartheta_3^4}. \end{gathered}$$

Wir erledigen sogleich auch noch $n = 3$, wo die Zahl der wesentlich verschiedenen Teilwerte vier ist. Unter Benutzung des I p. 630 (5) gegebenen Modulsystems betrachten wir $(\sigma_{01}\xi_4)^3$ auf dem dritten Teilungspolygon, wo wir in bekannter Weise den Ansatz $(\sigma_{01}\xi_4)^3 = a(\xi^3 - 1)^\nu$ haben. Die Auswertung bei $\omega = i\infty$ giebt $a = -3\sqrt{3}$, $\nu = -1$, und von da aus gewinnen wir unter wiederholter Anwendung der homogenen Operationen T und S die vier gewünschten Darstellungen:

$$(6)\qquad \begin{gathered} \sigma_{10}^3 = \frac{\xi_3 - \xi_4}{-i\sqrt[3]{\Delta}},\quad \sigma_{11}^3 = \frac{\varrho^2\xi_3 - \xi_4}{-i\sqrt[3]{\Delta}},\quad \sigma_{12}^3 = \frac{\varrho\xi_3 - \xi_4}{-i\sqrt[3]{\Delta}}, \\ \sigma_{01}^3 = -\frac{\xi_4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\Delta}}. \end{gathered}$$

Indem wir die drei ersten dieser Formeln durch die vierte dividieren, entspringen folgende merkwürdige Darstellungen des Hauptmoduls ξ durch die dritten Teilwerte*):

$$(7)\qquad \xi - 1 = i\sqrt{3}\left(\frac{\sigma_{10}}{\sigma_{01}}\right)^3,\quad \varrho^2\xi - 1 = i\sqrt{3}\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{01}}\right)^3,\quad \varrho\xi - 1 = i\sqrt{3}\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{01}}\right)^3.$$

---

*) Diese Formeln sind zuerst von Hrn. Bianchi auf anderem Wege gewonnen worden; man sehe dessen Arbeit: *Über die Normalformen dritter und fünfter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung,* Math. Ann. Bd. 17 (1880).

Aus (7) wiederum entnehmen wir die Bestätigung des I p. 678 aufgestellten Satzes, dass $\sqrt[3]{\xi - 1}$, $\sqrt[3]{\xi - \varrho}$, $\sqrt[3]{\xi - \varrho^2}$ Congruenzmoduln neunter Stufe sind und ein volles Modulsystem für die bezügliche Hauptcongruenzgruppe bilden. — Es hat sich durch diese Betrachtungen herausgestellt, *dass bei $n = 2$ und 3 die $\sigma_{\lambda,\mu}$ in der That die einfachsten Moduln ihrer Stufen unmittelbar ergeben.*

§ 12. Specialbetrachtung der $\sigma_{\lambda,\mu}$ für $n = 5$ und 7. Verallgemeinerung.

Bei $n = 5$ würden wir wieder ein einzelnes $\sigma_{\lambda,\mu}$ durch einen geeigneten Zusatzfactor zu einer Modulfunction fünfter Stufe normieren können, um diese dann als rationale Function von ζ darzustellen. Aber man findet bei einer derartigen Untersuchung, dass sich jetzt das einzelne $\sigma_{\lambda,\mu}$ bei weitem nicht mehr so einfach verhält, wie bei $n = 2$ und $n = 3$; es ist vielmehr charakteristisch, dass wir die von I her bekannten einfachsten Moduln fünfter Stufe erst dadurch wiedererlangen, dass wir die $\sigma_{\lambda,\mu}$ in merkwürdig gebaute Producte vereinen*).

Unsere Moduln ζ_α, A_γ der fünften Stufe verhielten sich gegenüber der speciellen parabolischen Substitution S besonders einfach. Indem wir also von σ-Producten ausgehen wollen, von denen dasselbe gilt, bilden wir uns etwa zuvörderst den Ausdruck:

$$\sigma_{10}\sigma_{11}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{14}. \tag{1}$$

Bei $\omega = i\infty$ geht derselbe über in $-i\varepsilon\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^5 r^{-\frac{2}{5}}$, wie aus (6) p. 27 leicht folgt. Multiplicieren wir (1) sonach mit der in I p. 631 (9) definierten Modulform ζ_4, die bei $\omega = i\infty$ zu $\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^5 r^{\frac{2}{5}}$ wird und der Dimension (-5) angehört, so kommt eine der fünften Stufe adjungierte Modulfunction, welche der Bedingung

$$\lim_{\omega = i\infty} (\sigma_{10}\sigma_{11}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{14} \cdot \zeta_4) = -i\varepsilon \tag{2}$$

genügt. Durch eine ganz analoge Betrachtung folgt:

$$\lim_{\omega = i\infty} (\sigma_{20}\sigma_{21}\sigma_{22}\sigma_{23}\sigma_{24} \cdot \zeta_3) = -i\varepsilon^2, \tag{3}$$

eine Formel, die man übrigens auch durch Ausübung einer modulo 5 mit $\begin{pmatrix}2, & 0\\ 0, & 3\end{pmatrix}$ congruenten Modulsubstitution aus (2) herleiten kann.

*) Es stimmt dies wiederum überein mit der Tendenz der p. 9 gen. Abhandlung des Hrn. Kiepert, sowie anderweitiger Untersuchungen desselben Verfassers; wir werden auf dieselben später noch ausführlicher zurückkommen.

Die fünften Potenzen der in (2) und (3) betrachteten Modulfunctionen gehören jedenfalls der fünften Stufe an, und da sie eben vermöge (2) und (3) zugleich gegenüber der Substitution S unverändert bleiben, so lassen sie sich bereits vollständig auf dem fünften Teilungspolygon betrachten (cf. Fig. 83 I p. 355). Dieses Polygon F_{12} hat (geschlossen gedacht) vier Punkte c, die von den Spitzen $\omega = i\infty$, 0, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}$ herrühren; nur in diesen vier Stellen c können Null- oder Unstetigkeitspunkte unserer Functionen liegen. Aber im ersten Punkte $c(i\infty)$ bleiben zufolge (2) und (3) beide endlich und nicht-verschwindend, und das Gleiche gilt auch an der dritten Stelle $c(\frac{2}{5})$, da sich nach I p. 587 hierselbst die eine unserer Functionen gerade so verhält, als die andere in $c(i\infty)$. Jetzt bemerke man, dass sich $\sigma_{\lambda,\mu}$ bei $\omega = 0$ so verhält wie $\sigma_{\mu,-\lambda}$ bei $\omega = i\infty$, und dass überdies das Verschwinden oder Unendlichwerden eines $\sigma_{\lambda,\mu}$ ausschliesslich durch den ersten der unteren Indices bestimmt wird. Der Quotient unserer beiden Functionen (2), (3) wird also in $c(0)$ endlich bleiben, und dasselbe gilt dann wieder in $c(\frac{1}{2})$, da der Übergang von der einen Stelle zur anderen von constanten Factoren abgesehen nur wieder auf eine Permutation der beiden Functionen hinauskommt. Man setze jetzt, unsere beiden Functionen wären in $c(0)$ im gleichen Grade zu Null geworden, so müsste dasselbe in $c(\frac{1}{2})$ stattfinden, und sie hätten auf dem Teilungspolygon wohl Nullpunkte, aber keinen Unstetigkeitspunkt. Da sie aus demselben Grunde in $c(0)$ nicht ∞ sein können, so bleibt nichts übrig, als dass sie mit Constanten identisch sind, und also folgt aus (2) und (3):

$$(4)\qquad \prod_{\mu=0}^{4}\sigma_{1,\mu} = -i\varepsilon\zeta_4^{-1},\quad \prod_{\mu=0}^{4}\sigma_{2,\mu} = -i\varepsilon^2\zeta_3^{-1},$$

womit sich unsere am Eingang des Paragraphen gemachte Bemerkung bestätigt hat.

Als Darstellung des Hauptmoduls ζ durch die $\sigma_{\lambda,\mu}$ findet sich so*):

$$(5)\qquad \zeta = \varepsilon\prod_{\mu=0}^{4}\left(\frac{\sigma_{1,\mu}}{\sigma_{2,\mu}}\right).$$

Um einige sich anschliessende Gleichungen zu entwickeln, knüpfen wir an den Umstand, dass das Product aller zwölf verschiedenen fünften $\sigma_{\lambda,\mu}$ leicht ersichtlich bis auf einen Factor mit Δ^{-1} übereinstimmen muss; thatsächlich findet sich durch gewohnte Näherungsrechnung bei $\omega = i\infty$ die Relation:

*) Auch diese Formel ist von Hrn. Bianchi l. c. von andrer Seite her entwickelt worden.

(6) $$\varepsilon^2 \prod_{\lambda,\mu} \sigma_{\lambda,\mu} = \frac{-\sqrt{5}}{\Delta}.$$

Spalten wir hier die beiden Producte (4) ab und ersetzen sie durch ihre in (4) gegebenen Werte, so kommt:

$$\sigma_{01}\sigma_{02} = \frac{\zeta_3\zeta_4\sqrt{5}}{\Delta} = \zeta_1\zeta_2\sqrt{5},$$

woraus unter Gebrauch der Bezeichnungen von I p. 643 sich ergiebt:

(7) $$\sigma_{01}\sigma_{02} = -\mathsf{A}_0\sqrt{5}.$$

Die ausführliche Begründung dieser für $n = 5$ gegebenen Formeln gestattet in dem nun noch zu besprechenden Falle $n = 7$ sehr viel grössere Kürze. Indem wir hier einen ganz analogen Gedankengang einschlagen, bilden wir uns die vier Producte:

$$\sigma_{01}\sigma_{02}\sigma_{03}, \qquad \prod_{\mu=0}^{6} \sigma_{\alpha,\mu}, \qquad (\alpha = 1, 2, 4),$$

von denen wir zuvörderst die drei letzten betrachten. Das einzelne unter ihnen ist von der Dimension 7, und da die zu $n = 7$ gehörenden z_α und A_γ (cf. I p. 692 u. f.) den Dimensionen -2 bez. $+3$ angehören, sind die drei Grössen

(8) $$\Delta\mathsf{A}_0 z_{\alpha^2}^{-1} \cdot \prod_{\mu=0}^{6} \sigma_{\alpha,\mu}$$

der siebenten Stufe adjungierte Modulfunctionen. Zufolge leichter Rechnung erfüllen dieselben die Bedingung:

(9) $$\lim_{\omega=i\infty}\left(\Delta\mathsf{A}_0 z_{\alpha^2}^{-1} \cdot \prod_{\mu=0}^{6} \sigma_{\alpha,\mu}\right) = -i\varepsilon^{-2\alpha};$$

sie bleiben dieserhalb gegenüber S invariant und lassen sich also bereits vollständig auf dem siebenten Teilungspolygon untersuchen, dessen eine Hälfte durch Figur 88 I p. 373 gegeben ist. Hier tritt nun eine Betrachtung ein, die bis ins einzelne der soeben bei $n = 5$ durchgeführten gleicht, und wir finden am Schlusse derselben wieder, dass die drei Functionen (8) mit Constanten identisch sein müssen. Die Werte dieser Constanten gehen aus (9) hervor, und wir erhalten also folgende Beziehung der siebenten $\sigma_{\lambda,\mu}$ zu dem Modulsystem z_α siebenter Stufe:

(10) $$i\varepsilon^{2\alpha} \cdot \Delta\mathsf{A}_0 \prod_{\mu=0}^{6} \sigma_{\alpha,\mu} = z_{\alpha^2}(\omega_1, \omega_2).$$

Das Product aller 24 verschiedenen $\sigma_{\lambda,\mu}$ wird mit Δ^{-2} proportional sein, und zwar findet sich genau:

$$\sigma_{01}\sigma_{02}\sigma_{04}\prod_{\alpha}\prod_{\mu}\sigma_{\alpha,\mu} = \frac{i\sqrt{7}}{\Delta^2}. \tag{11}$$

Mit Hülfe von (10) und I p. 720 (2) folgt hieraus:

$$\sigma_{01}\sigma_{02}\sigma_{04} = -\mathsf{A}_0\sqrt{7}, \tag{12}$$

genau analog der soeben bei $n = 5$ aufgetretenen Formel (7). Umgekehrt können wir jetzt an Stelle von (10) setzen:

$$\varepsilon^{3\alpha}\cdot\sigma_{01}\sigma_{02}\sigma_{04}\prod_{\mu=0}^{6}\sigma_{\alpha,\mu} = i\sqrt{7}\,\Delta^{-1}\cdot z_{\alpha^2}(\omega_1, \omega_2), \tag{13}$$

und diese Formeln sind um so bemerkenswerter, als ihnen für $n = 5$, wie man leicht ausrechnet, die Formeln:

$$\begin{aligned} \varepsilon^4\sigma_{01}\sigma_{02}\prod_{\mu=0}^{4}\sigma_{1,\mu} &= -i\sqrt{5}\,\Delta^{-1}\zeta_3(\omega_1, \omega_2), \\ \varepsilon^8\sigma_{01}\sigma_{02}\prod_{\mu=0}^{4}\sigma_{2,\mu} &= -i\sqrt{5}\,\Delta^{-1}\zeta_4(\omega_1, \omega_2) \end{aligned} \tag{14}$$

ersichtlich bis ins einzelne gleichgebildet sind.

Diese augenscheinliche Analogie zwischen $n = 5$ und $n = 7$ legt den Versuch nahe, entsprechende Entwicklungen z. B. für beliebige Primzahlen n an die dort eintretenden $\frac{n^2-1}{2}$ Grössen $\sigma_{\lambda,\mu}$ zu knüpfen. Wir würden in dieser Weise den Formeln (13) und (14) entsprechend ein System von $\frac{n-1}{2}$ Moduln z_α der n^{ten} Stufe, sowie (7) und (12) entsprechend eine einzelne Grösse n^{ter} Stufe A_0 sofort hinschreiben können, und es würde auch nicht schwer halten, eine gruppentheoretische Erörterung über diese Modulformen auf Grund der bezüglichen Entwicklungen in I p. 419 u. f. zu geben. Und nun gehören wirklich die solcherweise aus den $\sigma_{\lambda,\mu}$ zusammengesetzten Modulformen zu den einfachsten und brauchbarsten, deren wir überhaupt im Gesamtverlauf unserer functionentheoretischen Untersuchungen habhaft werden können. Nur lässt uns der hier vorliegende Ansatz, der in der Hauptsache allein von der Aufsuchung der Null- und Unendlichkeitsstellen der Functionen ausgeht, für den allgemeinen Fall n zum guten Teil im Unklaren über die wichtigsten Eigenschaften jener Grössen und über ihre Beziehung zu anderen, gleichfalls bemerkenswerten Functionen der n^{ten} Stufe. Indem wir demnach die Besprechung der $\sigma_{\lambda,\mu}$ (und damit überhaupt der Teilwerte) an dieser Stelle abbrechen, be-

merken wir zum voraus, dass uns jene Moduln s_α und A_0 im folgenden Abschnitt wieder begegnen werden, wo wir zu ihrer Untersuchung wesentlich neue Hülfsmittel zur Hand haben werden*).

An die somit beendete Betrachtung der speciellen Teilung erster Stufe könnten wir nun eine Darstellung der Teilung höherer und also in erster Linie der zweiten Stufe reihen. Wir würden da von den Teilwerten der drei Functionen sin am, cos am, Δ am zu handeln haben und müssten den σ- bez. ϑ_1-Teilwerten offenbar die Teilwerte der drei geraden σ- bez. ϑ-Functionen gegenüberstellen. Eine systematische Darstellung der Eigenschaften dieser Grössen auf Grundlage unserer in Bd. I entworfenen Theorie würde nicht schwierig sein, ist indessen zur Zeit noch nicht ausgeführt worden. Indem wir also von einer solchen Darstellung hier absehen, bemerken wir noch, dass eben diese aus der zweiten Stufe entspringenden Grössen nicht nur in der älteren Literatur, sondern auch in den neueren Arbeiten von Kronecker (Berliner Berichte von 1886) und Weber l. c. ausführliche Berücksichtigung finden.

*) Es mag übrigens schliesslich noch bemerkt werden, das auch die $\wp_{\lambda,\mu}$, $\wp'_{\lambda,\mu}$ in einfacher Weise durch die $\sigma_{\lambda,\mu}$ dargestellt werden können; man vergl. Klein „Normalcurven", p. 15, oder auch die bezüglichen Formeln im zweiten Kapitel des nächsten Abschnitts.

Zweites Kapitel.

Die Transformation n^{ter} Ordnung erster Stufe und die Transformationsgleichungen erster Stufe*).

Neben der Teilung n^{ten} Grades hat in der Theorie der elliptischen Functionen seit langer Zeit die sogenannte Transformation n^{ter} Ordnung eine wichtige und umfassende Rolle gespielt. Auch sie versieht uns, wie wir schon andeuteten, mit einem Mittel, Modulfunctionen höherer Stufe aus solchen niederer Stufen herzustellen. Inzwischen verfolgen wir die hieraus für unsere ferneren Zwecke entspringenden Ergebnisse vorab noch nicht weiter; *es soll sich vielmehr in erster Linie darum handeln, die überlieferte Transformationstheorie ihrem Wesen nach mit unseren von Bd. I gelieferten Hülfsmitteln zur Darstellung zu bringen.* Wir werden dabei den Gedankengang genau so wie im voraufgehenden Kapitel wählen; man kann die Transformation n^{ter} Ordnung auf Grössen der ersten und andrerseits auf Grössen höherer Stufe anwenden; dem ersteren Zwecke ist das gegenwärtige Kapitel ausschliesslich gewidmet**). Auch im einzelnen ist der Gedankengang wie vorhin: wir werden die Transformation n^{ter} Ordnung in gruppentheoretischer, sodann in functionentheoretischer Hinsicht untersuchen und endlich

---

*) Für das zweite Kapitel ist grundlegend die bereits öfter genannte Arbeit von Hrn. Klein, *Über die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades,* Math. Ann. Bd. 14 (1878). Unter den neueren Arbeiten kommt für uns namentlich die inhaltreiche Abhandlung von Hrn. Kiepert in Betracht: *Über die Transformation der elliptischen Functionen bei zusammengesetztem Transformationsgrade,* Math. Ann. Bd. 32 (1887); hieran schliesst sich die weitere Abhandlung des gleichen Verfassers: *Über gewisse Vereinfachungen der Transformationsgleichungen in der Theorie der elliptischen Functionen,* Math. Ann. Bd. 37 (1890).

**) Indem wir also die Betrachtung der höheren Stufen hinausschieben, werden wir auch erst späterhin auf die älteren Arbeiten über die Transformationstheorie Bezug nehmen können, da diese ja durchgängig an den Legendre'schen Integralmodul beziehungsweise die aus ihm durch Wurzelziehung entspringenden Congruenzmoduln anknüpfen.

Einzelbetrachtungen folgen lassen, deren Zweck vielfach der ist, den Leser auf dem ausgedehnten, hier in Betracht kommenden Gebiete zunächst einigermassen zu orientieren.

§ 1. Erste Einführung der Transformation n^{ter} Ordnung erster Stufe und gruppentheoretische Untersuchung derselben. Die functionentheoretischen Repräsentanten.

Wir verstehen unter $F(\omega_1, \omega_2)$ eine beliebige Modulform der ersten Stufe (oder auch eine doppeltperiodische Function der ersten Stufe, auf welche die zunächst durchzuführenden gruppentheoretischen Betrachtungen gerade so gut passen, wie für die Modulformen). Man setze alsdann neben die Grösse $F(\omega_1, \omega_2)$ als neue Function der beiden Variabelen ω_1, ω_2 die folgende:

$$F'(\omega_1, \omega_2) = F\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right) \tag{1}$$

und benenne den Übergang von F zu F' als *Transformation* n^{ter} *Ordnung erster Stufe**). Dieser letztere Zusatz betrifft aber nicht die Definition der Transformation n^{ter} Ordnung (die wir späterhin für die Moduln höherer Stufe genau so wählen werden); er zielt vielmehr ab auf die durchzuführende Theorie dieser Transformation n^{ter} Ordnung, die für die Functionen bez. Formen der ersten Stufe ihren besonderen und zwar wieder einfachsten Charakter gegenüber den höheren Stufen zeigt.

Den transformierten Modul erster Stufe $F\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right)$ unterwerfen wir zuerst der näheren *gruppentheoretischen* Betrachtung. Wir üben zu diesem Zwecke eine beliebige Modulsubstitution auf ω_1 und ω_2 aus und fragen, ob sich eine Untergruppe finden lässt, welcher $F\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right)$ als Modulform angehört. Deren Substitutionen würden also der Bedingung genügen müssen:

$$F\left(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \frac{\gamma\omega_1 + \delta\omega_2}{n}\right) = F\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right),$$

die wir übrigens sofort in die zweckmässigere Gestalt umschreiben:

$$F\left(\alpha\omega_1 + n\beta \cdot \frac{\omega_2}{n}, \frac{\gamma}{n} \cdot \omega_1 + \delta \cdot \frac{\omega_2}{n}\right) = F\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right). \tag{2}$$

Hier ist offenbar auf die Argumente $\omega_1, \frac{\omega_2}{n}$ die lineare Substitution mit den vier Coefficienten $\alpha, n\beta, \frac{1}{n}\gamma, \delta$ angewandt, und indem wir noch die um der Allgemeinheit willen notwendige Annahme machen,

*) Vgl. die vorläufigen Angaben in Formel (2) p. 7.

dass $F(\omega_1, \omega_2)$ bei keinen anderen linearen Substitutionen, als denen der Modulgruppe, unverändert bleibt, entspringt als hinreichende und notwendige Bedingung für das Bestehen von (2) die folgende:

$$\gamma \equiv 0, \quad (\text{mod. } n). \tag{3}$$

Ein transformierter Modul (1) *ist demgemäss eine* (*algebraische*) *Modulform der n^{ten} Stufe; sie bleibt des näheren bei allen durch* (3) *charakterisierten Substitutionen unverändert, die nach* I *p.* 461 *eine homogene Congruenzgruppe $\Gamma_{\psi(n)}$ des Index $\psi(n)$ bilden.* Diese $\Gamma_{\psi(n)}$ enthält offenbar auch die homogene Operation T^2. Beim Fortgang zu den nichthomogenen Substitutionen bewahrt $\Gamma_{\psi(n)}$ demgemäss ihren Index $\psi(n)$ und geht dann direct in die I p. 461 genannte Gruppe der Substitutionen:

$$v(\omega) \equiv \frac{\alpha\omega + \beta}{\alpha^{-1}}, \quad (\text{mod. } n) \tag{4}$$

über. Dieserhalb gilt unsere Erörterung ohne jede Modification für die Modul*functionen* erster Stufe; es ist das einfach der Specialfall, dass die Dimension von $F(\omega_1, \omega_2)$ die nullte ist. Dass aber die transformierten Grössen (1) in der That *algebraische* Modulformen sind (wie wir schon andeuteten), wird durch späterhin zur Besprechung kommende Figuren zur unmittelbaren Evidenz gebracht.

Nach dem gewonnenen Resultat ist $F\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right)$ eine unter $\psi(n)$ gleichberechtigten Modulformen:

$$F^{(\nu)}(\omega_1, \omega_2) = F\left(\alpha_\nu\omega_1 + \beta_\nu\omega_2,\ \frac{\gamma_\nu\omega_1 + \delta_\nu\omega_2}{n}\right), \tag{5}$$

die wir offenbar dadurch herstellen werden, dass wir $\begin{pmatrix}\alpha_\nu, & \beta_\nu\\ \gamma_\nu, & \delta_\nu\end{pmatrix}$ ein Repräsentantensystem der $\Gamma_{\psi(n)}$ der Operationen (4) durchlaufen lassen. *Diese $\psi(n)$ Grössen $F', F'', \ldots, F^{(\psi)}$ gehören dann zu den $\psi(n)$ gleichberechtigten Congruenzgruppen $\Gamma_{\psi(n)}$.*

Um der so bezeichneten Sachlage noch besser gerecht zu werden, wollen wir die Transformation n^{ter} Ordnung insofern von vornherein etwas allgemeiner fassen, *dass wir als transformierte Moduln F überhaupt alle Formen:*

$$F\left(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2,\ \frac{\gamma\omega_1 + \delta\omega_2}{n}\right) \tag{6}$$

erklären. Da werden sich dann alle diese den unendlich vielen Modulsubstitutionen entsprechenden Moduln (6) offenbar in $\psi(n)$ Classen anordnen, wobei alle Formen der einzelnen Classe als Functionen der ω_1, ω_2 betrachtet identisch sind. Eine einzelne Form aus jeder Classe wird letztere demnach repräsentieren können, und so mögen wir als Repräsentanten der ν^{ten} Classe die in (5) gegebene Form $F^{(\nu)}$ wählen.

Wir haben unserer Betrachtung, um sie zu erleichtern, durch Voranstellung der Form F sogleich eine concrete Basis gegeben. Nichts hindert, von dieser Voraussetzung zu abstrahieren. *Offenbar bezeichnen wir dann als Transformation n^{ter} Ordnung den Übergang von ω_1, ω_2 zu*

$$(7) \qquad \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega_2' = \frac{\gamma\omega_1 + \delta\omega_2}{n}$$

und werden immer bezüglich der Modulgruppe äquivalente ω_1', ω_2' in eine Classe vereinen. Dabei entspringen nur $\psi(n)$ verschiedene Classen, und wir können als deren Repräsentanten die $\psi(n)$ Paare:

$$(8) \qquad \omega_1^{(\nu)} = \alpha_\nu\omega_1 + \beta_\nu\omega_2, \quad \omega_2^{(\nu)} = \frac{\gamma_\nu\omega_1 + \delta_\nu\omega_2}{n}$$

heranziehen.

Für den Fall eines primzahligen $n = q$ können wir die $\psi(n) = q + 1$ Repräsentanten ohne Mühe fertig angeben. Hier haben wir nämlich (unter zweckmässiger Anpassung der Bezeichnungsweise an die Verhältnisse) als Repräsentanten der Γ_{q+1} der Operationen (4):

$$V_\infty(\omega) = \omega, \quad V_\nu(\omega) = \frac{-1}{\omega + \nu}, \quad (\nu = 0, 1, \ldots, q-1),$$

was man leicht durch Rechnung bestätigt. Als die $(q + 1)$ Repräsentanten (8) ergeben sich demnach:

$$(9) \qquad \omega_1^{(\infty)} = \omega_1, \quad \omega_2^{(\infty)} = \frac{\omega_2}{q}; \quad \omega_1^{(\nu)} = -\omega_2, \quad \omega_2^{(\nu)} = \frac{\omega_1 + \nu\omega_2}{q},$$

und es folgen für diesen Fall als die $(q + 1)$ gleichberechtigten Moduln (5):

$$(10) \qquad F^{(\infty)} = F\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{q}\right), \quad F^{(\nu)} = F\left(-\omega_2, \frac{\omega_1 + \nu\omega_2}{q}\right).^{*)}$$

Wir haben endlich noch die Stellung der $\psi(n)$ Untergruppen $\Gamma_{\psi(n)}$ gegenüber einigen anderen Congruenzgruppen der n^{ten} Stufe in Kürze zu charakterisieren. Vor allem wollen wir die ausgezeichnete Congruenzgruppe n^{ter} Stufe betrachten, welche den gemeinsamen Bestandteil aller $\Gamma_{\psi(n)}$ ausmacht. Man transformiere die $\Gamma_{\psi(n)}$ der Operationen (4) durch T; die entspringende gleichberechtigte $\Gamma'_{\psi(n)}$ ist durch $\beta \equiv 0$ gegeben. Die Operationen der gesuchten Untergruppe erfüllen sonach die Bedingung $\beta \equiv \gamma \equiv 0$, (mod. n). So oft aber in einer solchen Substitution α von δ modulo n verschieden ist, wird dieselbe durch S in eine Substitution mit $\beta \gtrless 0$, (mod. n) transformiert. Nur erst die Substitutionen

*) Cf. Klein l. c. p. 130.

(11) $$v(\omega) \equiv \frac{\alpha\omega}{\alpha}, \quad (\text{mod. } n)$$

bilden eine ausgezeichnete Untergruppe, und dass diese die gesuchte Gruppe ist, bemerkt man sofort. Die Anzahl incongruenter Substitutionen (11) ist nun offenbar ($n > 2$ vorausgesetzt*)) gleich der halben Anzahl incongruenter Lösungen der Congruenz $x^2 \equiv 1$, (mod. n), welch' letztere Anzahl in den Elementen der Zahlentheorie**) bestimmt wird. *Daraufhin finden wir als Index der den $\Gamma_{\psi(n)}$ gemeinsamen ausgezeichneten Untergruppe:*

(12) $$\frac{n\varphi(n)\psi(n)}{2^{\varkappa+\sigma}} = \frac{\mu(n)}{2^{\varkappa+\sigma-1}},$$

unter $\varkappa$ die Anzahl der verschiedenen in n enthaltenen ungeraden Primzahlen verstanden, unter σ aber 2, 1 oder 0, je nachdem n durch 8 teilbar oder das Vierfache einer ungeraden Zahl oder endlich keines von beiden ist.

Man wolle endlich noch das Verhältnis betrachten, in welchem die $\psi(n)$ Gruppen $\Gamma_{\psi(n)}$ zu den $\psi(n)$ bei den Teilwerten eintretenden Gruppen $\Gamma_{\varphi(n)\psi(n)}$ stehen. Diese beiden Reihen von je $\psi(n)$ Gruppen sind einander zugeordnet, so dass die einzelne $\Gamma_{\varphi\psi}$ in einer bestimmten Γ_{ψ} als Untergruppe des Index $\varphi(n)$ enthalten ist. Die Bildung symmetrischer Functionen jener $\varphi(n)$ zur einzelnen $\Gamma_{\varphi\psi}$ gehörenden Teilwerte stellt sich uns jetzt also in einem neuen Lichte dar: Durch Processe dieser Art wird man offenbar den Übergang von den Teilwerten zu den transformierten Moduln desselben n zu suchen haben***).

§ 2. Das Transformationspolygon n^{ter} Ordnung.

Wie wir im vorigen Kapitel das Polygon der $\Gamma_{\frac{1}{2}\varphi\psi}$ der nichthomogenen Substitutionen $\omega' \equiv \omega + \beta$, (mod. n) als das n^{te} Teilungspolygon bezeichneten, so heisse jetzt das Polygon der speciellen $\Gamma_{\psi(n)}$ der Substitutionen:

(1) $$v(\omega) \equiv \frac{\alpha\omega + \beta}{\alpha^{-1}}, \quad (\text{mod. } n)$$

Transformationspolygon n^{ter} Ordnung $F_{\psi(n)}$ oder kurz n^{tes} Transformationspolygon. Bei der Art, wie wir Γ_{ψ} unter den ψ gleichberechtigten Gruppen auswählten, besteht dieses Polygon aus $\psi(n)$ Doppeldreiecken, die offenbar durchgehends zwischen den beiden in $\omega = \pm \frac{1}{2}$ senkrecht stehenden Geraden der Modulteilung angeordnet werden können.

*) Für $n = 2$ erkennt man sofort die Hauptcongruenzgruppe als die gesuchte ausgezeichnete Untergruppe.

**) Cf. Dirichlet-Dedekind, Zahlentheorie p. 87 der dritten Aufl.

***) Man vgl. hierzu wieder die Arbeiten von Hrn. Kiepert, z. B. die erste der am Anfang des vorliegenden Kapitels genannten Abhandlungen desselben.

Das Teilungspolygon $F_{\frac{1}{2}\varphi\psi}$ wird sich aus $\frac{1}{2}\varphi$ Transformationspolygonen F_ψ aufbauen lassen, und zwar wird dem für die geschlossene Fläche $F_{\frac{1}{2}\varphi\psi}$ eine *reguläre* Einteilung in $\frac{1}{2}\varphi$ Bereiche $F_{\psi(n)}$ entsprechen, dem Umstande zufolge, dass die $\Gamma_{\frac{1}{2}\varphi\psi}$ innerhalb der Γ_ψ ausgezeichnet ist. Die entsprechende endliche $G_{\frac{1}{2}\varphi}$ von Transformationen der $F_{\frac{1}{2}\varphi\psi}$ in sich ist alsdann, wie man auf Grund früherer Untersuchungen leicht verificiert, stets und nur in den Fällen cyclisch, wenn es für das gerade betrachtete n zum Exponenten $\frac{1}{2}\varphi(n)$ gehörende Zahlen giebt.

Für $n = 2$ fallen Transformations- und Teilungspolygon zusammen. Dasselbe gilt für diejenigen weiteren n, bei denen $\varphi(n) = 2$ ist, d. i. für $n = 3, 4, 6$. Die betreffenden Figuren erhält man für $n = 3, 4$ einfach dadurch, dass man ein geeignetes Drittel bez. Viertel aus den bezüglichen Gesamtpolygonen (Fig. 81, 82 I p. 354) ausschneidet. Für $n = 6$ gewinnt man $F_{\frac{1}{2}\varphi\psi} = F_\psi$ direct durch Verdoppelung der Fig. 85 I p. 367. Das Polygon $F_{\psi(5)}$ wolle man in Fig. 96 I p. 635 nachsehen, $F_{\psi(7)}$ desgleichen in Fig. 104 I p. 742. Man wird für die beiden letzteren Fälle $q = 5, 7$ leicht die betreffenden Teilungspolygone mit Hülfe der zugehörigen in I gegebenen Figuren aus zwei bez. drei Polygonen F_ψ zusammensetzen. Übrigens erkennt man von $F_{\psi(5)}$ und $F_{\psi(7)}$ aus sehr leicht die Gestalt von F_ψ für beliebige Primzahl $n = q$: F_{q+1} wird da offenbar am zweckmässigsten aus den $(q+1)$ Doppeldreiecken:

$$(2) \qquad 1,\ T,\ TS^{\pm 1},\ TS^{\pm 2},\ \ldots,\ TS^{\pm\frac{q-1}{2}}$$

zusammenzusetzen sein, deren freie Randcurven man natürlich dann noch in richtiger Weise einander zuzuordnen hat. Durch die Operation T geht dieses Polygon F_ψ in das F'_ψ der Dreiecke:

$$(3) \qquad T,\ 1,\ S^{\pm 1},\ S^{\pm 2},\ \ldots,\ S^{\pm\frac{q-1}{2}}$$

über, das also zu der mit Γ_ψ gleichberechtigten Untergruppe $\Gamma'_\psi = T\Gamma_\psi T$ gehören würde und gleichfalls eine ganz besonders übersichtliche Gestaltung darbietet*).

Das Transformationspolygon $F_{\psi(n)}$ ist für jedes n in Bezug auf die imaginäre ω-Axe sich selbst symmetrisch; die bezügliche geschlossene Fläche F_ψ gestattet also stets eine der Modulsubstitution zweiter Art A correspondierende symmetrische Umformung in sich, ein Umstand, den wir späterhin bei der functionentheoretischen Untersuchung zu ver-

*) Von diesen Polygonen F'_ψ ging Hr. Klein ursprünglich in der am Eingang des Kapitels genannten Arbeit aus, und von hieraus eben entstand die allgemeine Theorie der Fundamentalpolygone; vgl. die Fig. 9, 11, 13 daselbst.

werten haben werden. Ungleich interessanter ist übrigens eine Transformation *erster* Art, welche gleichfalls bei allgemeinem n das Polygon F_ψ und entsprechend die geschlossene Fläche F_ψ in sich überführt, eine Thatsache, vermöge deren wir überhaupt die Transformation n^{ter} Ordnung hätten einführen können.

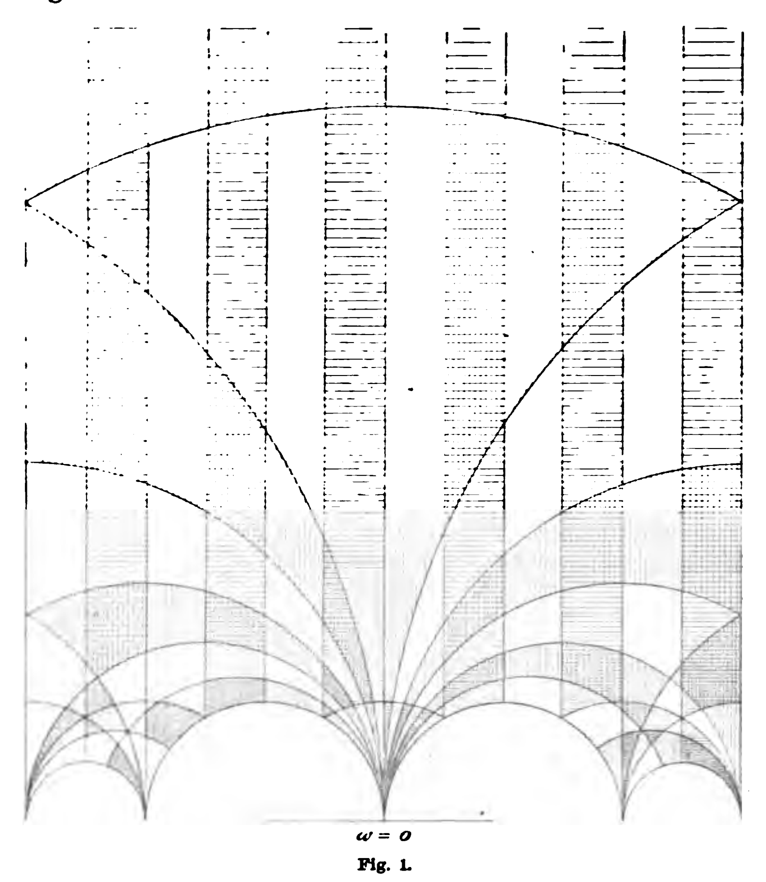


Fig. 1.

Um hierauf näher einzugehen, wolle man die Modulsubstitution $V(\omega) = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ durch die auch späterhin noch sehr häufig zu gebrauchende lineare Substitution:

$$W(\omega) = -\frac{1}{n\omega} = \frac{-(\sqrt{n})^{-1}}{\sqrt{n}\,\omega} \tag{4}$$

transformieren. Wir finden als transformierte Operation:

$$V'(\omega) = W^{-1}VW(\omega) = \frac{-\delta\omega + n^{-1}\gamma}{n\beta\omega - \alpha}, \tag{5}$$

so dass V' stets und nur dann selbst wieder eine Modulsubstitution ist,

wenn V unserer $\Gamma_{\psi(n)}$ angehörte. Man kann dies bei der Gestalt von (5) des näheren auch dahin ausdrücken, *dass die Modulgruppe* Γ *durch* (4) *in eine Gruppe* $\Gamma' = W^{-1}\Gamma W$ *transformiert wird, und dass dabei als grösster gemeinsamer Bestandteil von* Γ *und* Γ' *unsere* $\Gamma_{\psi(n)}$ *eintritt.*

Insofern jetzt Γ_ψ mit W vertauschbar ist, *wird nach bekannten Sätzen das Polygon* F_ψ, *von erlaubter Abänderung abgesehen, durch* W *in sich transformiert.* Dabei wird man übrigens nicht erwarten dürfen, dass diese erlaubten Abänderungen, wie bei unseren früheren Untersuchungen, sich immer durch Abtrennung *ganzer* Elementardreiecke bewerkstelligen lassen; vielmehr ist dies bei dem Charakter der Operation W im allgemeinen ausgeschlossen. Freilich gestalten sich die Verhältnisse bei einigen niederen n besonders einfach; man betrachte z. B. die hieroben für $n = 6$ entworfene Fig. 1, wo sich das transformierte Polygon ohne jede Abänderung mit dem ursprünglichen

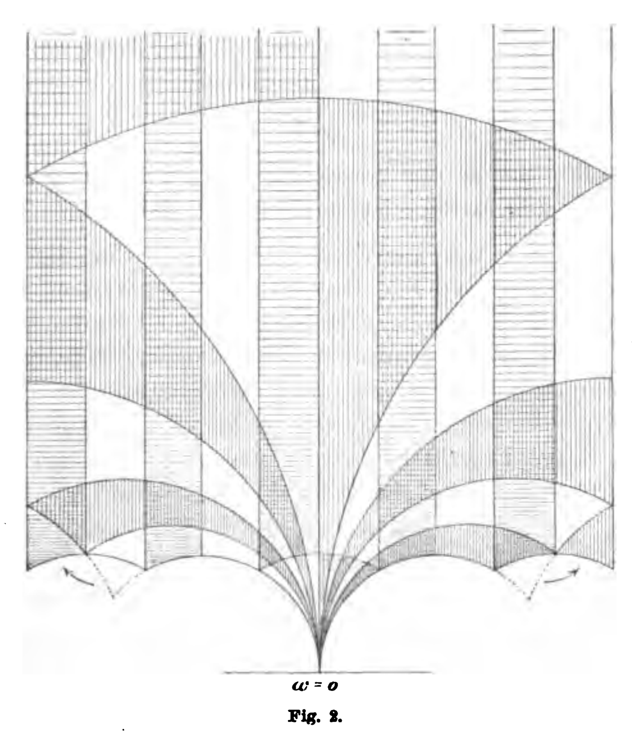


Fig. 2.

deckt; aber schon für $n = 5$ bemerkt man in Fig. 2 die Notwendigkeit von Zerstückungen einzelner Dreiecke*). Zum Verständnis dieser

*) Für $n = 11$ hat Hr. Papperitz die fragliche Figur gezeichnet und näher betrachtet; vgl. dessen Abhandlung „*Untersuchungen über die algebraische Transformation der hypergeometrischen Functionen*" Math. Ann. Bd. 26 (1886).

Figuren, welche berufen sind, gelegentlich noch eine sehr wichtige Rolle bei unseren Überlegungen zu spielen, bemerke man folgendes: Die durch verticale Schraffierung ausgezeichneten Dreiecke bilden das in der ursprünglichen ω-Halbebene gelegene Polygon F_ψ. Indem wir nun $\omega' = W(\omega)$ ausüben und dabei diese Operation in der von I p. 165 ff. her gewohnten Weise als Umformung der ω-Ebene in sich vorstellen, gehen die Dreiecke von F_ψ in die durch horizontale Schraffierung ausgezeichneten Dreiecke der Figur über. Man sieht, dass die letzteren, für sich genommen, in der ω'-Halbebene ein Polygon für die mit Γ_ψ gleichberechtigte Γ'_ψ (gebildet aus ω'-Substitutionen) zusammensetzen; die rechnerische Bestätigung dieser Erscheinung wird man leicht durchführen.

Dass übrigens die $F_{\psi(n)}$ jetzt insgesamt eine $\overline{G}_4$ von Transformationen in sich zulässt (bestehend aus 1, W, A, WA), brauchen wir kaum noch auszusprechen. Die beiden Transformationen W und WA der geschlossenen Fläche in sich werden weiter unten (Kap. 5 dieses Abschn.) zu sehr interessanten zahlentheoretischen Folgerungen verwandt werden.

§ 3. Zweite Einführung der Transformation n^{ter} Ordnung erster Stufe. Die arithmetischen Repräsentanten*).

Bevor wir das nun gewonnene Fundament für die functionentheoretische Besprechung der Transformation verwerten, müssen wir einer anderen Einführung der Transformation n^{ter} Ordnung gedenken, die wir sogleich unter Gebrauch nicht-homogener Substitutionen ableisten. Wenn wir die Ausübung einer Modulsubstitution V als Transformation *erster* Ordnung bezeichnen wollen, so wird man es nur als eine folgerichtige Begriffserweiterung ansehen, *wenn wir als Transformation n^{ter} Ordnung die Ausübung der Substitution:*

$$(1) \qquad \omega' = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}, \quad ad - bc = n$$

mit ganzen Zahlen a, b, c, d der positiven Determinante n erklären. Aufs leichteste sieht man, dass es unendlich viele Substitutionen (1) und also auch für *ein* ursprüngliches ω unendlich viele transformierte ω' giebt; aber wir wollen wieder alle mit einander (bezüglich der Modulgruppe) äquivalenten ω' in eine Classe vereinen. *Eine Classe von Transformationen n^{ter} Ordnung wird alsdann gebildet von allen Substitutionen*

*) Neben den vorhin schon genannten Abhandlungen kommt hier namentlich der in Bd. I oft genannte Brief Dedekind's an Borchardt *„Über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen"* Crelle's Journ. Bd. 83 (1877) in Betracht.

(2) $$\omega' = V\left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d}\right) = \frac{(\alpha a + \beta c)\omega + (\alpha b + \beta d)}{(\gamma a + \delta c)\omega + (\gamma b + \delta d)},$$

bei denen a, b, c, d eine bestimmte Lösung von $ad - bc = n$ vorstellen, V dagegen die gesamte Modulgruppe Γ durchläuft.

Aus der Classe (2) werde jetzt eine einzelne Substitution als Repräsentant ausgewählt, was offenbar durch bestimmte und zweckentsprechende Wahl von V zu bewerkstelligen ist. Der grösste gemeinsame Teiler der beiden Zahlen a und c sei A; wir schreiben alsdann:

(3) $$\gamma = -\frac{c}{A}, \quad \delta = \frac{a}{A},$$

welches offenbar zwei relative Primzahlen sind. Wir nehmen dieselben zum dritten bez. vierten Coefficienten von V, und ein zugehöriges Paar von Coefficienten α, β sei alsdann α_0, β_0; das allgemeinste derartige Paar ist durch

(4) $$\alpha = \alpha_0 - \frac{c}{A}\varepsilon, \quad \beta = \beta_0 + \frac{a}{A}\varepsilon$$

gegeben, wo ε eine beliebige ganze Zahl ist. Führen wir die ganze Zahl D durch die Bedingung $n = AD$ ein, so kommt an Stelle von (2)

$$\omega' = \frac{A\omega + (\alpha_0 b + \beta_0 d) + D\varepsilon}{D},$$

und hier bestimmen wir endlich ε durch die Bedingung

$$0 \leq \alpha_0 b + \beta_0 d + D\varepsilon < D.$$

Da auf diese Weise V eindeutig bestimmt ist, so haben wir als Resultat: *In jeder Classe (2) von Transformationen n^{ter} Ordnung giebt es eine und nur eine Substitution der Form:*

(5) $$\omega' = \frac{A\omega + B}{D}, \quad AD = n, \quad 0 \leq B < D,$$

in welcher die ganzen Zahlen A, B, D die in (5) rechts angehängten Bedingungen erfüllen. Es erscheint zweckmässig, die einzelne Classe durch die ihr angehörige Substitution (5) zu repräsentieren; zugleich wollen wir die so gemeinten Substitutionen kurz als *arithmetische Repräsentanten* bezeichnen, weil sich dieselben nämlich vorzüglich für arithmetische Anwendungen der Transformation n^{ter} Ordnung als brauchbar erweisen.

Um die Anzahl der unterschiedenen Substitutionen (5) zu bestimmen, wird man D alle Teiler der Zahl n durchlaufen lassen, während für stehenden Wert D die Zahl B ein Restsystem modulo D beschreiben muss. *Die Anzahl aller Classen von Transformationen n^{ter} Ordnung ist sonach gleich der Summe aller Teiler der Zahl n, eine zahlen-*

theoretische Function von n, die wir hinfort durch das Symbol $\Phi(n)$ bezeichnen wollen. Die Anzahl der in § 1 aufgestellten Repräsentanten für Transformation n^{ter} Ordnung, die wir (wie schon in der Überschrift von § 1 angedeutet) hinfort als *die functionentheoretischen Repräsentanten* zu bezeichnen haben werden, war demgegenüber $\psi(n)$; es ist das eine im allgemeinen von $\Phi(n)$ verschiedene Zahl. Das nähere Verhältnis des einen zum anderen Repräsentantensystem haben wir demnach nun festzustellen.

§ 4. Beziehung zwischen den functionentheoretischen und den arithmetischen Repräsentanten. Erweiterung der Transformation n^{ter} Ordnung.

Durch eine leichte Betrachtung folgert man, dass der grösste gemeinsame Teiler τ der vier Coefficienten a, b, c, d von (1) § 3 zugleich für die vier Coefficienten aller Substitutionen (2) § 3 den grössten gemeinsamen Teiler abgiebt: *Dieser Teiler τ ist also ein Attribut der ganzen Classe.*

Jetzt hatten die functionentheoretischen Repräsentanten, wenn wir dieselben gleich nicht-homogen schreiben wollen, die Gestalt:

$$\omega^{(\nu)} = n \cdot \frac{\alpha_\nu \omega + \beta_\nu}{\gamma_\nu \omega + \delta_\nu}, \tag{1}$$

wo die rechts angehängte Modulsubstitution ein Repräsentantensystem der oft genannten $\Gamma_{\psi(n)}$ zu durchlaufen hat. Diese Substitution (1) subsumiert sich offenbar unter (1) § 3, und zwar haben wir des näheren $\tau = 1$. *Jedem functionentheoretischen Repräsentanten entspricht sonach ein arithmetischer, dessen τ gleich 1 ist.*

Sind umgekehrt A, B, D irgend drei den Bedingungen $AD = n$, $0 \leq B < D$ genügende positive Zahlen ohne gemeinsamen Teiler > 1, so können wir immer eine Modulsubstitution V ausfindig machen, die der Gleichung:

$$V\left(\frac{A\omega + B}{D}\right) = n \cdot V'(\omega) \tag{2}$$

genügt, unter V' wieder eine Modulsubstitution verstanden. Die linke Seite von (2) lautet nämlich ausführlich geschrieben:

$$V\left(\frac{A\omega + B}{D}\right) = \frac{\alpha A\omega + (\alpha B + \beta D)}{\gamma A\omega + (\gamma B + \delta D)}, \tag{3}$$

und also müssen wir zur Bestimmung von V die Congruenzen:

$$\alpha A \equiv 0, \quad \alpha B + \beta D \equiv 0, \quad (\text{mod. } n) \tag{4}$$

discutieren. Hierbei benenne man mit σ den grössten gemeinsamen Teiler von A und B und verstehe unter ζ_0, ε_0 zwei der Gleichung

$$(5) \qquad \zeta \frac{A}{\sigma} - \varepsilon \frac{B}{\sigma} = 1$$

genügende ganze Zahlen; die allgemeinste Lösung von (5) ist dann:

$$\zeta = \zeta_0 + \eta \frac{B}{\sigma}, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \eta \frac{A}{\sigma},$$

wo die ganze Zahl η willkürlich bleibt. Inzwischen denken wir doch η so bestimmt, dass ε prim gegen σ ist. Dies hat keine Schwierigkeit: Erstlich ist nämlich ε als Lösung von (5) prim gegen alle die Primteiler von σ, die $\frac{A}{\sigma}$ teilen. Spalten wir diese von σ ab, so bleibe σ_0, welch' letztere Zahl nun gegen $\frac{A}{\sigma}$ prim ist. Eben deshalb können wir jetzt η so bestimmen, dass ε relativ prim gegen σ_0 und also gegen σ wird. Man setze nun einfach:

$$\alpha = \varepsilon D, \quad \beta = \sigma = \zeta A - \varepsilon B,$$

womit zwei relative Primzahlen gewonnen sind, die (4) befriedigen. Ein zugehöriges Zahlenpaar γ, δ wählen wir willkürlich und haben dadurch V bestimmt. Unter Einführung der neuen Bezeichnungen

$$\varepsilon = \alpha', \quad \zeta = \beta', \quad \gamma A = \gamma', \quad \gamma B + \delta D = \delta'$$

haben wir vier ganze Zahlen α', β', γ', δ' der Determinante

$$\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = \varepsilon D\delta - (\zeta A - \varepsilon B)\gamma = \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

gewonnen; sie liefern uns ersichtlich die Coefficienten der (2) befriedigenden Substitution V'. *Jedem arithmetischen Repräsentanten vom Teiler $\tau = 1$ ist sonach ein functionentheoretischer Repräsentant zugeordnet.*

Haben wir nunmehr eine Transformation (5) § 3 vom Teiler $\tau > 1$, so erhalten wir durch Fortheben desselben eine solche der Determinante $\frac{n}{\tau^2}$, auf welche direct die soeben durchgeführte Betrachtung passt, insofern ihre drei Coefficienten einen gemeinsamen Teiler > 1 nicht aufweisen. Wir sprechen demnach sogleich den Hauptsatz aus: *Unter den $\Phi(n)$ Classen des vorigen Paragraphen sind stets und nur diejenigen von gleichem τ in unserem Sinne mit einander gleichberechtigt; die Zahl der Classen für das einzelne τ ist $\psi\left(\frac{n}{\tau^2}\right)$, und wir erhalten demnach die zahlentheoretische Relation:*

$$(6) \qquad \Phi(n) = \sum_{\tau} \psi\left(\frac{n}{\tau^2}\right),$$

summiert über alle quadratischen Teiler τ^2 von n. Formel (6) bietet eine gewisse Analogie zur Gleichung (3) p. 10 dar, und in der That knüpfen sich an (6) ähnliche Bemerkungen wie damals an (3) p. 10.

Die Transformation im Sinne des vorigen Paragraphen werden wir als *erweiterte Transformation* n^{ter} *Ordnung* bezeichnen und demgegenüber diejenige des § 1 als *eigentliche*. Jene besteht offenbar aus dem Inbegriff aller eigentlichen Transformationen der Ordnungen $\frac{n}{\tau^2}$. So oft n quadratische Teiler nicht aufweist, ist $\Phi(n) = \psi(n)$; dies ist insbesondere für Primzahlen n der Fall, wo man die beiderlei Repräsentantensysteme aufs leichteste in einander überführt. Natürlich kommt bei rein quadratischen n für die erweiterte Transformation auch diejenige der *ersten* Ordnung mit in Betracht. —

Als eine abgekürzte Bezeichnung für unsere beiden Arten von Repräsentanten verabreden wir diese:

$$(7)\qquad R_i(\omega) = \frac{A_i\omega + B_i}{D_i}, \quad R_i'(\omega) = n\frac{\alpha_i\omega + \beta_i}{\gamma_i\omega + \delta_i},$$

wo i für eigentliche Transformation die Zahlen $0, 1, 2, \ldots, \psi - 1$ durchläuft, dagegen als Index von R bei erweiterter Transformation die Zahlreihe $0, 1, \ldots, \Phi(n) - 1$. In einem und nur einem Falle stimmen beide Repräsentanten (7) mit einander überein, offenbar für $A_i = n$, $B_i = 0$, $D_i = 1$; wir denken uns diesen Repräsentanten als ersten $R_0' = R_0$ in den Reihen (7) angeordnet.

Von § 1 her wissen wir, dass die $\psi(n)$ Repräsentanten (7) der eigentlichen Transformation n^{ter} Ordnung den $\psi(n)$ gleichberechtigten Untergruppen $\Gamma_\psi^{(i)}$ eindeutig zugeordnet sind, insofern durch Ausübung einer Substitution $v^{(i)}$ der $\Gamma_\psi^{(i)}$ auf das in $R_i'(\omega)$ bez. $R_i(\omega)$ enthaltene Argument ω nur eine andere Transformation derselben Classe gewonnen wird:

$$(8)\qquad R_i'(v^{(i)}(\omega)) = V(R_i'(\omega)).$$

Man wird es aber sofort als den wesentlichen Unterschied zwischen R und R' ansehen, dass bei Auswahl der R' Bezug genommen ist auf eine besondere unter jenen Untergruppen Γ_ψ (auf diejenige nämlich, welche der Classe $R_0 = R_0'$ zugewiesen ist), während bei R_i eine derartige Rücksichtnahme nicht vorliegt. Indem wir also vorhin $\psi(n)$ Modulsubstitutionen V_i mit der Bedingung $V_iR_i = R_i'$ als existierend nachwiesen, wird durch Anhängung dieser V_i dem Repräsentantensystem R_i eine besondere Beziehung zur $\Gamma_\psi^{(0)}$ aufgedrückt. Ebenso könnten wir aber auch jede der $(\psi - 1)$ anderen Γ_ψ berücksichtigen und solcherweise z. B. $\psi(n)$ Substitutionen V_i' ausfindig machen, so dass sich das Repräsentantensystem:

$$(9)\qquad V_i'R_i(\omega) = R_i''(\omega) = \frac{1}{n}\,\frac{\alpha_i'\omega + \beta_i'}{\gamma_i'\omega + \delta_i'}$$

zur $\Gamma'_\psi = T^{-1}\Gamma^{(0)}_\psi T$ ebenso verhielte, wie die R_i' zur $\Gamma^{(0)}_\psi$. Was aber den bevorzugten Gebrauch der $\Gamma^{(0)}_\psi$ als besonders vorteilhaft erscheinen lässt, ist letzten Endes nichts anderes als der Umstand, dass $\Gamma^{(0)}_\psi$ die Substitution S enthält, und dass dementsprechend die zur $\Gamma^{(0)}_\psi$ gehörenden Modulfunctionen Entwicklungen nach *ganzen* Potenzen von r zulassen müssen.

§ 5. Verzweigung und Geschlecht des Transformationspolygons n^{ter} Ordnung.

Einen ersten Gebrauch des arithmetischen Repräsentantensystems machen wir bei der Bestimmung der Verzweigung und des Geschlechts der Transformationsfläche n^{ter} Ordnung $F_{\psi(n)}$ *). Sei

$$V_0 = 1, \quad V_1, \ldots, \quad V_{\psi-1}$$

ein Repräsentantensystem der Γ_ψ, so besteht das Polygon F_ψ aus den ψ Doppeldreiecken $1, V_1, \ldots, V_{\psi-1}$, und wir haben:

$$(1) \qquad V_i' R_i(\omega) = n\, V_i(\omega),$$

wo natürlich auch die V_i' andere als die in (9) § 4 gemeinten Substitutionen sind.

Jetzt fixiere man auf der geschlossenen F_ψ einen der Eckpunkte a; derselbe sei im Polygon F_ψ der mit $\omega = i$ äquivalente Punkt des Doppeldreiecks V_i, welch' letzteres die in Rede stehende Ecke noch mit dem andern Dreieck $V_i T$ gemeinsam hat. Wir bemerken sofort: Punkt a ist auf der geschlossenen F_ψ dann und nur dann von zwei Elementardreiecken umlagert, wenn die beiden Transformationen:

$$(2) \qquad V_i' R_i T(\omega) = n\, V_i T(\omega), \qquad V_i' R_i(\omega) = n\, V_i(\omega)$$

in dieselbe Classe gehören, wenn sich also eine der Bedingung

$$(3) \qquad V R_i T(\omega) = R_i(\omega)$$

genügende Modulsubstitution V finden lässt. Existiert ein solches V nicht, so ist a von vier Elementardreiecken umlagert.

Für die Discussion von (3) schreiben wir diese Gleichung explicite:

$$(4) \qquad V\left(\frac{B\omega - A}{D\omega}\right) = \frac{A\omega + B}{D}$$

und haben durch Identificierung derselben mit (2) p. 45 von dorther sofort alle Mittel, um die Betrachtung zu Ende zu führen. Wie man an jener Stelle nachsehen wolle, muss A grösster gemeinsamer Teiler

*) So werden wir offenbar kurz das zur geschlossenen Fläche zusammengelegte Transformationspolygon n^{ter} Ordnung nennen dürfen.

von B und D sein; da wir aber mit eigentlicher Transformation zu thun haben, so folgt daraus $A = 1$, $D = n$ und B prim gegen n. Als dritten und vierten Coefficienten der Substitution V haben wir weiter nach (3) § 3:

$$\gamma = -n, \quad \delta = B$$

und müssen also α und β aus

$$(5) \qquad \alpha B + \beta n = 1$$

bestimmen, worauf Gleichung (4) in der Gestalt erscheint:

$$\frac{\omega - \alpha}{n} = \frac{\omega + B}{n}.$$

Es folgt weiter $\alpha = -B$, womit Gleichung (5) zur Congruenz:

$$(6) \qquad B^2 \equiv -1, \quad (\text{mod. } n)$$

Anlass giebt. So oft andrerseits diese Congruenz erfüllt ist, haben wir in:

$$V(\omega) = \frac{B\omega - \frac{B^2+1}{n}}{n\omega - B}$$

die gesuchte Modulsubstitution V und gewinnen so unmittelbar das Resultat: *Ist ε_1 die Anzahl incongruenter Lösungen der Congruenz* (6), *so giebt es auf der geschlossenen F_ψ im ganzen ε_1 Punkte a, die je nur von zwei Elementardreiecken umlagert sind; die übrigen $\frac{1}{2}(\psi - \varepsilon_1)$ Punkte a sind von je vier Dreiecken umringt.*

Ein einzelner Punkt b der F_ψ sei jetzt ferner im Polygon die mit $\omega = \varrho$ äquivalente Ecke von V_i; b wird stets und nur dann von nur zwei Elementardreiecken umlagert sein, wenn es eine Modulsubstitution V giebt, die der Bedingung $VR_i U(\omega) = R_i(\omega)$ oder explicite

$$(7) \qquad V\left(\frac{(A-B)\omega + A}{-D\omega}\right) = \frac{A\omega + B}{D}$$

genügt. Jetzt ist A grösster Teiler von $(A - B)$ und D, und also ist wiederum $A = 1$, $D = n$, $\gamma = n$, $\delta = 1 - B$, während für α, β

$$(8) \qquad \alpha(1 - B) - \beta n = 1$$

gilt. Indem wir (7) herstellen, soweit diese Gleichung bislang bestimmt ist, findet sich wieder $\alpha = B$, worauf (8) die Congruenz

$$(9) \qquad B^2 - B + 1 \equiv 0, \quad (\text{mod. } n)$$

liefert. Andrerseits, so oft diese Congruenz erfüllt ist, haben wir in:

$$V(\omega) = \frac{B\omega + \frac{B^2 - B + 1}{-n}}{n\omega + (1 - B)}$$

auch wirklich die gesuchte Substitution gefunden. *Ist also* ε_0 *die Anzahl incongruenter Lösungen von* (9), *so sind* ε_0 *Punkte* b *der* F_ψ *von je zwei Elementardreiecken umlagert; die zurückbleibenden* $\frac{1}{3}(\psi - \varepsilon_0)$ *Punkte* b *sind von je sechs Dreiecken umlagert.*

Rage endlich das Doppeldreieck V_i mit seiner dritten Ecke an den Punkt c heran, der auf der F_ψ insgesamt von 2ν Elementardreiecken umlagert sei. Da Γ_ψ eine Untergruppe n^{ter} Classe ist, so ist ν sicher ein Teiler von n. Um aber genaueres über ν zu erfahren, müssen wir $VR_iS^\nu(\omega) = R_i(\omega)$ oder explicite

$$V\left(\frac{A\omega + \nu A + B}{D}\right) = \frac{A\omega + B}{D} \tag{10}$$

ansetzen, und es ist jetzt ν die kleinste positive Zahl, für welche sich in (10) eine zugehörige Modulsubstitution V finden lässt. Hier erhalten wir nach den Regeln des § 3 ohne weiteres $\alpha = \delta = 1$, $\gamma = 0$, $\nu A + \beta D = 0$; ist also t der grösste gemeinsame Teiler von A und D, so ist offenbar $\nu = \frac{D}{t}$. Um aber für stehenden Wert D alle zugehörigen $R_i(\omega)$ zu erhalten, müssen wir B bekanntlich prim gegen t und übrigens im Intervall $0 \leq B < D$ wählen. Man zählt sofort ab, dass es $\frac{D}{t}\varphi(t)$ verschiedene B dieser Art giebt, was nebenher die Relation:

$$\psi(n) = \sum_D \frac{D}{t}\varphi(t) \tag{11}$$

zur Folge hat. *Die* $\frac{D}{t}\varphi(t)$ *Doppeldreiecke, welche für den Einzelwert* D *eintreten, werden sich auf der geschlossenen* F_ψ *zu* $\varphi(t)$ *Kränzen von je* $\frac{D}{t}$ *Doppeldreiecken anordnen und solcherweise* $\varphi(t)$ *Punkte* c *der geschlossenen Fläche umringen.*

Die Bestimmung des Geschlechts p unserer Fläche F_ψ kann jetzt auf Grund von I p. 340 Formel (2) ohne weiteres geschehen. Wir erhalten:

$$p = -\psi + 1 + \frac{1}{4}(\psi - \varepsilon_1) + \frac{1}{3}(\psi - \varepsilon_0) + \frac{1}{2}\sum_D \varphi(t)\left(\frac{D}{t} - 1\right),$$

was sich mit Hülfe von (11) *zu folgender Schlussformel zusammenzieht:*

$$p = 1 + \frac{1}{12}\psi - \frac{1}{3}\varepsilon_0 - \frac{1}{4}\varepsilon_1 - \frac{1}{2}\sum_D \varphi(t).\text{*)} \tag{12}$$

---

*) Diese Formel ist zuerst von Hrn. Gierster aufgestellt worden; vgl. dessen *„Notiz über Modulargleichungen bei zusammengesetztem Transformationsgrad"*, Math. Ann. Bd. 14 (1879).

Bei Primzahlen $n = q > 3$ haben wir für D nur die beiden Werte $D = 1, q$, und beide Male ist $\varphi(t) = 1$; überdies finden wir durch elementare zahlentheoretische Regeln:

$$\psi = q + 1, \quad \varepsilon_1 = 1 + \left(\frac{-1}{q}\right), \quad \varepsilon_0 = 1 + \left(\frac{q}{3}\right),$$

wo in die beiden letzten Formeln rechter Hand das in der Theorie der quadratischen Reste gebräuchliche Legendre'sche Zeichen aufgenommen ist. Formel (12) giebt demnach als *Geschlecht des Transformationspolygons von Primzahlordnung* q:

$$p = -\frac{1}{2} + \frac{1}{12}q - \frac{1}{3}\left(\frac{q}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{q}\right). \tag{13}$$

Die nähere Berechnung zeigt, dass die einzigen Primzahlordnungen, welche für Γ_ψ ein Geschlecht $p = 0$ ergeben,

$$q = 2, 3, 5, 7, 13 \tag{14}$$

sind; dem Falle $q = 11$ kommt das Geschlecht $p = 1$ zu. Des weiteren haben unter den zusammengesetzten Ordnungen n nur

$$n = 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 16,\ 18,\ 25 \tag{15}$$

das Geschlecht $p = 0$*).

§ 6. Functionentheoretische Betrachtung der Transformation. Die Transformationsgleichungen.

Für die functionentheoretische Besprechung der (eigentlichen) Transformation n^{ter} Ordnung haben wir unmittelbar an die Erörterungen des § 1 anzuknüpfen und verstehen also unter $F(\omega_1, \omega_2)$ eine algebraische Modulform erster Stufe, die aber auch von nullter Dimension sein darf. Dass dann auch $F\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right)$ als ein zur Γ_ψ gehörender Modul n^{ter} Stufe *algebraisch* ist, dürfte aus den doppelt geteilten Polygonen des § 2 sofort evident werden. Unsere Schlussweisen aus Bd. I sind hiermit ohne weiteres anwendbar und liefern uns das Resultat: *Der transformierte Modul* $F\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right)$ *ist Wurzel einer irreducibelen algebraischen Gleichung* ψ^{ten} *Grades:*

$$x^\psi + R_1(g_2, g_3)x^{\psi-1} + R_2(g_2, g_3)x^{\psi-2} + \cdots + R_\psi(g_2, g_3) = 0, \tag{1}$$

deren Coefficienten rationale Functionen von g_2, g_3 *sind.* Wir wollen eine solche Gleichung kurz als *eine zur Ordnung n gehörende Transformationsgleichung* benennen und werden zwischen *formen-* und *func-*

*) Cf. die bis $n = 61$ gehende Tabelle, welche Hr. Kiepert in seiner am Anfang des Kapitels genannten Arbeit in Bd. 32 der Math. Ann. aufgestellt hat.

tionentheoretischen Transformationsgleichungen unterscheiden. Im letzteren Falle werden wir an Stelle von (1) auch

$$x^{\psi} + R_1(J)x^{\psi-1} + \cdots + R_{\psi}(J) = 0 \tag{2}$$

schreiben können. In diesem unmittelbaren Schluss auf die Existenz der Gleichungen (1) und (2) hat man wieder einen Erfolg unserer in I entwickelten algebraischen Principien zu erkennen. Im Gegensatz dazu führte man sonst die Transformationsgleichungen mittelbarer Weise als Resolventen der Teilungsgleichungen ein, vermöge eines Gedankengangs, den wir schon wiederholt, und zwar zuletzt am Schlusse von § 1 des vorliegenden Kapitels erwähnten. Die Existenz der Teilungsgleichungen ihrerseits erschloss man, wie wir schon anführten, auf Grund des Additionstheorems der doppeltperiodischen Functionen.

Nach (12) § 1 *haben die zur* n^{ten} *Ordnung gehörenden Transformationsgleichungen eine Monodromiegruppe der Ordnung:*

$$\frac{\mu(n)}{2^{\varkappa+\sigma-1}} = \frac{n\,\varphi(n)\,\psi(n)}{2^{\varkappa+\sigma}}, \tag{3}$$

$\varkappa$ *und* σ *in der damaligen Bedeutung gebraucht.* Umgekehrt ausgesprochen sind also jene Transformationsgleichungen Resolventen eines Galois-schen Problems n^{ter} Stufe von dem in (3) angegebenen Grade. Hier haben wir aber immer und nur dann den Grad des zur Stufe n gehörenden Galois'schen Hauptproblems (desjenigen, welches der Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe entspricht), wenn $n = 2$ oder 4 oder gleich einer Primzahlpotenz oder endlich dem Doppelten einer solchen ist.

Hat n quadratische Teiler, so können wir in der bereits erläuterten Weise Erweiterung der Transformation n^{ter} Ordnung eintreten lassen, indem wir die eigentlichen Transformationen aller Ordnungen $\frac{n}{\tau^2}$ zusammenfassen. Wenn wir dann für eine und dieselbe Form $F(\omega_1, \omega_2)$ alle bezüglichen irreducibelen Transformationsgleichungen bilden und das Product ihrer linken Seiten mit Null identisch setzen, so entspringt *eine zur Ordnung n gehörende reducibele Transformationsgleichung.* Der Grad derselben ist gleich $\Phi(n)$, der Teilersumme von n.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen haben wir diejenigen besonderen Folgerungen zu betrachten, welche mit einer besonderen Auswahl des zu transformierenden Moduls gegeben sind. Nehmen wir erstlich F als *ganze* algebraische Modulform erster Stufe*), wobei wir als einfachste Beispiele g_2, g_3 und Δ haben. Da alsdann das ursprüngliche und also auch das transformierte F im Innern der Halbebene

*) d. i. eine *ganze* rationale Function von g_2, g_3.

nirgends unendlich wird, überdies aber die Reihenentwicklung für F bei $\omega = i\infty$ nur *positive* Exponenten von r aufweist (was dann unter Gebrauch der arithmetischen Repräsentanten auch für die transformierten F erkannt wird), so findet hier die schon einmal (p. 13 u. f.) gegebene Überlegung Schritt für Schritt wieder Verwendung, und wir finden den Satz: *Ist F eine ganze Modulform erster Stufe, so genügt das transformierte F einer irreducibelen Gleichung ψ^{ten} Grades:*

$$(4) \qquad x^{\psi} + G_1(g_2, g_3)\, x^{\psi-1} + \cdots + G_{\psi}(g_2, g_3) = 0,$$

deren Coefficienten ganze rationale Functionen von g_2, g_3 sind. — Ganze Modulformen der ersten Stufe geben also transformiert *ganze* Modulformen n^{ter} Stufe.

Bei der expliciten Aufstellung einer Gleichung (4) kommt natürlich wieder der formentheoretische Ansatz in Betracht, der uns bereits in I (p. 756) und im voraufgehenden Kapitel bei den Teilwerten von $\wp$, $\wp'$ wesentliche Dienste leistete. So haben wir z. B. für $F = g_2$ an Stelle von (4) bis auf numerische Bestandteile:

$$(5) \qquad x^{\psi} + a g_2 x^{\psi-1} + b g_2^2 x^{\psi-2} + (c g_2^3 + d g_3^2) x^{\psi-3} + \cdots = 0,$$

oder für $F = \Delta$:

$$(6) \qquad x^{\psi} + (a g_2^3 + b g_3^2) x^{\psi-1} + (c g_2^6 + d g_2^3 g_3^2 + e g_3^4) x^{\psi-2} + \cdots = 0.$$

Die numerischen Coefficienten $a, b, c \ldots$ sind hier stets *rationale* Zahlen, die man nach den bereits oben (p. 15) bei den Teilungsgleichungen aus einander gesetzten Methoden finden kann*).

§ 7. Fortsetzung: Die Transformationsgleichungen für $J(\omega)$. Begriff der Modulargleichung.

Unter den functionentheoretischen Transformationsgleichungen werden vor allem diejenigen für $J(\omega)$ interessieren. Schreiben wir aber $J' = J(n\omega)$, so wird J', sowie sämtliche mit J' gleichberechtigte Moduln, im Innern der Halbebene allenthalben endlich sein. Für diesen Fall werden demgemäss die Coefficienten der Transformationsgleichung durchgehends *ganze* rationale Functionen von J:

$$(1) \qquad J'^{\psi} + G_1(J) \cdot J'^{\psi-1} + \cdots + G_{\psi}(J) = 0,$$

eine Gleichung, deren linke Seite wir durch $f(J', J)$ bezeichnen wollen. Der Grad der ganzen Functionen $G(J)$ bleibt zunächst unbekannt; nur

*) Transformationsgleichungen für g_2, g_3 hat auf Veranlassung von Weierstrass zuerst Hr. Felix Müller in seiner Dissertation „*De transformatione functionum ellipticarum*", Berlin (1867), aufgestellt. Vergl. auch Brioschi in den Comptes Rendus Bd. 79 (1874): „*Sur une formule de transformation des fonctions elliptiques*".

werden wir sogleich sehen, dass kein G den ψ^{ten} Grad überschreiten kann. Um (1) explicite zu gewinnen, könnte man demnach etwa alle G als ganze Functionen ψ^{ten} Grades mit unbestimmten Coefficienten anschreiben und letztere nach einer der wiederholt genannten Methoden bestimmen. Man würde sich dabei z. B. aus I p. 154 (2) eine Potenzentwicklung nach r für $J(\omega)$ verschaffen, von der man eine Anzahl Anfangsglieder wirklich berechnet haben müsste. Daraus würde man eine entsprechende Entwicklung für $J' = J(n\omega)$ unmittelbar abschreiben und vermöge beider Entwicklungen die linke Seite von (1) selbst in eine Reihe nach ansteigenden Potenzen von r umwandeln. Die Coefficienten der letzteren, die aus wohlbekanntem Grunde alle mit Null identisch sein müssen, sind aber lineare Functionen der in (1) als unbestimmt angesetzten Grössen, für deren Bestimmung solcherweise eine hinreichende Anzahl linearer Gleichungen sich ergiebt. Dass aber in der That ein und nur ein Lösungssystem hierbei eintritt, entnimmt man leicht aus der Existenz und Irreducibilität der Gleichung (1). Übrigens erhalten wir aus der Natur der Reihenentwicklung für J hier wieder die Erkenntnis, dass die numerischen Coefficienten der Gleichung (1) durchgängig *reelle rationale* Zahlen sind*). Da sich aber die beschriebene Methode bei wirklicher Durchführung äusserst umständlich gestaltet, auch wenn man die uns bekannte Verzweigung von J' als Function von J berücksichtigt, so sehen wir von der Durchrechnung eines Beispiels ganz ab**).

Das Transformationspolygon wird durch die Spiegelung A in sich transformiert, und da hierbei sowohl $J(\omega)$ wie $J(n\omega)$ in ihre conjugiert complexen Werte übergeführt werden, so müssen die numerischen Coefficienten in (1) durchgehends reell sein. Während wir aber letzteren Umstand soeben bereits auf anderem Wege erkannten, ist es nun besonders wichtig, die Existenz der Transformation W [cf. (4)

---

*) Eingehender handelt von den zahlentheoretischen Eigenschaften der Coefficienten der Gleichung (1) die Note von Hrn. Pick *„Zur Lehre von den Modulargleichungen der elliptischen Functionen“*, Berichte der Wiener Akademie Bd. 91 p. 138 (1885).

**) Die für $n = 3$ eintretende Gleichung vierten Grades ist von Stephen Smith berechnet und hat die Gestalt:

$$x(x + 2^7 . 3 . 5^3)^3 + y(y + 2^7 . 3 . 5^3)^3$$
$$- 2^{16}x^3y^3 + 2^{11} . 3^2 . 31 x^2y^2(x + y) - 2^2 . 3^3 . 9907 xy(x^2 + y^2)$$
$$+ 2 . 3^4 . 13 . 193 . 6367 x^2y^2 + 2^8 . 3^5 . 5^3 . 4471 xy(x + y) - 2^{15} . 5^6 . 22973 xy = 0,$$

wo $x = \frac{27}{4} J$, $y = \frac{27}{4} J'$ genommen ist; vgl. Proceedings of the London Mathematical Society 1878, p. 242 und 1879, p. 87.

p. 42] des Polygons F_ψ in sich für die weitere Untersuchung von (1) zu verwerten. Üben wir nämlich in $f(J', J) = 0$ oder, ausführlich geschrieben, in $f(J(n\omega), J(\omega)) = 0$ auf ω die Operation der Periode zwei $W(\omega) = \frac{-1}{n\omega}$ aus, so kommt, da J gegenüber T invariant ist,

$$f(J(\omega), J(n\omega)) = 0, \text{ d. i. } f(J, J') = 0;$$

es ist demgemäss J' dieselbe algebraische Function von J, wie umgekehrt J von J'. Wir benutzen nun aber weiter den Umstand, dass die linke Seite von (1) eine irreducibele ganze Function von J, J' ist. Daraus ist erstlich zu schliessen, dass die linke Seite $f(J', J)$ der Gleichung (1) bei Vertauschung ihrer beiden Argumente bis auf einen constanten Factor $\varkappa$ in sich selbst übergehen muss, d. h. dass die Relation identisch besteht:

$$f(J, J') = \varkappa f(J', J).$$

Indem wir in dieser, für willkürliche J, J' geltenden, Gleichung die Bezeichnungen J, J' der Variabeln vertauschen, folgt

$$f(J', J) = \varkappa f(J, J'),$$

und also ist $\varkappa = \pm 1$, so dass wir nur noch zwischen den beiden Gleichungen: $f(J, J') = \pm f(J', J)$ zu entscheiden haben. Wäre aber hier das untere Zeichen das richtige, so wäre in

$$f(J, J') - f(J', J) = -2 f(J', J)$$

die rechte und also auch die linke Seite irreducibel, entgegen der offenbar zutreffenden Thatsache, dass die linke Seite den Factor $(J' - J)$ besitzt. Notwendig ist demnach $f(J, J') = f(J', J)$ für unabhängig gedachte J, J', und wir haben das Resultat: *Die linke Seite der Transformationsgleichung $\psi(n)^{\text{ten}}$ Grades für J ist eine irreducibele symmetrische ganze Function von J und J'.*

Der besonders charakteristische Zug, welcher mit der Betrachtung der Modulfunction J hier eingetreten ist, dürfte wohl der sein, dass der transformierte Modul *allein an seinen ursprünglichen Wert* durch eine algebraische Relation $\psi(n)^{\text{ten}}$ Grades gebunden ist. Indem hierdurch unter den bislang betrachteten Transformationsgleichungen diejenige für J besonders ausgezeichnet ist*), wollen wir für sie noch eine specielle Benennung einführen, und wir folgen hierbei einem alten Brauche, wenn wir sie als eine *Modulargleichung* bezeichnen. Als bestimmenden Charakter einer Modulargleichung unter allen sonst aufstellbaren Transformationsgleichungen aber sehen wir an, *dass sie eine*

*) Man sehe z. B. die unter (5) und (6) § 6 angegebenen Gleichungen, deren Coefficienten immer zugleich aus g_2 und g_3 zusammengesetzt sind.

irreducibele Relation ψ^{ten} Grades zwischen dem ursprünglichen und transformierten Werte einer Modulfunction sei, dass ihre linke Seite Vertauschbarkeit des ursprünglichen und transformierten Moduls oder, kurz gesagt, ihrer beiden Argumente zulasse, dass endlich die Monodromiegruppe der Modulargleichung die in (12) *p.* 40 *gegebene Ordnung aufweise**). In der That treffen diese Eigenschaften bei den Transformationsgleichungen höherer Stufe zu, welche Jacobi und Andere ihrer Zeit als Modulargleichungen bezeichnet haben.

Aufs leichteste unterrichtet man sich über den Umfang aller bei der ersten Stufe eintretenden Modulargleichungen. Jede Modulfunction erster Stufe $F(\omega)$ ist mit ihrer transformierten $F'(\omega) = F(n\omega)$ durch eine irreducibele algebraische Relation verbunden; denn beide sind Moduln der Γ_{ψ}. Ist aber F im Ausgangsdreieck m-wertig, so ist leicht ersichtlich der Grad dieser Relation $m\psi(n)$. Daher das Resultat: *Nur für die Hauptmoduln erster Stufe existieren Modulargleichungen, für diese aber stets;* in der That sind sie ja alle lineare Functionen von J.

Die Modulargleichungen für J sind wiederholt Gegenstand der Untersuchung gewesen. Unter den wichtigsten bezüglichen Arbeiten haben wir an erster Stelle wieder Hrn. Dedekind's oft genanntes Schreiben an Borchardt**) zu nennen, in welchem die in Rede stehenden Gleichungen als Valenzgleichungen eingeführt werden. Die am Eingang des Kapitels ausführlich genannten Untersuchungen von Hrn. Klein***) betreffen zumal die unter (14) p. 52 zusammengestellten Primzahlfälle des Geschlechtes $p = 0$; man konnte für dieselben auf indirectem Wege explicite Formeln herstellen, wie wir sogleich sehen werden. Mit Hülfe der von Hrn. Klein eingeführten Principien hat alsdann Hr. Gierster†) die zusammengesetzten Ordnungen n des Geschlechtes $p = 0$ erledigt (cf. (15) p. 52). Es schliessen sich hier auch die Untersuchungen von Hrn. Kiepert an, die zu Anfang des Kapitels genannt wurden; dieselben konnten dank der Aufnahme weiterer Hülfsmittel, namentlich der Teilwerte von $\wp$ und σ (die zur Herstellung möglichst einfacher, zum Transformationspolygon gehöriger Moduln benutzt werden) weit über die Anfangsfälle $p = 0$ ausgedehnt werden. Einige von den hiermit erwähnten Untersuchungen werden wir weiterhin noch ausführlicher kennen lernen. Endlich haben wir

*) Cf. Klein, Mathem. Annalen Bd. 17 p. 67 (1879).

**) Crelle's Journal Bd. 83 (1877).

***) Mathem. Annalen Bd. 14 (1878).

†) Vergl. das Citat p. 51.

noch der beiden hierher gehörigen Arbeiten von Hrn. Weber*) zu gedenken, in denen die Modulargleichungen von J zu Untersuchungen arithmetischen Charakters verwertet werden; wir kommen auf die letzteren Gegenstände weiter unten zurück. — Zumeist ist in all' diesen Arbeiten die wirkliche Herstellung der Modulargleichungen oder eines Aequivalents derselben das wesentlichste Ziel der Untersuchung gewesen. Ein tieferes Eingehen auf die algebraische Natur der Modulargleichungen, auf ihren Affect und auf die Darstellung des letzteren durch zweckmässig gewählte Affectfunctionen (vgl. die Erläuterungen in I p. 642 u. f.) musste dabei vorläufig zurückstehen und kann auch bei der folgenden Darstellung nicht in den Vordergrund gerückt werden.

§ 8. Ersatz der Modulargleichung bei den zum Geschlechte $p = 0$ gehörenden Ordnungen.

Die im vorigen Paragraphen zur Herstellung der fertigen Modulargleichungen $f(J', J) = 0$ angegebene Methode führt, wie wir schon bemerkten, nur mit Hülfe umständlicher Rechnungen zum Ziele; man sieht sich dieserhalb darauf angewiesen, zu indirecten Mitteln die Zuflucht zu nehmen. Solche Mittel giebt aber die functionentheoretische Discussion des Fundamentalpolygons. Auf dem Transformationspolygon F_ψ ist $J(\omega)$ wie auch $J(n\omega)$ eine ψ-wertige Function, während wir doch von Bd. I her wissen, dass es auf der Fläche F_ψ im allgemeinen Functionen von sehr viel geringerer Wertigkeit giebt. So giebt es in allen Fällen $p = 0$, die wir unter (14) und (15) p. 52 zusammenstellten, für die bezüglichen Gruppen Γ_ψ Hauptmoduln. Die Benutzung der letzteren, sowie der mindestwertigen Functionen in den weiter folgenden Fällen $p > 0$, für die jetzt in Rede stehenden Fragen werden wir aber sofort als den für uns gewiesenen Weg anerkennen. Für die Transformationsordnungen $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ können wir hier unmittelbar auf die bezüglichen Rechnungen von Bd. I zurückgreifen und gestalten solcherweise die Entwicklung wie folgt**):

Als Hauptmodul des Polygons $F_{\psi(2)}$ (linke Hälfte der Fig. 69 in

---

*) *Zur Theorie der elliptischen Functionen,* Acta mathem. Bd. 6 und 10 (1885 und 89). Die von Hrn. Weber benutzte Bezeichnungsweise $j(\omega)$ hat die Bedeutung $j(\omega) = 12^3 J(\omega)$; der Gebrauch der Bezeichnung j hat für arithmetische Betrachtungen, die sich an die Modulargleichungen anschliessen, wichtige Vorteile im Gefolge, insofern die Reihenentwicklung von j nach Potenzen von r nur ganzzahlige Coefficienten aufweist. Vgl. auch Pick in den Math. Annalen Bd. 25 und 26 (1885).

**) Klein, Mathem. Annalen Bd. 14 p. 141 u. f.

I p. 281) brauchen wir, um weiterhin möglichst einfache Formeln zu gewinnen, zweckmässig:

$$(1)\qquad \tau(\omega) = \frac{-1}{4\lambda(1-\lambda)}.$$

Aus der Diedergleichung (5) I p. 15 folgt als Zusammenhang dieses τ mit $J(\omega)$ nach kurzer Rechnung:

$$(2)\qquad J : J - 1 : 1 = (4\tau + 1)^3 : (8\tau - 1)^2(\tau + 1) : 27\tau.$$

Nunmehr üben wir die Operation $W(\omega) = \frac{-1}{2\omega}$ der Periode zwei aus, wobei $J(\omega)$ und $\tau(\omega)$ übergehen in

$$(3)\qquad J'(\omega) = J\left(\frac{-1}{2\omega}\right) = J(2\omega), \quad \tau'(\omega) = \tau\left(\frac{-1}{2\omega}\right),$$

während wir aus Gleichung (2) die nachfolgende zwischen J' und τ' sofort abschreiben:

$$(4)\qquad J' : J' - 1 : 1 = (4\tau' + 1)^3 : (8\tau' - 1)^2(\tau' + 1) : 27\tau'.$$

Die Grösse $\tau'(\omega)$, die wir unter (3) erhielten, ist offenbar Hauptmodul der Gruppe $W^{-1}\Gamma_\psi W$. Aber diese letztere Gruppe ist nach § 2 keine andere als Γ_ψ selbst, *und also ist τ' eine lineare Function von τ.* Die Gestalt der letzteren bringen wir leicht in Erfahrung. Da nämlich W die beiden Punkte $\omega = i\infty$ und $\omega = 0$, denen bez. die Werte $\tau = 0, \infty$ zukommen, gerade permutiert, so wird es sich einfach um eine Relation der Gestalt $\tau' = \frac{\varkappa}{\tau}$ handeln, wo wir nun allein noch die numerische Constante $\varkappa$ zu bestimmen haben. Zu diesem Ende berechnen wir uns die Anfangsterme der Reihenentwicklungen für τ und τ' bei $\omega = i\infty$. Da τ hier verschwindet, so entspringt erstlich aus (2)

$$(5)\qquad J = \frac{1}{12^3 r} = \frac{1}{27\tau}; \qquad \tau(\omega) = 64r + \cdots,$$

woraus wir schliessen, dass τ auf der imaginären ω-Axe positiv ausfällt. τ' wird bei $\omega = i\infty$ unendlich, und also liefert (4):

$$(6)\qquad J(2\omega) = \frac{1}{12^3 r^2} = \frac{64\tau'^2}{27}; \qquad \tau' = \frac{1}{64} r^{-1} + \cdots.$$

Das hier gewählte Vorzeichen von τ' bestimmt sich durch die Bemerkung, dass τ' auf der imaginären ω-Axe offenbar das nämliche Vorzeichen besitzt wie τ. Jetzt folgt aus (5) und (6)

$$\lim_{\omega = i\infty} \tau(\omega) \,.\, \tau'(\omega) = 1,$$

und also ist allgemein $\tau'(\omega) = \frac{1}{\tau(\omega)}$. Wenn man will, könnte man jetzt aus der somit gewonnenen Gleichung $\tau' . \tau = 1$ und den beiden

Gleichungen (2) und (4) die beiden Grössen τ und τ' eliminieren, um auf solche Art die irreducibele Relation zwischen J' und J, d. h. die Modulargleichung, zu gewinnen. *Wir bringen demgegenüber kurzweg den Complex der drei Gleichungen:*

$$(7)\quad \begin{cases} J : J - 1 : 1 = (4\tau + 1)^3 : (\tau + 1)(8\tau - 1)^2 : 27\tau, \\ J' : J' - 1 : 1 = (4\tau' + 1)^3 : (\tau' + 1)(8\tau' - 1)^2 : 27\tau', \\ \tau'\tau = 1 \end{cases}$$

als Ersatz der fertigen Modulargleichung für Transformation zweiter Ordnung in Vorschlag.

Man überblickt sofort, dass die Entwicklung in genau analoger Weise bei allen zum Geschlechte $p = 0$ gehörenden Ordnungen n durchführbar ist. So gebrauchen wir bei $n = 3$ und $n = 4$ die beiden Hauptmoduln:

$$(8)\quad \tau = \frac{1}{\xi^3 - 1}, \qquad \tau = \frac{2}{\mu^4 - 1},$$

die ersichtlich wieder so ausgewählt sind, dass die Relationen zwischen $\tau'(\omega) = \tau(W(\omega))$ und $\tau(\omega)$ die Gestalt $\tau\tau' = \varkappa$ gewinnen. Die Relationen zwischen τ und J ergeben sich unmittelbar aus der Tetraeder- und Oktaedergleichung, und eben jene Relationen werden wir dann wieder wie vorhin zur Bestimmung von $\varkappa$ verwerten. *Man findet so als Ersatz der Modulargleichungen bei $n = 3$ und $n = 4$ bez. die Gleichungssysteme:*

$$(9)\quad \begin{cases} J : J - 1 : 1 = (\tau + 1)(9\tau + 1)^3 : (27\tau^2 + 18\tau - 1)^2 : 64\tau, \\ J' : J' - 1 : 1 = (\tau' + 1)(9\tau' + 1)^3 : (27\tau'^2 + 18\tau' - 1)^2 : 64\tau', \\ \tau'\tau = 1; \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} J : J - 1 : 1 = (4\tau^2 + 8\tau + 1)^3 : (8\tau^3 + 24\tau^2 + 15\tau - 1)^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad : 27\tau(\tau + 2), \\ J' : J' - 1 : 1 = (4\tau'^2 + 8\tau' + 1)^3 : (8\tau'^3 + 24\tau'^2 + 15\tau' - 1)^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad : 27\tau'(\tau' + 2), \\ \tau'\tau = 4. \end{cases}$$

Bei $n = 5$ und $n = 7$ behalten wir die zugehörigen Modulformen τ direct in der Gestalt bei, wie wir sie in I p. 639 und p. 745 fixierten, nur dass wir bei $n = 5$ uns einen Zeichenwechsel des τ erlauben wollen. Wir finden alsdann auf Grund der damaligen functionentheoretischen Resolventen als *Ausdruck der Transformationen $n = 5$ und $n = 7$ bez.:*

$$
(11)\begin{cases}
J : J-1 : 1 = (\tau^2+10\tau+5)^3 : (\tau^2+22\tau+125)(\tau^2+4\tau-1)^2 \\
\qquad\qquad\qquad : 1728\tau, \\
J' : J'-1 : 1 = (\tau'^2+10\tau'+5)^3 : (\tau'^2+22\tau'+125)(\tau'^2+4\tau'-1)^2 \\
\qquad\qquad\qquad : 1728\tau', \\
\tau\tau' = 125;
\end{cases}
$$

$$
(12)\begin{cases}
J : J-1 : 1 = (\tau^2+13\tau+49)(\tau^2+5\tau+1)^3 \\
\qquad : (\tau^4+14\tau^3+63\tau^2+70\tau-7)^2 : 1728\tau, \\
J' : J'-1 : 1 = (\tau'^2+13\tau'+49)(\tau'^2+5\tau'+1)^3 \\
\qquad : (\tau'^4+14\tau'^3+63\tau'^2+70\tau'-7)^2 : 1728\tau', \\
\tau\tau' = 49.
\end{cases}
$$

Für den Fall der Transformation *sechster* Ordnung, die wir auch noch ausführlich erledigen wollen, gehe man auf die Entwicklungen in I p. 683 u. f. zurück. Wir teilten bereits dort mit, dass von Hrn. Gierster als Hauptmodul $\tau(\omega)$ der Γ_ψ

$$
(13) \qquad \tau = \frac{-36}{x^3+8}
$$

gebraucht sei, die Function $x(\omega)$ in der l. c. vorliegenden Bedeutung benutzt. Eliminieren wir dieses x zwischen (13) und der zweiten Gleichung (1) in I p. 689, so ergiebt sich als Darstellung von ξ^3 in τ:

$$
(14) \qquad \xi^3 = \frac{4(\tau+3)^3}{\tau(2\tau+9)^2}.
$$

Setzt man diesen Ausdruck für ξ^3 in die Tetraedergleichung ein, so entspringt die Relation zwischen J und τ. Im übrigen gelten wieder dieselben Schlüsse, wie in den vorhin besprochenen Fällen, *und wir finden als Ersatz der Modulargleichung für Transformation sechster Ordnung das Gleichungssystem:*

$$
(15)\begin{cases}
J : J-1 : 1 = 4(\tau+3)^3(\tau^3+9\tau^2+21\tau+3)^3 \\
\qquad : (\tau^2+6\tau+6)^2(2\tau^4+24\tau^3+96\tau^2+126\tau-9)^2 \\
\qquad : 27\tau(\tau+4)^3(2\tau+9)^2, \\
J' : J'-1 : 1 = 4(\tau'+3)^3(\tau'^3+9\tau'^2+21\tau'+3)^3 : \cdots, \\
\tau\tau' = 18.
\end{cases}
$$

Auch noch der Fall $n = 13$ ist in der wiederholt genannten Arbeit von Klein (Bd. 14 der Annalen) erledigt. Die Rechnung wurde seinerzeit von Hrn. Gierster durchgeführt und gestaltete sich principiell nicht anders als bei $n = 5$ und $n = 7$; mögen wir hier etwa kurz das Resultat anführen:

$$
(16)\begin{cases}
J : J-1 : 1 = (\tau^2+5\tau+13)(\tau^4+7\tau^3+20\tau^2+19\tau+1)^3 \\
\qquad\qquad : (\tau^2+6\tau+13)(\tau^6+10\tau^5+46\tau^4+108\tau^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + 122\tau^2+38\tau-1)^2 \\
\qquad\qquad : 1728\tau \\
J' : J'-1 : 1 = (\tau'^2+5\tau'+13)\ldots, \\
\qquad \tau\tau' = 13.
\end{cases}
$$

Weitere Beispiele, die sich principiell in analoger Weise durchführen lassen, wolle man in den im vorigen Paragraphen angegebenen Arbeiten von Gierster und Kiepert nachsehen. Wir kommen übrigens im folgenden Abschnitt gelegentlich nochmals auf diese Gegenstände zurück, wo wir dann eben die Mittel zur Hand haben werden, uns besonders einfache Moduln der Gruppen $\Gamma_{\psi(n)}$ zu verschaffen.

§ 9. Zusammenhang der Hauptmoduln τ mit der transformierten Discriminante $\Delta(\omega_1, \omega_2)$.

Die Transformation n^{ter} Ordnung erster Stufe liefert uns Moduln für diejenigen Congruenzgruppen n^{ter} Stufe, die wir wenigstens für Primzahlstufen $q > 11$ früher bestimmt als diejenigen von niederstem Index erkannten. In den Transformationsgleichungen hat man also, allgemein zu reden, Resolventen n^{ter} Stufe *von niederstem Grade* für beliebige Stufenzahlen gewonnen, und unter diesen Resolventen zeichnen sich, theoretisch genommen, die soeben besprochenen Modulargleichungen für J vor allen übrigen aus. Wenn es sich aber um wirkliche Herstellung einer solchen Resolvente handelt, so haben wir wenigstens für die niedersten Stufen z. B. für $q = 7$ die Erfahrung gemacht, dass die Resolvente achten Grades, der $J(7\omega)$ genügt, um vieles umfänglicher ausfällt, als etwa die in I p. 745 aufgestellte Resolvente (3), der τ genügt. Man wird als Grund dieser Erscheinung angeben, dass für in Rede stehenden Fall $q = 7$ ein transformierter Hauptmodul erster Stufe auf dem Polygon $F_{\psi(7)}$ stets achtwertig ist, während τ auf dem nämlichen Polygon einwertig ausfällt. Es hat sich nun gezeigt, *dass man nicht nur bei $n = 7$ zur Resolvente achten Grades des τ, sondern ganz allgemein zu gestaltlich besonders einfachen Transformationsgleichungen dadurch gelangt, dass man die Transformation n^{ter} Ordnung auf die Discriminante Δ anwendet.* Indem wir aber diesen Gegenstand weiterhin eingehender verfolgen wollen, gewinnen wir zunächst im speciellen für die sämtlichen Hauptmoduln τ des vorigen Paragraphen eine Reihe merkwürdiger Darstellungen durch die Discriminante Δ*).

*) Man sehe hier wieder Klein, Bd. 14 der Math. Annalen, p. 144 ff.

Die Grösse $\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right)$ ist eine zur Γ_ψ gehörende Modul*form.* Um unsere Untersuchung also direct auf dem Polygon F_ψ erledigen zu können, dividieren wir jene Form etwa durch $\Delta(\omega_1, \omega_2)$; es entspringt so die zur Γ_ψ gehörende Function:

$$(1)\qquad F(\omega) = \frac{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)} = \frac{n^{12}\Delta(n\omega_1, \omega_2)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)},$$

welche durch die Eigenschaft ausgezeichnet ist, nur in den Spitzen des Polygons F_ψ verschwinden oder unendlich werden zu können. Wie das letztere des näheren geschieht, können wir vermöge unseres oft angewandten Princips unmittelbar feststellen. Rage an eine beliebige Spitze von F_ψ das Dreieck V heran, so besitze die durch nV repräsentierte Classe von Transformationen n^{ter} Ordnung den arithmetischen Repräsentanten $R(\omega) = \frac{A\omega + B}{D}$. Die Function (1) wird dann in jener Spitze gerade so verschwinden bez. unendlich werden, wie

$$(2)\qquad \frac{\Delta(A\omega_1 + B\omega_2, D\omega_2)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)}$$

bei $\omega = i\infty$. Gebrauchen wir demgemäss die Bezeichnung t im Sinne von § 5 (p. 51), so werden in der gemeinten Spitze $\frac{D}{t}$ Doppeldreiecke von F_ψ im Cyclus zusammenhängen; nach unseren bezüglichen Regeln (I p. 587) ist also für die Abschätzung des Verhaltens von (2) bei $\omega = i\infty$ die Grösse $r^{\frac{t}{D}}$ als einfach verschwindend anzusehen. Da sich aber (2) bei $\omega = i\infty$ von einem Factor abgesehen wie $r^{\frac{A}{D} - 1}$ verhält, so schliessen wir sofort: *Die Function* (1) *wird in dem fraglichen Punkte c der geschlossenen Fläche F_ψ im Grade*

$$(3)\qquad \frac{A - D}{t} = \frac{n - D^2}{Dt}$$

verschwinden.

Bringen wir jetzt diese Überlegung für die im vorigen Paragraphen ausführlich betrachteten Fälle in Anwendung! Dieselben gehören alle dem Geschlechte $p = 0$ zu, und also werden wir die in Betracht kommenden Grössen (1) in den zugehörigen uns bekannten Hauptmoduln τ rational darstellen können. In den Fällen $n = 2, 3, 5, 7, 13$ besitzt F_ψ jeweils nur *zwei* Spitzen; offenbar muss die eine unter ihnen den Nullpunkt, die andere den Unstetigkeitspunkt von (1) tragen. Da aber an diesen Stellen zugleich Null- und Unstetigkeitspunkte des jeweiligen τ gelegen sind und andrerseits die Functionen (1) zufolge

der allgemeinen Regel (3) bei $\omega = i\infty$ im Grade $(n-1)$, auf F_ψ gemessen, verschwinden, so gilt offenbar der Ansatz:

$$(4) \qquad \frac{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)} = \varkappa_n \tau_n^{n-1}(\omega),$$

wo wir zur Unterscheidung die Ordnung n als unteren Index an τ angehängt haben. Zur Bestimmung der Constanten $\varkappa_n$ berechne man des genaueren als Annäherung der linken Seite bei $\omega = i\infty$ den Wert $n^{12} r^{n-1}$, während die entsprechenden Näherungswerte für die τ_n bereits im vorigen Paragraphen benutzt wurden. Durch Vergleich beider findet sich $\varkappa$, *und wir erhalten solcherweise in den fünf in Rede stehenden Fällen als Darstellungen der transformierten Discriminante:*

$$(5) \qquad \begin{cases} \Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{2}\right) = 2^6\, \tau_2(\omega)\, \Delta(\omega_1, \omega_2), \\ \Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{3}\right) = 3^6 \tau_3^2(\omega)\, \Delta(\omega_1, \omega_2), \\ \Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{5}\right) = \tau_5^4(\omega)\, \Delta(\omega_1, \omega_2), \\ \Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{7}\right) = \tau_7^6(\omega)\, \Delta(\omega_1, \omega_2), \\ \Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{13}\right) = \tau_{13}^{12}(\omega)\, \Delta(\omega_1, \omega_2). \end{cases}$$

Wir haben hier auch gleich noch die für $n = 13$ eintretende Formel angeschlossen, welche man mit Hülfe der Gleichung (16) des vorigen Paragraphen leicht verificiert.

Das Transformationspolygon $F_{\psi(4)}$ hat drei Spitzen, den Werten $D = 1, 2, 4$ entsprechend. Da für dieselben $\frac{D}{t} = 1, 1, 4$ wird, so hängen an diesen drei Stellen in F_ψ bez. 1, 1 und 4 Doppeldreiecke zusammen. In der That bestätigt dies der Anblick der Fig. 82 (I p. 355), deren vierter Teil F_ψ ist; wir finden dabei, dass den Ecken $\omega = i\infty, 0, \frac{1}{2}$ bez. die Zahlen $D = 1, 4, 2$ zugeordnet sind. Nach (3) wird also die zu betrachtende Function (1) an den drei Stellen $\omega = i\infty, 0, \frac{1}{2}$ in F_ψ bez. dreifach 0, dreifach ∞ und endlich sein, was wir in den Ansatz zusammenziehen: $F^{(4)}(\omega) = \varkappa_4 \tau_4^3$. Bei $n = 6$ hat $F_{\psi(6)}$, wie man in Fig. 1 p. 42 nachsehen wolle, die vier inäquivalenten Ecken $\omega = i\infty, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$, die man ohne weiteres den Werten $D = 1, 6, 2, 3$ zugeordnet findet; an diesen Stellen wird $F^{(6)}(\omega)$ zufolge (3) bez. gleich $0^5, \infty^5, 0^1, \infty^1$, was unter Rücksicht auf die zugehörigen Werte des Hauptmoduls τ_6 wiederum einen An-

satz liefert, der den bisherigen ganz ähnlich ist. Durch gewohnte Näherungsrechnung bei $\omega = i\infty$ bestimmen wir die in den Ansätzen noch unbekannten multiplicativen Constanten. *Es kommen auf die Weise für $n = 4$ und 6 als Darstellungen der transformierten Discriminante:*

$$(6)\qquad \begin{cases} \Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{4}\right) = 2^9 \tau_4^3(\omega)\,\Delta(\omega_1, \omega_2), \\ \Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{6}\right) = 2^4 \tau_6^5 \cdot \frac{2\tau_6 + 9}{\tau_6 + 4} \cdot \Delta(\omega_1, \omega_2). \text{*)} \end{cases}$$

§ 10. Zusammenstellung weiterer Formeln für die transformierten Δ.

Bevor wir die Formeln des vorigen Paragraphen zur Untersuchung der Transformationsgleichungen für Δ verwenden, leiten wir aus ihnen eine Reihe weiterer Gleichungen ab, welche die transformierten Δ mit den uns von früher her bekannten Modulfunctionen in Beziehung setzen.

Im Falle $n = 2$ führen wir an Stelle von τ_2 wieder den Ausdruck dieses Hauptmoduls in λ [cf. Formel (1) § 8] ein, üben auf diese Gleichung erstlich die Modulsubstitution T, dann aber auf die so entspringende Formel die Substitution S aus und erhalten solcherweise die drei gleichberechtigten Relationen:

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{2}\right) = \frac{16\,\Delta}{\lambda(\lambda - 1)}, \\ \Delta\left(\frac{\omega_1}{2}, \omega_2\right) = \frac{16\lambda^2\Delta}{1 - \lambda}, \\ \Delta\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \omega_2\right) = \frac{16(1 - \lambda)^2\Delta}{\lambda}, \end{cases}$$

wobei rechts als Argumente von λ und Δ stets ω_1 und ω_2 gedacht sind. Durch Quotientenbildung aus diesen Formeln entspringen bemerkenswerte und anderweitig sehr häufig benutzte Darstellungen für die drei in Band I p. 665 eindeutig definierten Modulfunctionen der sechzehnten Stufe:

---

*) Für die weiter in den Fällen zusammengesetzter n des Geschlechtes $p = 0$ sich anschliessenden Formeln muss man eine ergänzende Mitteilung berücksichtigen, welche Hr. Gierster auf Veranlassung der Untersuchungen von Hrn. Kiepert seiner p. 51 genannten Abhandlung hat folgen lassen. Diese Ergänzung ist in Bd. 26 der Mathem. Annalen (1886) unter dem Titel: *Bemerkung zu dem Aufsatze „Notiz über Modulargleichungen bei zusammengesetztem Transformationsgrad“* erschienen.

$$(2)\quad \begin{cases} \sqrt[8]{-\lambda} = \sqrt[24]{\dfrac{\Delta\left(\frac{\omega_1}{2}, \omega_2\right)}{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{2}\right)}}, \\ \sqrt[8]{1-\lambda} = e^{-\frac{\pi i}{24}} \sqrt[24]{\dfrac{\Delta\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}, \omega_2\right)}{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{2}\right)}}, \\ \sqrt[8]{\dfrac{\lambda}{\lambda-1}} = e^{+\frac{\pi i}{24}} \sqrt[24]{\dfrac{\Delta\left(\frac{\omega_1}{2}, \omega_2\right)}{\Delta\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}, \omega_2\right)}}. \end{cases}$$

Die rechter Hand gezogenen 24sten Wurzeln sind hier dadurch fixiert gedacht, dass wir bei $\omega = i\infty$ die Annäherung

$$(3)\quad \lim \sqrt[24]{\Delta} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}}\, r^{\frac{1}{24}}$$

vorschreiben. Nach I p. 674 ist neben den drei Grössen (2) auch noch $\sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)}$ Congruenzmodul, und zwar von der Stufe 48; (1) liefert die Darstellung:

$$(4)\quad \sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)} = \sqrt[24]{\frac{16\,\Delta(\omega_1, \omega_2)}{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{2}\right)}}$$

und entsprechende Formeln für die gleichberechtigten Moduln.

Diesen sehr bekannten Formeln reihen sich weitere der dritten Stufe adjungierte an, die weniger verbreitet sind. Wir gewinnen da aus (5) § 9 sogleich die Relation:

$$(5)\quad \sqrt[12]{\xi^3 - 1} = \sqrt[4]{3}\sqrt[24]{\frac{\Delta(\omega_1, \omega_2)}{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{3}\right)}},$$

sowie durch Ausübung von S und T auf dieselbe nach kurzer Rechnung:

$$(6)\quad \begin{cases} \sqrt[3]{\xi - 1} : \sqrt[3]{\xi - \varrho} : \sqrt[3]{\xi - \varrho^2} \\ = \sqrt[24]{\Delta}\left(\frac{\omega_1}{3}, \omega_2\right) : e^{-\frac{\pi i}{36}} \sqrt[24]{\Delta}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{3}, \omega_2\right) : e^{\frac{\pi i}{36}} \sqrt[24]{\Delta}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{3}, \omega_2\right). \end{cases}$$

Hier treten linker Hand gerade nur diejenigen der dritten Stufe adjungierten Wurzelausdrücke auf, die wir in I p. 663 als Congruenzmoduln erkannten.

Eine wesentlich anders geartete Formelgruppe gewinnen wir in den Fällen $n = 5, 7$ von den bezüglichen Gleichungen (5) des vorigen Paragraphen aus.

Für $n = 5$ folgt unter Benutzung von I p. 640 (5) sofort:

$$\frac{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{5}\right)}{\Delta^5(\omega_1, \omega_2)} = \left(\frac{\tau}{\Delta}\right)^4 = (125\,\zeta_1{}^6\zeta_2{}^6)^4,$$

woraus durch Ausziehen der 24sten Wurzel und Benutzung von I p. 643 (1) sich die Relationen ergeben:

$$(7)\qquad \sqrt[24]{\frac{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{5}\right)}{\Delta^5(\omega_1, \omega_2)}} = \sqrt{5}\,\zeta_1\zeta_2, \quad \sqrt[24]{\frac{\Delta(5\omega_1, \omega_2)}{\Delta^5(\omega_1, \omega_2)}} = -A_0\,{}^{*)}.$$

Interessant gestaltet sich auch die Beziehung der hier in Rede stehenden Grösse zu den Teilwerten des vorigen Kapitels. Wir haben dabei die Formeln (12) p. 21 und (7) p. 33 heranzuziehen und finden:

$$(8)\qquad \sqrt[8]{\frac{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{5}\right)}{\Delta^5(\omega_1, \omega_2)}} = \frac{1}{\wp_{01}' \cdot \wp_{02}'}, \quad \sqrt[24]{\frac{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{5}\right)}{\Delta^5(\omega_1, \omega_2)}} = \sigma_{01}\sigma_{02}.$$

Die für $n = 7$ auf analogem Wege abzuleitenden Formeln zeigen mit den soeben gewonnenen die grösste Ähnlichkeit; z. B. finden wir da, ohne noch einmal die Einzelheiten der Rechnung hier vorzuführen:

$$(9)\qquad \sqrt[24]{\frac{\Delta(7\omega_1, \omega_2)}{\Delta^7(\omega_1, \omega_2)}} = A_0, \quad \sqrt[24]{\frac{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{7}\right)}{\Delta^7(\omega_1, \omega_2)}} = -\sigma_{01}\sigma_{02}\sigma_{04}.$$

Die hiermit aufgedeckten Beziehungen der transformierten Δ zu den Teilwerten werden wir späterhin ganz allgemein kennen lernen. Für Primzahlordnung $n = q$ können wir schon jetzt die betreffenden Formeln ohne jede Rechnung angeben dank des Umstandes, dass das Transformationspolygon $F_{\psi(q)}$ nur *zwei* Spitzen $\omega = i\infty$ und $\omega = 0$ hat. Indem wir nämlich unter die transformierte Grösse $\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{q}\right)$ die q^{te} Potenz von $\Delta(\omega_1, \omega_2)$ setzen, kommt eine Modulform $12(q-1)^{\text{ter}}$ Dimension, die zur Γ_ψ gehört und in der einen Spitze, nämlich $\omega = i\infty$, endlich und von Null verschieden ist. Nun betrachte man die 8te Potenz des Productes $\wp_{01}'\wp_{02}' \ldots \wp_{0,\frac{q-1}{2}}'$; dieselbe hat die Dimension $-12(q-1)$, gehört gleichfalls zur Γ_ψ und ist wieder bei $\omega = i\infty$ endlich und von Null verschieden. Da unsere beiden Grössen aber nur in den Spitzen von F_ψ verschwinden oder ∞ werden können, so ist ihr zur Dimension *Null* gehöriges Product eine Modul*function* der Γ_ψ, für deren Null- und Unstetigkeitspunkte zusammen nur noch die *eine* Spitze $\omega = 0$ von Γ_ψ zur Verfügung ist; es folgt so:

---

*) Wir geben nicht immer wieder insbesondere an, dass beim Ausziehen einer Wurzel behufs Bestimmung auftretender Einheitswurzeln eine Näherungsrechnung bei $\omega = i\infty$ durchzuführen ist.

$$\left(\wp'_{01}\wp'_{02}\cdots\wp'_{0,\frac{q-1}{2}}\right)^8\cdot\frac{\Delta\left(\omega_1,\frac{\omega_2}{q}\right)}{\Delta^q(\omega_1,\omega_2)}=\text{const.}$$

Indem man eine völlig analoge Überlegung auf das entsprechend gebildete σ-Product anwendet, kommen unter Gebrauch der numerischen Constanten $\varkappa$ und $\varkappa'$ die beiden Formeln:

$$(10)\quad\begin{cases}\sqrt[8]{\dfrac{\Delta\left(\omega_1,\frac{\omega_2}{q}\right)}{\Delta^q(\omega_1,\omega_2)}}=\dfrac{\varkappa'}{\wp'_{01}\wp'_{02}\cdots\wp'_{0,\frac{q-1}{2}}},\\[2ex]\sqrt[24]{\dfrac{\Delta\left(\omega_1,\frac{\omega_2}{q}\right)}{\Delta^q(\omega_1,\omega_2)}}=\varkappa\cdot\sigma_{01}\sigma_{02}\cdots\sigma_{0,\frac{q-1}{2}}.\end{cases}$$

Es würde ein Leichtes sein, durch unser gewohntes Hülfsmittel der Annäherungsrechnung bei $\omega=i\infty$ auch noch den Wert der hier eintretenden Constanten $\varkappa$, $\varkappa'$ in Erfahrung zu bringen; doch würde uns diese Rechnung nur noch weiter von dem eigentlichen Ziele unserer gegenwärtigen Untersuchung ablenken.

§ 11. Zusätzliche Bemerkungen über die für die transformierten Δ gefundenen Formeln.

In Bd. I p. 623 u. f. haben wir die Modulformen $\sqrt[3]{\Delta}$, $\sqrt[4]{\Delta}$, $\sqrt[12]{\Delta}$ untersucht und in ihnen Congruenzmoduln der Stufen 3, 4 und 12 erkannt. Die Formeln des vorigen Paragraphen, in denen ausschliesslich Congruenzmoduln zur Geltung kommen, legen es nun durchaus nahe, auch die vierundzwanzigste Wurzel der Discriminante $\sqrt[24]{\Delta}$ in Betracht zu ziehen. Es ist $\sqrt[24]{\Delta}$ in den ω_1, ω_2 von $(-\frac{1}{2})^{\text{ter}}$ Dimension und darum vor allen Dingen nicht mehr eine eindeutige Function von ω_1, ω_2 (selbst unter der bei uns immer stattfindenden Voraussetzung, dass ω in der positiven Halbebene verbleibt). Demgegenüber ist es freilich sehr leicht, ω_1, ω_2 solchen Beschränkungen zu unterwerfen, dass $\sqrt[24]{\Delta}$ von den beschränkten Veränderlichen eindeutig abhängt. Denken wir etwa die Ebene ω_2 längs der positiven reellen Axe durchschnitten und verbieten dem ω_2 ein Überschreiten dieses Schnittes, so wird nach dieser Einschränkung leicht ersichtlich nicht nur $\sqrt[24]{\Delta}$, sondern überhaupt jede $\sqrt[n]{\Delta}$, sowie $\log\Delta$, eine eindeutige Function von ω_1, ω_2 werden; wir haben, um dies zu sehen, nur für $\Delta(\omega_1,\omega_2)$ zu schreiben $\omega_2^{-12}\cdot\Delta(\omega,1)$. Wenn wir alsdann die Ausübung einer Modulsubstitution

(1) $$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2$$

derart bewerkstelligen wollen, dass wir die Variabelen von ω_1, ω_2 nach ω_1', ω_2' auf zusammenhängender Bahn sich hinbewegen lassen, ohne dass ω_2 den Schnitt und ω seine reelle Axe überschreitet, *so werden wir dementsprechend eine Formel erhalten:*

(2) $$\sqrt[n]{\Delta}(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = e^{\frac{2\nu\pi i}{n}} \sqrt[n]{\Delta}(\omega_1, \omega_2),$$

wo ν eine, mod. n zu nehmende, eindeutig von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ abhängende ganze Zahl ist.

Gleichwohl passen auf die solcherweise erhaltene Formel (2) *allgemein nicht mehr diejenigen gruppentheoretischen Grundbegriffe der Modullehre, die überall das Princip unserer Überlegungen abgegeben haben.* Combinieren wir nämlich mit (1), n nicht als Teiler von 12 vorausgesetzt, eine zweite Modulsubstitution, so ist es keineswegs erlaubt, in unserer von früherher sehr gewohnten Weise die beiden entsprechenden Formeln (2) gleichfalls zu combinieren, um die Wirkung der dritten Modulsubstitution zu erhalten; denn indem wir auf ω_1, ω_2 in (2) jene zweite Modulsubstitution ausüben und dabei ω_1, ω_2 in bezeichneter Weise einschränken, wird die vom linker Hand eintretenden Argumente $\omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2$ beschriebene Bahn *keineswegs* allgemein wieder jener Beschränkung unterworfen sein, die positive reelle ω_2-Axe nicht zu überkreuzen*).

So fanden wir denn auch innerhalb der Modulgruppe ausgezeichnete Untergruppen des Index n der n^{ten} Stufe *nur* für $n = 2, 3, 4, 6, 12$, und zwar existierten dieselben für $n = 2, 3, 6$ sowohl in der homogenen wie in der nicht-homogenen Γ, für $n = 4$ und 12 aber nur in der homogenen; für alle übrigen Stufen n existierten aber *ausgezeichnete* Gruppen des Index n nicht mehr. Sollen wir also für unsere Untersuchungen diejenige Grenze ziehen, welche durch die Structur der Modulgruppe gegeben ist, so werden wir von einer Betrachtung von $\sqrt[24]{\Delta}$ oder auch von $\sqrt[8]{\Delta}$ absehen. Es ist dies um so bemerkenswerter, als an der hier vorliegenden Stelle die überlieferte Theorie der elliptischen Functionen um einen Schritt weiter geht; in der That betrachtet

*) Wollten wir aber mit Hrn. Dedekind die in der ω-Halbebene eindeutige Function $\eta(\omega) = \sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}} \sqrt[24]{\Delta}$ einführen, so würde nun freilich die Combinationsfähigkeit der Substitutionen im Sinne des Textes wieder eintreten. Dafür aber verändert sich dieses η bei Ausübung einer Substitution im allgemeinen noch um einen von ω abhängenden Factor, so dass eben dieserhalb die consequente Anwendung unserer gruppentheoretischen Grundbegriffe versagen würde.

dieselbe, wie wir gleich noch näher andeuten werden, auch noch die *achte* Wurzel der Discriminante $\sqrt[8]{\Delta}$, die sich doch unserem gruppentheoretisch-eindeutigen Untersuchungsgebiete nicht mehr einfügt. Dass aber dafür unsere Hülfsmittel in diesem letzteren beschränkteren Gebiete geeignet sind, über alle eintretenden Fragen und Gesichtspunkte der Transformationstheorie erschöpfende und sachgemässe Auskunft zu erteilen, mögen zumal auch die Entwicklungen der nachfolgenden Kapitel belegen.

Es soll uns die hiermit bezeichnete Sachlage übrigens nicht abhalten, das Hauptresultat früherer Untersuchungen über $\sqrt[n]{\Delta}$ hier kurz anzuführen, weil dasselbe im engen Zusammenhang mit oben von uns erhaltenen Resultaten steht. Für $n = 8$ ist die in (2) auftretende Zahl ν im wesentlichen durch ältere Untersuchungen Hermite's festgestellt*), die an die lineare Transformation der ϑ-Functionen anknüpfen; für allgemeines n ist die Zahl ν von Dedekind untersucht**), für $n = 24$ haben wir bereits in I p. 628 ausführliche Citate gegeben. Es hat sich dabei ergeben, dass nur für $n = 8$ und damit für $n = 24$ ein Ausdruck für ν aufgefunden werden konnte, in dem neben rationalen ganzen Functionen der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ keine höheren zahlentheoretischen Functionen eingehen, als ein multiplicativ auftretendes Legendre'sches Zeichen; für die übrigen n erschien dies nicht möglich. Dies muss mit Hülfe der I p. 664 u. f. entwickelten Gesichtspunkte über Nichtcongruenzmoduln***) die Formeln des vorigen Paragraphen in neuer Weise verständlich machen. Wenden wir z. B. die beiden Transformationen q^{ter} Ordnung $\omega' = q\omega$ und $\omega' = \frac{\omega}{q}$ an, so wird der *Quotient* der beiden Grössen:

$$\sqrt[n]{\Delta}(q\omega_1, \omega_2), \quad \sqrt[n]{\Delta}(\omega_1, q\omega_2)$$

wiederum unserer Betrachtungsweise zugänglich sein, indem er eine der q^{ten} Stufe *adjungierte* Modulfunction vorstellt. *Aber absolut genommen ist dieselbe, wie man zeigen kann, immer nur dann ein Congruenzmodul, wenn $n = 24$ oder ein Teiler dieser Zahl ist;* in der That stimmt dies überein mit den gesamten, im vorigen Paragraphen gewonnenen Formeln.

Auch für die Entwicklungen in § 9 bieten die hier in Rede stehenden Gesichtspunkte zu einigen Bemerkungen Anlass. Wir lernten dort die ausserordentliche Einfachheit der Primzahlpolygone $F_{\psi(q)}$

---

*) Liouville's Journal, série 2, Bd. 3 (1858).

**) Man sehe die I p. 628 namhaft gemachten Ausführungen desselben in Riemann's Werken p. 438 ff.

***) Man vgl. insbesondere auch den cursiv gedruckten Satz in I p. 668.

kennen, die nur zwei Spitzen hatten. Infolge dessen besassen die geschlossenen Flächen $F_{\psi(q)}$ nur zwei Punkte c, in deren einem die zugehörige Function $\Delta(q\omega_1, \omega_2):\Delta(\omega_1, \omega_2)$ im Grade $(q-1)$ Null, im andern ebenso ∞ wurde, während diese Function sonst allenthalben endlich und nicht-verschwindend war. Man wolle bemerken, *dass ebendieselbe Einfachheit ausserdem auch noch den Ordnungen $n = q^2$, aber auch nur diesen anhaftet**). In der That stellt man $F_{\psi(q^2)}$ aufs leichteste durch q an einander gereihte Polygone $F_{\psi(q)}$ her, wobei dann $F_{\psi(q^2)}$ ausser den Spitzen $i\infty$, 0 noch die $(q-1)$ weiteren

$$\omega = \pm\frac{1}{q}, \quad \pm\frac{1}{2q}, \quad \ldots, \quad \pm\frac{1}{\frac{q-1}{2}\cdot q}$$

bekommt. Aber die letzteren entsprechen den Repräsentanten $A=D=q$, $0<B<q$; in ihnen allen ist also $\Delta(q^2\omega_1, \omega_2):\Delta(\omega_1, \omega_2)$ nach (3) p. 63 endlich und nicht-verschwindend. Da andrerseits bei allen übrigen n weitere Spitzen mit $A \gtrless D$ hinzukommen, so merken wir uns den Satz: *Nur falls die Ordnung n eine Primzahl q oder das Quadrat einer solchen ist, wird auf der geschlossenen F_ψ die Function*

$$\Delta(n\omega_1, \omega_2):\Delta(\omega_1, \omega_2)$$

nur einen Null- und einen Unstetigkeitspunkt haben, und zwar jeweils einen solchen vom Grade $(n-1)$.

Man verfolge nun für die somit charakterisierten Ordnungen n auf der Fläche F_ψ die Grösse:

$$\sqrt[n-1]{\frac{\Delta(n\omega_1, \omega_2)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)}}; \tag{3}$$

sie wird auf der Fläche F_ψ eine unverzweigte Function mit einem einfachen Null- und einem ebensolchen Unstetigkeitspunkte darstellen, die sich aber nach Zurücklegung von Periodenbahnen, allgemein zu reden, um eine multiplicative $(n-1)^{\text{te}}$ Einheitswurzel geändert hat**). Der zutretende Factor ist aber nicht stets notwendig eine primitive $(n-1)^{\text{te}}$ Einheitswurzel, und nun setze man insbesondere den Fall, dass F_ψ das Geschlecht $p=0$ habe. Da es dann überhaupt keine Periodenwege giebt, so ist auch (3) auf der F_ψ eindeutig und giebt uns offenbar eine Hauptfunction derselben. In diesem Falle ist also (3) Hauptmodul der Γ_ψ und damit zugleich Congruenzmodul. Nach obigen Bemerkungen über die Wurzeln aus Δ werden wir demgemäss

*) Die hier und weiterhin betreffs der Primzahlquadrate gegebenen Auseinandersetzungen rühren vom Herausgeber her.

**) Man nennt solche Grössen Wurzelfunctionen der Fläche; vgl. z. B. auf der Fläche $p=1$ die in I p. 158 unter (2) gegebenen Functionen $\tau_{\lambda,\mu}$.

schliessen, dass $(n-1)$ ein Teiler von 24 ist; es folgt dann: Unter den Primzahlordnungen können zum Geschlechte $p = 0$ nur $q = 2, 3, 5, 7, 13$ gehören, unter den Primzahlquadraten nur $q^2 = 4, 9, 25$. Das ist nun in der That in Übereinstimmung mit den Mitteilungen am Schluss des § 5 (p. 52).

§ 12. Einführung der zur ersten Stufe adjungierten formentheoretischen Transformationsgleichungen.

Die bei der n^{ten} Ordnung auftretende, unter (6) p. 54 allgemein angesetzte Transformationsgleichung für Δ war eine zur n^{ten} Stufe gehörende Resolvente vom niedersten, nämlich $\psi(n)^{ten}$ Grade. Um auf der linken Seite derselben der Bequemlichkeit halber mit Modulfunctionen zu thun zu haben, dividieren wir durch $\Delta^{\psi}(\omega_1, \omega_2)$, wodurch besagte Gleichung die Gestalt gewinnt:

$$x^{\psi} + G_1(J) \cdot x^{\psi-1} + \cdots + G_{\psi}(J) = 0. \tag{1}$$

Es ist dabei G_ν eine ganze Function des J höchstens vom ν^{ten} Grade (in G_ψ insbesondere erkennt man leicht eine Constante), während die Wurzeln von (1) die Quotienten der transformierten Discriminante durch die ursprüngliche sind. Trotz ihrer Dimension Null wollen wir übrigens die Gleichung (1) nach wie vor als eine formentheoretische Transformationsgleichung benennen.

Aus den Formeln des § 9 (p. 64) entspringen nun über die Natur der Gleichung (1) die merkwürdigsten Ergebnisse. Wir betrachten etwa nach einander einige der dort herangezogenen Specialwerte n und beginnen mit $n = 5$. Die Gleichung (1) ist im Rationalitätsbereich J irreducibel; *setzt man aber nach* (5) *p.* 64 τ^4 *an Stelle von* x *ein, so entspringt eine reducibele Gleichung, indem ja in der That die früher in* I *p.* 639 *für* τ *aufgestellte Resolvente**):

$$(\tau^2 + 10\tau + 5)^3 - 1728 J\tau = 0 \tag{2}$$

als Factor auftreten muss (aus dem man die übrigen durch wiederholte Anwendung der Operation $\tau' = i\tau$ ableitet). Dieselbe Operationsweise lässt sich noch einmal wiederholen, wie wir schon in Bd. I p. 640 durchgeführt haben: Durch die Substitution $\tau = \varepsilon^3$ wurde aus (2) aufs neue eine reducibele Gleichung, *nur dass wir dabei eine Erweiterung des Rationalitätsbereiches, nämlich auf* $\sqrt[3]{J}$, *vornehmen mussten.* Der eine der drei entspringenden Factoren lautete:

*) Man erinnere sich, dass wir zwischendurch den Hauptmodul τ gegen Bd. I im Zeichen geändert haben.

(3) $$z^6 + 10z^3 - 12\sqrt[3]{J}z + 5 = 0,$$

wobei natürlich $\sqrt[3]{J}$ unter den drei Möglichkeiten in eindeutiger Weise fixiert zu denken ist. Indem wir als erstes, wesentliches Attribut einer Transformationsgleichung ihren Grad $\psi(n)$ ansehen, wollen wir diese Überlegung in den folgenden, übrigens nur vorläufigen Satz zusammenfassen: *Bei Transformation fünfter Ordnung existieren auch für*

(4) $$\tau = \sqrt[4]{\frac{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{5}\right)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)}}, \quad z = \sqrt[12]{\frac{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{5}\right)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)}}$$

Transformationsgleichungen, deren letzterer freilich der Rationalitätsbereich $\sqrt[3]{J}$ *zu Grunde liegt.* Der weitere Fortschritt zur 24sten Wurzel ist aber *nicht* statthaft, wie wir noch sehen werden.

Analoge, jedoch nicht völlig gleiche Verhältnisse finden wir bei $n = 7$ vor. Hier werden wir nach (5) p. 64 in (1) die Substitution $x = \tau^6$ ausführen und erhalten eine reducibele Gleichung 48sten Grades, die in sechs irreducibele Gleichungen zerfällt. Eine darunter ist unsere Resolvente (3) in I p. 745:

(5) $$(\tau^4 + 14\tau^3 + 63\tau^2 + 70\tau - 7)^2 - 1728(J-1)\tau = 0.$$

Setzen wir jetzt aufs neue $\tau = z^2$, so tritt nochmals Reducibilität ein, und die eine der beiden entspringenden irreducibeln Gleichungen ist:

(6) $$z^8 + 14z^6 + 63z^4 + 70z^2 + 24\sqrt{3}\sqrt{J-1}\cdot z - 7 = 0.$$

Also das Resultat: *Bei Transformation siebenter Ordnung giebt es Transformationsgleichungen auch noch für*

(7) $$\tau = \sqrt[6]{\frac{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{7}\right)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)}}, \quad z = \sqrt[12]{\frac{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{7}\right)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)}};$$

für die letztere muss jedoch der Rationalitätsbereich auf $\sqrt{J-1}$ *erweitert werden.*

Endlich ist im Falle der Transformation dreizehnter Ordnung nach der letzten Formel-(5) p. 64:

(8) $$\tau_{13} = \sqrt[12]{\frac{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{13}\right)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)}}.$$

Hier also giebt es für die zwölfte *Wurzel* (8) *eine Transformationsgleichung, und zwar ohne dass eine Erweiterung des Rationalitätsbereichs von* (1) *erforderlich wäre.*

Gleichungen ψ^{ten} Grades für die transformierten Wurzeln aus Δ, wie wir sie nun fanden, wollen wir jetzt allgemein als *der ersten Stufe adjungierte Transformationsgleichungen* benennen. Wir sehen durch Vergleich mit Bd. I, dass dieselben für $n = 5$ und 7 die einfachsten Resolventen ψ^{ten} Grades liefern, die es für diese Stufen giebt. Um so mehr werden wir jetzt auch für allgemeinere Stufenzahlen die Transformation der Wurzeln aus Δ für die Gewinnung zweckmässiger Resolventen ψ^{ten} Grades verwerten. Wir fügen in diesem Betracht sogleich für $n = 25$ das folgende, aus dem vorigen Paragraphen unmittelbar entspringende Resultat an. Es ist im Falle $n = 25$ das Transformationspolygon F_ψ vom Geschlechte $p = 0$, und als zugehörigen Hauptmodul haben wir:

$$\tau_{25} = \sqrt[24]{\frac{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{25}\right)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)}}. \tag{9}$$

Es existiert sonach bei $n = 25$ sogar für die 24ste Wurzel der Discriminante eine Transformationsgleichung, und zwar ist auch hier keinerlei Erweiterung des ursprünglichen Rationalitätsbereichs erforderlich.

§ 13. Fundamentalsätze über die Existenz der zur ersten Stufe adjungierten Transformationsgleichungen in den Fällen $n = q$ und $n = q^2$.

Die mannigfachen Angaben des vorigen Paragraphen lassen sich leicht zu einer einheitlichen Gesamtauffassung vereinen, die wir hier dadurch geben wollen, dass wir für Primzahlordnung q, sowie Primzahlquadratordnung q^2 die Frage nach der Existenz der in Rede stehenden Gleichungen vollständig erledigen. Wir haben dabei einen sehr wesentlichen Gebrauch von der Gleichung

$$\sqrt[8]{\frac{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right)}{\Delta^n(\omega_1, \omega_2)}} = \frac{n}{\wp'_{01}\wp'_{02}\cdots\wp'_{0,\frac{n-1}{2}}} \tag{1}$$

zu machen, die wir am Schlusse des zehnten Paragraphen (p. 68) für Primzahlen $n = q$ bewiesen haben*). Späterhin werden wir dieselben überhaupt für ungerade Zahlen n beweisen; zunächst genügt es, ihre Gültigkeit auch noch im Falle $n = q^2$ einzusehen. Letzteres gelingt

*) Durch diese Formel charakterisiert sich die Transformationsgleichung für $\sqrt[8]{\Delta} : \sqrt[8]{\Delta^n}$ unmittelbar als Resolvente der Teilungsgleichung für die $\wp'$, worauf wir schon früher (p. 53) Bezug nahmen.

leicht infolge der einfachen Gestalt, welche das Polygon $F_{\psi(q^2)}$ bezitzt (cf. oben p. 70). Man wolle nämlich nach den bekannten Regeln feststellen, wie sich der einzelne Teilwert $\wp'_{0\mu}$ in der Spitze $\pm \frac{1}{\nu q}$ des Polygons verhält, und wird leicht bemerken, dass das Product im Nenner von (1) an besagter Stelle des Polygons im Grade $\frac{q^2-1}{8}$ verschwindet. Links können wir schreiben:

$$\sqrt[8]{\frac{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{q^2}\right)}{\Delta^{q^2}(\omega_1, \omega_2)}} = \Delta^{-\frac{q^2-1}{8}} \cdot \sqrt[8]{\frac{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{q^2}\right)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)}},$$

und es bleibt der zweite Factor rechts an bezeichneter Stelle endlich und von Null verschieden. Hiermit sind wieder alle Mittel zu dem Schlusse gegeben, dass die linke Seite von (1), mit dem $\wp'$-Producte multipliciert, eine Function des $F_{\psi(q^2)}$ liefert, die auf diesem Polygon weder verschwindet, noch unendlich wird.

Jetzt sei g eine Primitivwurzel von q^2, n hingegen entweder die Zahl q oder q^2. Es ist dann die Operation V:

$$(2) \qquad V: \quad \omega_1' \equiv g^{-1}\omega_1, \quad \omega_2' \equiv g\omega_2, \quad (\text{mod. } n)$$

von der Periode $\varphi(n)$, bez. als nicht-homogene Substitution von der Periode $\frac{1}{2}\varphi(n)$, und sie führt, mit S combiniert, in bekannter Weise zur Γ_ψ. Das Product P_n im Nenner der rechten Seite von (1) wollen wir daraufhin in den beiden hier vorliegenden Fällen $n = q$ und $n = q^2$ so anordnen:

$$(3) \qquad P_q = \prod_{\nu=0}^{\frac{1}{2}\varphi(q)-1} \wp'_{0,g^\nu}, \qquad P_{q^2} = \prod_{\nu=0}^{\frac{q^2-q}{2}-1} \wp'_{0,g^\nu} \prod_{\nu'=0}^{\frac{q-3}{2}} \wp'_{0,g^{\nu'}q},$$

wobei links die zu $n = q$, rechts die zu $n = q^2$ gehörenden Teilwerte gemeint sind.

Nach diesen Vorbereitungen kehren wir zu unserer Hauptfrage zurück und bemerken zunächst, dass wir an Stelle der Resolventen (3), (6) § 12 bereits in I l. c. solche Resolventen gesetzt hatten, die freilich nicht mehr die nullte Dimension in ω_1, ω_2 zeigten, dafür aber eine Erweiterung des ursprünglichen Rationalitätsbereichs g_2, g_3 nicht erforderten. Das kommt jetzt einfach darauf hinaus, dass wir an Stelle der Wurzeln aus $\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right) : \Delta(\omega_1, \omega_2)$ vielmehr diejenigen aus $\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right) : \Delta^n(\omega_1, \omega_2)$ setzen. Da wir ungerades n haben, so gehört

$$\sqrt[24]{\frac{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right)}{\Delta^n(\omega_1, \omega_2)}} \tag{4}$$

als eindeutige Modulform in den Kreis unserer Betrachtungen hinein; eine weitere Wurzelziehung aber ist im allgemeinen nicht statthaft.

Um jetzt in principieller Weise über die Existenz von Transformationsgleichungen fraglicher Art zu entscheiden, müssen wir das Verhalten der Grösse (4) und ihrer Potenzen gegenüber den Modulsubstitutionen in Betracht ziehen. Wir nehmen dabei $q > 3$ an, da in der That der Fall $q = 3$ durch unsere früheren Einzeluntersuchungen als erledigt angesehen werden kann, und discutieren zunächst die dritte Potenz der Grösse (4), die nach (1), von einem numerischen Factor abgesehen, mit dem reciproken Werte des unter (3) gegebenen Productes P_q bez. P_{q^2} identisch ist. Wie man nun sieht, ändert die Operation S weder P_q noch P_{q^2}. Anders die unter (2) geschriebene Operation V: Unter Ausübung dieser letzteren geht $\wp'_{0,g^\nu}$ in $\wp'_{0,g^\nu+1}$ über, und da

$$g^{\frac{1}{2}\varphi(q)} \equiv -1, \text{ (mod. } q), \quad g^{\frac{1}{2}\varphi(q^2)} \equiv -1, \text{ (mod. } q^2)$$

wird, andrerseits aber stets

$$\wp'_{0,-1} = -\wp'_{0,1}$$

ist, so wird bei Ausübung von V das Product P_q das Zeichen wechseln, P_{q^2} dagegen unverändert bleiben: *Gegenüber der Γ_ψ bleibt bei $n = q^2$ die dritte, bei $n = q$ aber erst die sechste und noch nicht die dritte Potenz des Moduls* (4) *unverändert.*

Um die achte Potenz der Grösse (4) zu erledigen, gehen wir auf die in I p. 627 bewiesene Formel (14) zurück und üben daraufhin eine der Γ_ψ angehörende Operation aus, für welch' letztere also $\frac{\gamma}{n}$ eine ganze Zahl ist. Man bemerkt sofort, dass die fragliche achte Potenz den Factor:

$$\varrho^{\left(\alpha^2+\left(\frac{\gamma}{n}\right)^2\right)\left(\alpha\beta n+\frac{\gamma}{n}\delta\right)-n(\alpha^2+\gamma^2)(\alpha\beta+\gamma\delta)} \tag{5}$$

annimmt, und hier ist nun zufolge unserer Voraussetzung eines gegen 3 relativ primen n der Exponent stets eine durch 3 teilbare ganze Zahl.

Indem wir zusammenfassen, folgt:

Für Primzahlquadratordnung $n = q^2$ bleibt die Grösse (4) *gegenüber der $\Gamma_{\psi(q^2)}$ durchaus unverändert, für Primzahlordnung $n = q$ bleibt nur erst das Quadrat der jetzt in Betracht kommenden Grösse* (4) *gegenüber der zugehörigen $\Gamma_{\psi(q)}$ unverändert.*

Es existieren demgemäss bei Primzahlquadratordnung Transforma-

tionsgleichungen für die 24ste *Wurzel der Discriminante**), *bei Primzahlordnung selbst aber nur erst für die* 12te.

Dass natürlich damit auch für alle diejenigen Wurzeln, deren Grade 24 bez. 12 teilen, Transformationsgleichungen existieren, brauchen wir nicht noch besonders auszuführen. Setzen wir endlich hinzu: sofern wir hier stets vom Quotienten der transformierten Discriminante und der n^{ten} Potenz der ursprünglichen ausgehen, fallen die Coefficienten aller dieser Transformationsgleichungen rational in g_2 und g_3 aus. — Ein Teil der Specialsätze des vorigen Paragraphen hat sich solcherweise unter allgemeine Regeln subsumieren lassen**).

§ 14. Gestalt der Transformationsgleichungen für die Wurzeln aus Δ.

Unseren eingehenderen Betrachtungen über die äussere Gestalt der Transformationsgleichungen für die Wurzeln aus Δ schicken wir einen sehr einfachen formentheoretischen Satz voraus, der auch in zahlreichen Untersuchungen des folgenden Abschnitts eine fundamentale Rolle spielen wird. Es gilt nämlich: *Eine ganze rationale Function* $G(g_2, g_3)$ *von* g_2, g_3, *die bei* $\omega = i\infty$ *mit* r^ν *proportional wird, enthält den Factor* Δ^ν. Wählt man nämlich zwei möglichst kleine, nicht-negative ganze Zahlen α, β derart, dass die Dimension von $g_2^\alpha g_3^\beta G$ ein Multiplum von 12, etwa -12λ, wird, und dividiert durch Δ^λ, so entspringt eine *ganze* Function von J, die zufolge ihres Verhaltens bei $\omega = i\infty$ den $(\lambda - \nu)^{\text{ten}}$ Grad in J besitzt. Es besteht also die Gleichung

$$\frac{g_2^\alpha g_3^\beta G(g_2, g_3)}{\Delta^\lambda} = \frac{G'(g_2, g_3)}{\Delta^{\lambda - \nu}}$$

identisch; ebendeshalb muss aber die Function G' durch $g_2^\alpha g_3^\beta$ teilbar sein, und wir erhalten

$$G(g_2, g_3) = \Delta^\nu G''(g_2, g_3), \tag{1}$$

wobei nun offenbar G'' bei $\omega = i\infty$ einer endlichen, nicht-verschwindenden Grenze zustrebt.

Nachdem wir diesen Satz festgestellt haben, besprechen wir zuvörderst den wichtigeren Fall der Primzahltransformation $n = q$. Die einfachsten Resolventen werden uns von einer möglichst hohen Wurzel

---

*) Für $n = 9$ tritt leicht ersichtlich eine Gleichung für die 8te Wurzel an deren Stelle.

**) Die im Texte gegebene functionentheoretische Begründung der Transformationsgleichungen für die Wurzeln aus Δ, insbesondere auch die dabei durchgeführte Berücksichtigung der Primzahlquadrate q^2 rührt vom Herausgeber her; die ausgedehnte Litteratur über unseren Gegenstand stellen wir erst am Schlusse des vorliegenden Kapitels zusammen.

aus Δ geliefert; also ziehen wir gleich die zwölfte heran. Wir schreiben:

(2)
$$x = \sqrt[12]{\frac{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{q}\right)}{\Delta^q(\omega_1, \omega_2)}}$$

und bemerken, dass zufolge (1) p. 73 $\frac{1}{x}$ und also auch die damit gleichberechtigten Grössen *ganze* algebraische Modulformen sind. Es genügt also x^{-1} einer Gleichung $\psi = (q+1)^{\text{ten}}$ Grades, deren Coefficienten *ganze* Functionen von g_2, g_3 sind, und man erkennt insbesondere im Absolutglied bis auf eine multiplicative Constante leicht die $\frac{\psi(q-1)}{12} = \left(\frac{q^2-1}{12}\right)^{\text{te}}$ Potenz von $\Delta(\omega_1, \omega_2)$. Ohne weiteres folgt daraus: *Die Grösse* (2) *ist Wurzel der Gleichung:*

(3)
$$x^{q+1} + \frac{G_1(g_2, g_3)}{\Delta^{\lambda_1}} x^q + \cdots + \frac{G_q(g_2, g_3)}{\Delta^{\lambda_q}} x + c\Delta^{-\frac{q^2-1}{12}} = 0,$$

in deren Coefficienten die G_i ganze rationale Functionen von g_2, g_3 sind; wir denken aus den G alle etwa zunächst eintretenden Factoren Δ herausgenommen, worauf die G bei $\omega = i\infty$ gegen eine endliche, nicht-verschwindende Grenze convergieren, während die ganzzahligen Exponenten $\lambda \leq \frac{q^2-1}{12}$ sind. Die hiermit gewonnene Resolvente $(q+1)^{\text{ten}}$ Grades q^{ter} Stufe ist die denkbar günstigste, die uns bislang entgegen getreten ist; für $q = 5$ und 7 giebt sie geradezu diejenigen Resolventen sechsten und achten Grades, die wir in I p. 640 (7) und p. 747 (4) diesen Stufen als einfachste überhaupt existierende Resolventen zuwiesen.

Um Gleichung (3) in eine solche von der Dimension Null umzusetzen, substituiere man

(4)
$$y = x\Delta^{\frac{q-1}{12}} = \sqrt[12]{\frac{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{q}\right)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)}}$$

und findet für y die Gleichung:

(5)
$$y^{q+1} + \frac{G_1(g_2, g_3)}{\Delta^{\lambda_1 - \frac{q-1}{12}}} \cdot y^q + \cdots + \frac{G_q(g_2, g_3)}{\Delta^{\lambda_q - q\cdot\frac{q-1}{12}}} \cdot y + c = 0.$$

Da haben wir offenbar eine Fallunterscheidung für q modulo 12 zu treffen: Für $q \equiv 1$, (mod. 12) sind die Coefficienten von (5) rational in g_2, g_3; ist aber $q \equiv 5, 7$ oder endlich 11, so findet sich bez. noch $\sqrt[3]{\Delta}$, $\sqrt{\Delta}$ oder endlich zugleich $\sqrt[3]{\Delta}$ und $\sqrt{\Delta}$. Da die Coefficienten übrigens von der Dimension Null sind und im Nenner nur eine Potenz von Δ steht, so folgt: *Je nachdem* $q \equiv 1, 5, 7, 11$, (mod. 12) *ist, sind*

die Coefficienten von (5) *bez. rational und ganz in* J, $\sqrt[3]{J}$, $\sqrt{J-1}$ *oder endlich in* $\sqrt[3]{J}$ *und* $\sqrt{J-1}$ *zusammengenommen.* Hiermit haben sich eine Reihe weiterer Einzeleigenschaften der Gleichungen des § 12 unter allgemeine Regeln subsumieren lassen.

Endlich gedenken wir noch einer dritten Gestalt der Gleichung (3), derjenigen nämlich, die durch die Substitution

$$(6)\qquad z = x\Delta^{\frac{q}{12}} = \sqrt[12]{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{q}\right)}$$

entspringt. Wir erhalten

$$(7)\qquad z^{q+1} + \Delta^{\frac{q}{12}-\lambda_1} G_1 z^q + \Delta^{2\frac{q}{12}-\lambda_2} G_2 z^{q-1} + \cdots + c\Delta^{\frac{q+1}{12}} = 0,$$

und hier ist das Wichtige, dass die Exponenten $\frac{\nu q - 12\lambda_\nu}{12}$ von Δ durchgehends *positive* Zahlen sein müssen, da z eine *ganze* algebraische Modulform ist. Um (7) noch etwas zweckmässiger zu schreiben, bestimmen wir die ganze Zahl $\varkappa_\nu$ durch die Bedingungen:

$$(8)\qquad \nu q - 12\lambda_\nu \equiv \varkappa_\nu, \ (\text{mod. } 12), \quad 0 \leq \varkappa_\nu < 12$$

und schreiben zugleich $\Delta^{\frac{\nu q - 12\lambda_\nu - \varkappa_\nu}{12}} G_\nu(g_2, g_3) = G_\nu'(g_2, g_3)$; es geht dann (7) über in:

$$(9)\qquad z^{q+1} + \Delta^{\frac{\varkappa_1}{12}} G_1' z^q + \Delta^{\frac{\varkappa_2}{12}} G_2' z^{q-1} + \cdots + c\Delta^{\frac{q+1}{12}} = 0.$$

Die Dimension des $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Coefficienten $\Delta^{\frac{\varkappa_\nu}{12}} G_\nu'$ in den ω_1, ω_2 ist $-\nu$; ist also G_ν' von der Dimension $-\delta_\nu$, so haben wir die Gleichung $\delta_\nu = \nu - \varkappa_\nu$. Hiermit haben wir einen interessanten formentheoretischen Ansatz für (9) gewonnen, wobei es insbesondere ins Gewicht fällt, dass alle diejenigen G_ν' identisch verschwinden müssen, für welche δ_ν nicht eine der Zahlen 0, 4, 6, 8, ... ist. So erhalten wir z. B. im Falle $q = 12h + 5$ als Anfangswerte $\varkappa_1 = 5$, $\varkappa_2 = 10$, $\varkappa_3 = 3, \ldots$, $\delta_1 = -4$, $\delta_2 = -8$, $\delta_3 = 0, \ldots$ und finden solcherweise sogleich den auf die Form (3) umgerechneten Ansatz:

$$(10)\qquad \begin{aligned} &x^{q+1} + \frac{\alpha}{\Delta^{3h+1}} x^{q-2} + \frac{\beta g_2}{\Delta^{5h+2}} x^{q-4} + \frac{\gamma}{\Delta^{6h+2}} x^{q-5} + \frac{\delta g_3}{\Delta^{8h+3}} x^{q-7} \\ &+ \frac{\varepsilon}{\Delta^{9h+3}} x^{q-8} + \frac{\zeta g_2^2}{\Delta^{10h+4}} x^{q-9} + \frac{\eta g_2}{\Delta^{11h+4}} x^{q-10} + \cdots \\ &+ \frac{\vartheta}{\Delta^{12h^2+10h+2}} = 0, \end{aligned}$$

wobei die $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ numerische Factoren sind. Für den einfachsten

Fall $h = 0$ finden wir unsere alte Resolvente sechsten Grades wieder, die in der That die Gestalt besass (cf. I p. 640 (7)):

$$(11) \qquad x^6 + \frac{\alpha}{\Delta} x^3 + \frac{\beta g_2}{\Delta^2} x + \frac{\gamma}{\Delta^2} = 0.$$

Für die Berechnung der numerischen Coefficienten in (10) könnte man wieder dieselben Regeln verwerten, die wir bereits bei den Teilungsgleichungen u. s. w. auseinandersetzten. Inzwischen versparen wir die Besprechung von weiteren Einzelbeispielen bis in den nächsten Abschnitt, wo wir mit erneuten Hülfsmitteln und unter erweiterten Gesichtspunkten den hier in Rede stehenden Resolventen wieder begegnen werden. —

Welche Besonderheiten den nun gegebenen Entwicklungen gegenüber für den Fall $n = q^2$ eintreten, wird man sofort ergänzen. Wir haben hier vor allen Dingen

$$(12) \qquad x = \sqrt[24]{\frac{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{q^2}\right)}{\Delta^{q^2}(\omega_1, \omega_2)}}$$

als Wurzel einer Resolvente $(q^2 + q)^{ten}$ Grades zu setzen, den einzigen Fall $q = 3$ ausgenommen. Die Coefficienten dieser Resolvente sind rational in g_2, g_3 und besitzen dieselbe Form, die wir bereits in (3) kennen lernten. Da $q^2 \equiv 1$ (mod. 24) ist, so werden die Coefficienten der (5) entsprechenden Resolvente nullter Dimension *ohne jene Fallunterscheidung rationale ganze Functionen von J.* Für $q^2 = 25$ ergiebt sich übrigens die fertige Gleichung in der zuletzt gemeinten Gestalt zufolge (9) p. 74 unmittelbar aus jenen Relationen, welche Hr. Gierster l. c. für diese Ordnung berechnet hat.

§ 15. Historische Notizen über die zur ersten Stufe adjungierten Transformationsgleichungen.

Auf die Betrachtung der Transformationsgleichungen (3) etc. wurden die Herren Kiepert und Klein von verschiedenen Seiten aus ungefähr zu der gleichen Zeit geführt. Unter den Arbeiten von Hrn. Kiepert (die von der Theorie der doppeltperiodischen Functionen ausgehen und ausgedehnten Gebrauch von den Gleichungen (10) p. 68 sowie von analogen Relationen machen) ist zunächst zu nennen diejenige über *Auflösung der Gleichungen fünften Grades* (Göttinger Nachrichten 1878 oder auch Crelle's Journal Bd. 87), wo der Fall $n = 5$ behandelt wird, dann drei Arbeiten *„Zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen“* (Crelle's Journal Bd. 87 und 88, 1879; Bd. 95,

1883), die den Fall einer beliebigen Primzahl betreffen. In der bereits auf p. 9 des vorliegenden Bandes genannten Arbeit „*Über Teilung und Transformation der elliptischen Functionen*" (Math. Ann. Bd. 26, 1885) dehnt Hr. Kiepert seine Untersuchungen auf die allgemeinen Gleichungen aus, welche für den Fall eines beliebigen Transformationsgrades an Stelle der Gleichung (5) treten, und entwickelt insbesondere die Theorie der im Falle eines Primzahlquadrates auftretenden Gleichungen (12). Unter den Arbeiten Klein's kommt ausser der zu Anfang des Kapitels genannten (in welcher alle vorstehend für die Fälle $n = 5, 7, 13$ entwickelten Überlegungen mitgeteilt sind) noch ein an Hrn. Brioschi gerichteter Brief vom 30. Dec. 1878 in Betracht*), in welchem Hr. Klein insbesondere den vorhin an Gleichung (9) geknüpften formentheoretischen Ansatz bespricht, auch die Gleichung für $n = 11$ zum ersten Male mitteilt**). Ausgeführt wurden die in diesem Briefe berührten Ideen sodann von Hrn. Hurwitz in dessen oft genannter Arbeit „*Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen und Theorie der Multiplicatorgleichungen erster Stufe*" (Math. Ann. 18, 1881); es wird dort die Gleichung (5) für den Fall eines beliebigen zu 12 relativ primen n betrachtet, und zwar ist im Gegensatz zu den von uns soeben durchgeführten Überlegungen die Methode die, dass die ursprüngliche und transformierte zwölfte Wurzel der Discriminante, $\sqrt[12]{\Delta}$, in ihrem Verhalten gegenüber beliebigen Modulsubstitutionen untersucht wird. Dabei wird insbesondere das Verhalten der Transformationsgleichung für $J = 0$ und $J = 1$ erläutert. — Die Benennung „Multiplicatorgleichung erster Stufe", welche im Titel der Hurwitz'schen Arbeit auftritt und auch von Hrn. Klein gebraucht wird, bezieht sich darauf, dass bei der Transformation n^{ter} Ordnung des in Weierstrass'scher Form vorgelegten elliptischen Integrals erster Gattung, nach Normierung des Integrals durch Zufügung des Factors $\sqrt[12]{\Delta}$, der Quotient $\sqrt[12]{\frac{\Delta'}{\Delta}}$ in der That die Bedeutung des „Multipli-

*) Abgedruckt in den Rendiconti del Istituto Lombardo vom 2. Januar 1879, sowie in den Math. Ann. Bd. 15, p. 86—88. Vorläufige Untersuchungen über die in Rede stehenden Gleichungen hatte Hr. Brioschi kurz vorher im neunten Bande der Annali di matematica (ser. 2) gegeben: „*Sopra una classe di equazioni modulari*" (Nov. 1878). Übrigens ist die Transformationsgleichung achten Grades für $n = 7$ in ihrer p. 61 mitgeteilten ursprünglichen Gestalt sowie auch in der Gestalt (6) p. 73 von Hrn. Klein zuerst in zwei der Erlanger Societät vorgelegten Noten vom März und Mai 1878 veröffentlicht worden.

**) Hr. Kiepert hat in seinen citierten Arbeiten eine grosse Reihe weiterer Zahlenbeispiele gegeben, so in Bd. 87 und 95 des Journals die Gleichungen (5) für $n = 17$, 19 und 23, in Bd. 26 der Annalen die Gleichung (12) für $n = 25$ und 49.

cators" bekommt. Ein näheres Eingehen auf die hiermit gemeinte Auffassung bleibt an gegenwärtiger Stelle ausgeschlossen, insofern dieselbe den leitenden Gesichtspunkten unserer Darstellung fremd ist; es muss genügen, dass wir diesbezüglich auf die Abhandlung von Klein in Bd. 14 der Mathematischen Annalen und wegen der analogen, in der Jacobi'schen Theorie auftretenden Gleichungen auf die Lehrbücher über elliptische Functionen verweisen*). Diese letzteren Gleichungen bezeichnet Hr. Klein im Sinne unseres allgemeinen gruppentheoretischen Schemas als Multiplicatorgleichungen zweiter Stufe. Übrigens werden wir den in Rede stehenden Gleichungen, wie schon bemerkt, im nächsten Abschnitte noch einmal begegnen und wesentliche Eigenschaften derselben, für die uns jetzt noch der Ansatz fehlt, kennen lernen. Auch stellen wir dort alle Mittel zur Verfügung, die Gleichung (5), welche sich ja nur auf Primzahltransformation bezieht, für beliebige Ordnungen n zu verallgemeinern.

Die Transformationsgleichung (9) für die zwölfte Wurzel aus Δ nannten wir der ersten Stufe adjungiert; eigentlich ist sie eine zur *zwölften* Stufe gehörige Gleichung. Indem wir aber hierauf Gewicht legen, entspringt der Satz, dass auch für Moduln höherer Stufe unter Umständen Transformationsgleichungen ψ^{ten} Grades existieren können, und dass dieselben gelegentlich einfacher ausfallen, als die Gleichungen der ersten Stufe. Zu der gleichen Bemerkung führt die Theorie der Jacobi'schen Multiplicatorgleichungen, die wir gerade im Vorbeigehen streiften. Von diesem Gesichtspunkte geleitet, werden wir jetzt principiell die Transformation n^{ter} Ordnung *höherer* Stufe zu betrachten haben.

*) Vgl. insbesondere Königsberger, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen*, Leipzig 1874, sowie die Monographie von Joubert, *Sur les équations qui se rencontrent dans la théorie de la transformation des fonctions elliptiques*, Paris 1876. An letzterer Stelle wird das besondere Verhalten, welches die Primzahlquadrate in dieser Theorie zeigen, zum ersten Male erwähnt.

Drittes Kapitel.

Allgemeine Grundlagen für die Transformation n^{ter} Ordnung beliebiger Modulfunctionen.

Bei der Ausdehnung der Transformation n^{ter} Ordnung auf die höheren Stufen, sowie überhaupt auf algebraische Modulfunctionen und Modulformen ist die Gliederung der uns entgegentretenden Verhältnisse eine so mannigfaltige, dass das gegenwärtige Kapitel fast ganz allein einer allgemeinen Betrachtung derselben gewidmet ist. Die zu transformierenden algebraischen Moduln setzen wir vorerst als beliebige voraus und werden dann die durch ihre Transformation entspringenden Grössen und die für dieselben gültigen Relationen gruppentheoretisch und functionentheoretisch allgemein zu charakterisieren haben. Hierbei werden natürlich die von Bd. I her bekannten Congruenzmoduln vornehmlich Berücksichtigung finden müssen; aber wir verschieben die Einzelbetrachtung derselben, welche namentlich die Herstellung von Transformationsgleichungen für Congruenzmoduln höherer Stufe zum Ziel haben wird, bis in das folgende Kapitel. Das wesentlichste Fundament für die Entwicklungen dieses Kapitels, die übrigens in ihrer Gesamtheit erst neuerdings vom Herausgeber durchgeführt wurden, findet sich in der abstract gruppentheoretischen Erörterung der §§ 3 und 4, die wohl auch um ihrer allgemeinen Bedeutung willen einiges Interesse beanspruchen dürften. Zwei Untergruppen von endlichem Index in einer umfassenden Gruppe haben ihrerseits wieder eine Untergruppe von endlichem Index gemein, und es gilt in den beiden genannten Paragraphen, die hierbei eintretenden Verhältnisse allgemein und erschöpfend zu beschreiben, was unseres Wissens trotz der principiellen Bedeutung dieser Frage für die gesamte Gruppentheorie bislang noch nicht geschehen ist. Die Untersuchungen dieses Kapitels dürften aber auch deshalb ein besonderes Interesse für sich haben, weil durch dieselben ein allgemeines Schema geschaffen wird, in welches sich neben anderen, neuen Modulargleichungen, welche an die Theorie der regulären Körper anknüpfen, die seit Jacobi in der

Theorie der elliptischen Functionen wiederholt und ausführlich betrachteten Modulargleichungen für die Wurzeln aus k, k', sowie auch die von Schläfli u. A. eingeführten Modulargleichungen für die Wurzeln aus kk' als specielle Fälle einordnen. Besondere Ausführungen hierüber folgen dann, wie schon bemerkt, erst im nächsten Kapitel.

§ 1. Allgemeiner Charakter einer transformierten Modulfunction.

Es sei $z(\omega)$ eine willkürlich gewählte algebraische Modulfunction; die Untergruppe Γ_μ des endlichen Index μ umfasse alle Modulsubstitutionen, welche $z(\omega)$ in sich überführen. Auf dem Polygon F_μ sei $z(\omega)$ eine ν-wertige Function, und wir setzen noch ausdrücklich voraus, dass diese Function $z(\omega)$ durch keine anderen linearen Substitutionen von ω in sich transformierbar sein soll, als durch die Modulsubstitutionen, welche Γ_μ bilden. Ein Repräsentantensystem dieser Untergruppe sei

$$(1) \qquad 1, \quad V_1, \quad V_2, \quad \ldots, \quad V_{\mu-1},$$

und endlich sei die algebraische Relation zwischen z und J durch

$$(2) \qquad z^\mu + R_1(J)\cdot z^{\mu-1} + \cdots + R_\mu(J) = 0$$

gegeben. Schaffen wir in (2) die Nenner der $R(J)$ durch Multiplication mit einer geeigneten Grösse $G(J)$ fort, so steigt J in der neuen Gestalt dieser Relation bis auf den ν^{ten} Grad.

Indem wir vorab einzig von *eigentlicher* Transformation n^{ter} Ordnung handeln, diese aber sogleich in allgemeinster Gestalt einführen wollen, schreiben wir:

$$(3) \qquad R(\omega) = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}, \quad ad - bc = n,$$

wobei a, b, c, d vier beliebige ganze Zahlen der Determinante n, jedoch ohne einen allen gemeinsamen Teiler, sein sollen. Aus $z(\omega)$ entspringt vermöge der Substitution (3) der transformierte Modul:

$$(4) \qquad z'(\omega) = z\left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d}\right),$$

der im Bereich der positiven Halbebene, wie $z(\omega)$ selbst, eine *eindeutige* Function von ω darstellt. Setzen wir jetzt aber $J'(\omega) = J(R(\omega))$, so haben wir nach (2), sowie auf Grund des vorigen Kapitels (p. 54) die beiden Gleichungen:

$$z'^\mu + R_1(J')\cdot z'^{\mu-1} + \cdots + R_\mu(J') = 0,$$
$$J'^\psi + G_1(J)\cdot J'^{\psi-1} + \cdots + G_\psi(J) = 0,$$

in deren letzter J wie J' bis auf den ψ^{ten} Grad steigt. Eliminieren wir jetzt aus diesen beiden Gleichungen J', so findet sich nach dem

Bézout'schen Theorem über den Grad der Resultante zweier algebraischen Gleichungen eine Relation:

$$(5) \qquad z'^{\mu\psi} + r_1(J) \cdot z'^{\mu\psi - 1} + \cdots + r_{\mu\psi}(J) = 0,$$

deren linke Seite wir kurz $f(z', J)$ nennen wollen. Setzen wir die linke Seite von (5) in eine ganze Function von z' und J um, so steigt J in derselben bis auf den Grad $\nu\psi$.

Zufolge (5) ist z' eine algebraische Function von J; da überdies z' eindeutig in ω ist, *so erkennen wir im transformierten Modul* $z'(\omega)$ *sofort eine algebraische Modulfunction*, deren Gruppe $\Gamma_{\mu'}$ heissen mag. *Der Index* μ' *derselben ist* $\overline{\gtrless} \mu\psi$, *je nachdem die in* (5) *gewonnene Relation irreducibel oder reducibel ist.* Diesen letzteren Gegenstand werden wir ausführlicher zu untersuchen haben; vorab noch folgende allgemeine Betrachtung:

Da z' in (5) auf den Grad $\mu\psi$ steigt, so können wir durch Transformation n^{ter} Ordnung in der gekennzeichneten Weise von $z(\omega)$ aus insgesamt $\mu\psi$, und zwar (wie man gleich sehen wird) $\mu\psi$ im allgemeinen verschiedene Modulfunctionen herstellen. Anders ausgedrückt lautet dies: *Wenn man die Gesamtheit der Transformationen* (3) *in Classen einteilt und in eine Classe immer solche* $R(\omega)$, $R'(\omega)$, ... *vereint, deren Zahlwerte bei beliebig gewähltem* ω *bezüglich der* Γ_μ *relativ äquivalent sind, so giebt es im ganzen* $\mu\psi$ *Classen.* Indem aber die Wurzeln der schon vorhin gebrauchten Gleichung

$$z'^{\mu} + R_1(J') \cdot z'^{\mu - 1} + \cdots = 0$$

offenbar $z(V_0 R(\omega))$, $z(V_1 R(\omega))$, ..., $z(V_{\mu-1} R(\omega))$ sind, die V im Sinne von (1) gebraucht, so werden wir für die genannten $\mu\psi$ Classen ein *Repräsentantensystem* in

$$(6) \qquad V_i R^{(k)}(\omega), \quad i = 0, 1, \ldots, \mu - 1; \quad k = 0, 1, \ldots, \psi - 1$$

besitzen, wofern dabei die R, R', ..., $R^{(\psi-1)}$ eines der im vorigen Kapitel für die Transformation n^{ter} Ordnung erster Stufe fixierten Repräsentantensysteme liefern.

Diese Betrachtungen übertragen sich auf die Modulformen ohne weiteres; wir schliessen hier zweckmässig so: Möge etwa die algebraische Modulform $z(\omega_1, \omega_2)$ zu einer homogenen Γ_μ gehören und dabei definiert sein durch:

$$(7) \qquad z^{\mu} + R_1(g_2, g_3) \cdot z^{\mu - 1} + \cdots + R_\mu(g_2, g_3) = 0.$$

Durch Ausübung der Transformation $R^{(k)}$ geht (7) über in:

$$(8) \qquad z'^{\mu} + R_1(g_2^{(k)}, g_3^{(k)}) \cdot z'^{\mu - 1} + \cdots + R_\mu(g_2^{(k)}, g_3^{(k)}) = 0,$$

und solcher Gleichungen haben wir den ψ Werten von k entsprechend

insgesamt ψ. Die Multiplication derselben führt auf eine Gleichung, die in den ψ Grössenpaaren $g_2^{(k)}$, $g_3^{(k)}$ symmetrisch ist; die Coefficienten dieser Gleichung sind somit Modulformen erster Stufe und als solche rationale Functionen von g_2, g_3. Es folgt also die (5) entsprechende Gleichung

$$(9)\qquad z'^{\mu\psi} + r_1(g_2, g_3)\cdot z'^{\mu\psi-1} + \cdots + r_{\mu\psi}(g_2, g_3) = 0,$$

die wir jetzt wieder $f(z'; g_2, g_3) = 0$ nennen, und an welche sich die bereits aus (5) gezogenen Folgerungen knüpfen. Sind übrigens die Coefficienten von (7) ganz, so gilt dasselbe für die Coefficienten von (9). Da ausserdem (5) aus (2) gerade so hätte hergestellt werden können, wie (9) aus (7), so bemerkt man sofort: *Eine ganze Modulfunction oder -form giebt, transformiert, stets wieder eine ganze Modulfunction bez. -form.* Man sieht dies natürlich leicht auch vermöge einer directen Betrachtung der z' ein.

§ 2. Gruppe des transformierten Moduls z'. Reducibilität der Relation $f(z', J) = 0$.

Die Relation $f(z', J) = 0$ des vorigen Paragraphen, oder auch allgemeiner gesagt, die Gleichung $f(z'; g_2, g_3) = 0$ ist unter Umständen reducibel, was wir jetzt näher zu untersuchen haben. Jedenfalls geht durch gewisse ψ Modulsubstitutionen die Relation (8) § 1 in die ψ gleichberechtigten Relationen über, und solcherweise entspringen aus dem einzelnen z' sofort ψ gleichberechtigte. Natürlich können dann weiter diese μ Systeme zu je ψ Moduln z' zu gewissen Abteilungen oder sogar insgesamt mit einander gleichberechtigt ausfallen, und wir haben als vorläufigen Satz: *Ist die fragliche Relation nicht irreducibel, so zerfällt sie in solche irreducibele Bestandteile, deren Grade in z' durch ψ teilbare Zahlen sind.*

Zur näheren Untersuchung der in Rede stehenden Gleichung im Rationalitätsbereich g_2, g_3 bez. J betrachten wir insbesondere den Modul

$$(1)\qquad z'(\omega) = z(R_0(\omega)) = z(n\omega);$$

dadurch wird freilich unsere Betrachtung vorerst particularisiert, indes werden wir doch leicht von hier aus den allgemeinen Überblick gewinnen. Soll die Modulsubstitution $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ die Function (1) in sich transformieren, so muss zufolge der Gleichung

$$z\left(\frac{\alpha\cdot n\omega + \beta n}{\frac{\gamma}{n}\cdot n\omega + \delta}\right) = z(n\omega)$$

nach den über z gemachten Voraussetzungen γ eine durch n teilbare Zahl sein, worauf alsdann noch die weitere Bedingung hinzukommt, dass die Substitution:

$$v = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta n \\ \gamma n^{-1}, & \delta \end{pmatrix} \tag{2}$$

der Gruppe Γ_μ angehören soll. Ist auf der anderen Seite v' eine Operation der Γ_μ, die zugleich $\beta \equiv 0 \pmod{n}$ hat, so findet man durch Transformation mit R_0 in $R_0^{-1} v' R_0$ eine zu $z'(\omega)$ gehörende Modulsubstitution.

Um also die gesamte zu $z'(\omega)$ gehörende Gruppe zu gewinnen, werden wir auf diejenige Congruenzgruppe n^{ter} Stufe Γ'_ψ zurückgehen, welche durch $\beta \equiv 0$ charakterisiert ist. Die gemeinsame Untergruppe von Γ'_ψ und Γ_μ nennen wir Γ'_ν; ihr Index ν wird offenbar ein gemeinsames Multiplum von μ und ψ sein, etwa

$$\nu = \varkappa \cdot \frac{\mu\psi}{\tau}, \tag{3}$$

wo τ der grösste gemeinsame Teiler von μ und ψ ist, $\varkappa$ aber eine nicht näher bestimmte ganze Zahl, für die man indes aufs leichteste die Bedingung $0 < \varkappa \leq \tau$ feststellt. Ein zur gefundenen Gruppe gehörendes Polygon $F'_{\varkappa \cdot \frac{\mu\psi}{\tau}}$ wird sich ersichtlich aus $\frac{\varkappa\mu}{\tau}$ Polygonen F'_ψ oder auch aus $\frac{\varkappa\psi}{\tau}$ Polygonen F_μ aufbauen lassen.

Transformieren wir nunmehr durch R_0, so geht jedes Polygon F_ψ', für sich genommen, in ein Polygon F_ψ der durch $\gamma \equiv 0 \pmod{n}$ definierten Γ_ψ über: $F_\psi = R_0(F'_\psi)$, das dann natürlich im allgemeinen noch keineswegs aus einer Anzahl *ungeteilter* Moduldreiecke zusammengesetzt erscheint. *Demgegenüber bemerke man für später, dass $F'_\mu = R_0(F_\mu)$ keineswegs allgemein gleichfalls wieder das Polygon einer Untergruppe der Modulgruppe wird;* in der That haben ja nur die Operationen der Γ'_ψ die Eigenschaft, durch R_0 wieder in Modulsubstitutionen transformiert zu werden. Transformieren wir jetzt $F'_{\varkappa \cdot \frac{\mu\psi}{\tau}}$, so erhalten wir zufolge der entwickelten Überlegung ein aus $\frac{\varkappa\mu}{\tau}$ Polygonen F_ψ bestehendes transformiertes Polygon $F_{\varkappa \cdot \frac{\mu\psi}{\tau}} = R_0(F'_{\varkappa \cdot \frac{\mu\psi}{\tau}})$. *Dieses aber ist nach unserer anfänglichen Entwicklung das Polygon der zu $z'(\omega)$ gehörenden Gruppe, welch' letztere sich damit als eine Untergruppe*

$$\Gamma_{\varkappa \cdot \frac{\mu\psi}{\tau}} = R_0^{-1} \Gamma'_{\varkappa \cdot \frac{\mu\psi}{\tau}} R_0 \tag{4}$$

des Index $\varkappa \cdot \frac{\mu\psi}{\tau}$ *darstellt.* Dass diese $\Gamma_{\varkappa \cdot \frac{\mu\psi}{\tau}}$ innerhalb der Γ_{ψ} eine Untergruppe des Index $\frac{\varkappa\mu}{\tau}$ ist, erscheint unmittelbar klar. Aber, wie wir schon sagten, ist demgegenüber $R_0^{-1}\Gamma_{\mu}R_0$ keine Untergruppe der Modulgruppe*); und es ist hier auch keineswegs stets die Existenz einer Γ_{μ}' evident, die zur Gruppe (4) in demselben Verhältnis stände (d. h. sie als Untergruppe enthielte), wie die Γ_{μ} zur $\Gamma'_{\varkappa \cdot \frac{\mu\psi}{\tau}}$.

Als unmittelbare Folgerung unserer Überlegung enstspringt: $z'(\omega)$ *ist eine von* $\varkappa \cdot \frac{\mu\psi}{\tau}$ *mit einander gleichberechtigten Modulfunctionen bez. Formen. Ist* $\varkappa = \tau$, *so ist dieserhalb* $f(z', J) = 0$ *bez.* $f(z'; g_2, g_3) = 0$ *irreducibel; ist* $\varkappa < \tau$, *so spaltet sich von* f *ein irreducibeler Factor des Grades* $\varkappa \cdot \frac{\mu\psi}{\tau}$ *ab, der gleich Null gesetzt die Gleichung für* z' *liefert.*

Um aber genauer den Wert der hier auftretenden Zahl $\varkappa$ (und zwar dann gleich allgemein für sämtliche irreducibele Factoren von f) zu untersuchen, müssen wir nunmehr den in Aussicht genommenen Excurs allgemein gruppentheoretischer Art einschalten.

§ 3. Excurs über ein allgemeines Princip der Gruppentheorie: Der Fall ausgezeichneter Untergruppen.

Eine principielle Rolle spielte soeben, wie man gesehen hat, die gemeinsame Untergruppe der beiden Gruppen Γ_{μ} und Γ_{ψ}'. Um aber über diese Untergruppe das Genauere mitteilen zu können, wollen wir zunächst allgemein die Verhältnisse klarstellen, welche eintreten, sobald wir die gemeinsame Untergruppe zweier der Modulgruppe angehörender Γ_{μ_1}, Γ_{μ_2} aufzusuchen haben. Die dazu nötige Überlegung hat übrigens, wie schon bemerkt, ganz allgemeine Bedeutung für die Theorie der unendlichen Gruppen.

Sehr einfach erledigt sich unsere Frage in dem Falle, dass Γ_{μ_1} und Γ_{μ_2} beide innerhalb der Gesamtgruppe *ausgezeichnet* sind, wie wir jetzt zunächst annehmen wollen. Seien die Operationen von Γ_{μ_1} durch $1, v_1, v_2, \ldots$, diejenigen der Γ_{μ_2} durch $1, w_1, w_2, \ldots$ bezeichnet, so haben wir, da Γ_{μ_i} ausgezeichnet ist, stets:

$$(1) \qquad v_g w_h = w_k v_i, \quad w_k v_l = v_l w_m.$$

Unter Aufnahme des in I p. 321 bezüglich einer ausgezeichneten Untergruppe eingeführten Aequivalenzzeichens folgt aus (1) für die

---

*) Sofern nicht der particuläre Fall vorliegt, dass die Gruppe Γ_{μ} in der Γ_{ψ}' enthalten ist.

speciellen in diesen Formeln enthaltenen Substitutionen, indem wir die w resp. v mit 1 äquivalent setzen:

(2) $$v_g \sim v_i, \text{ (bez. } \Gamma_{\mu_2}); \quad w_k \sim w_m, \text{ (bez. } \Gamma_{\mu_1}).^{*})$$

Durch Combination von Γ_{μ_1} und Γ_{μ_2} entstehe die Gruppe Γ_τ, deren Index τ jedenfalls ein gemeinsamer Teiler von μ_1, μ_2 ist. Vermöge (1) lässt sich jede Substitution dieser Γ_τ auf die Form $v_i w_k$ bringen, und da

$$V^{-1} v_i w_k V = V^{-1} v_i V \cdot V^{-1} w_k V = v_i w_m$$

ist, *so besitzen wir auch in* Γ_τ *eine in der Gesamtheit ausgezeichnete Untergruppe.* Sind die Classen**) von Γ_{μ_1}, Γ_{μ_2} bez. m_1 und m_2, so erkennt man die Classe t von Γ_τ sofort als einen gemeinsamen Teiler von m_1 und m_2. Insbesondere folgt: *Sind* m_1, m_2 *relative Primzahlen, so ist* Γ_τ *die Gesamtgruppe;* und weiter: *Ist* Γ_{μ_1} *Congruenzgruppe,* Γ_{μ_2} *aber durch Congruenzen nicht eingeschränkt, so ist* Γ_τ *wieder die Gesamtgruppe.* Andernfalls müsste nämlich Γ_τ Congruenzgruppe sein, insofern sie Γ_{μ_1} in sich enthält, und müsste zugleich die Nichtcongruenzgruppe Γ_{μ_2} umfassen.

Die Gruppe Γ_τ reduciere sich, bezüglich Γ_{μ_1} genommen, auf die endliche Gruppe $G_{\frac{\mu_1}{\tau}}$, bezüglich Γ_{μ_2} aber auf $G_{\frac{\mu_2}{\tau}}$, was wir symbolisch ausdrücken durch:

(3) $$\Gamma_\tau \sim G_{\frac{\mu_1}{\tau}}, \text{ (bez. } \Gamma_{\mu_1}); \quad \Gamma_\tau \sim G_{\frac{\mu_2}{\tau}}, \text{ (bez. } \Gamma_{\mu_2}).$$

Ein Repräsentantensystem der Γ_τ bezüglich Γ_{μ_1} liefert die Substitutionen der $G_{\frac{\mu_1}{\tau}}$; ist dabei als einzelne Substitution zunächst $v_i w_k$ gewählt, so können wir hinterher an deren Stelle auf Grund von $v_i w_k \sim w_k$, (bez. Γ_{μ_1}) die Substitution w_k setzen. In entsprechender Weise können wir ein Repräsentantensystem der Γ_τ bezüglich Γ_{μ_2} durchgehends aus Operationen v zusammensetzen und mögen so insbesondere für unsere beiden Gruppen G die Operationen gewinnen:

(4) $$\begin{cases} G_{\frac{\mu_1}{\tau}}: 1, w_1, w_2, \ldots, w_{\frac{\mu_1}{\tau}-1}, \\ G_{\frac{\mu_2}{\tau}}: 1, v_1, v_2, \ldots, v_{\frac{\mu_2}{\tau}-1}. \end{cases}$$

Die gemeinsame Untergruppe von Γ_{μ_1} und Γ_{μ_2} sei Γ_ν; dieselbe ist gleichfalls ausgezeichnet, und ihre Classe ist das kleinste gemein-

*) Es gründet sich dieses Schlussverfahren auf den in I p. 320 (unten) ausgesprochenen Cursivsatz.

**) Cf. I p. 360 u. f.

schaftliche Vielfache von m_1 und m_2. Γ_τ wird sich bezüglich der Γ_ν auf eine endliche $G_{\frac{\nu}{\tau}}$ reducieren, als deren Operationen wir ein Repräsentantensystem von Γ_τ bezüglich Γ_ν anzusetzen haben. Bemerke man in diesem Betracht, dass eine beliebige Operation $w_g v_h$ der Γ_τ folgenden Äquivalenzen genügt:

$$w_g v_h \sim w_i v_l \text{ (bez. } \Gamma_{\mu_1}), \quad w_g v_h \sim w_m v_k \text{ (bez. } \Gamma_{\mu_2});$$

in der ersten ist w_i eine bestimmte Operation aus der ersten Reihe (4), in der zweiten v_k eine bestimmte aus der zweiten Reihe (4); v_l und w_m dürfen dagegen willkürlich gewählt werden, und also nehmen wir $v_l = v_k$ und $w_m = w_i$. Dann ist

$$(5) \qquad w_g v_h \sim w_i v_k \text{ (bez. } \Gamma_{\mu_1}, \Gamma_{\mu_2}),\ 0 < i,\ k < \frac{\mu_1}{\tau} \text{ resp. } \frac{\mu_2}{\tau},$$

und nun haben wir auf der andern Seite den Satz, dass

$$w_i v_k \sim w_r v_s \text{ (bez. } \Gamma_{\mu_1}, \Gamma_{\mu_2})$$

für vier Substitutionen aus den Reihen (4) notwendig die Gleichungen $i = r$ und $k = s$ nach sich ziehen. Indem wir also alle $\frac{\mu_1 \mu_2}{\tau^2}$ Producte $w_i v_k$ bilden, haben wir gerade ein Repräsentantensystem der Γ_τ bezüglich Γ_ν gebildet. Sonach erhalten wir den abschliessenden Satz: *Die gemeinsame Untergruppe von Γ_{μ_1} und Γ_{μ_2} ist eine in der Gesamtheit ausgezeichnete $\Gamma_{\frac{\mu_1 \mu_2}{\tau}}$ des Index $\frac{\mu_1 \mu_2}{\tau}$.*

Wir schliessen hier sogleich noch eine Reihe geometrischer Erläuterungen an, welche zur leichteren Erfassung unserer gruppentheoretischen Überlegungen wesentlich sind.

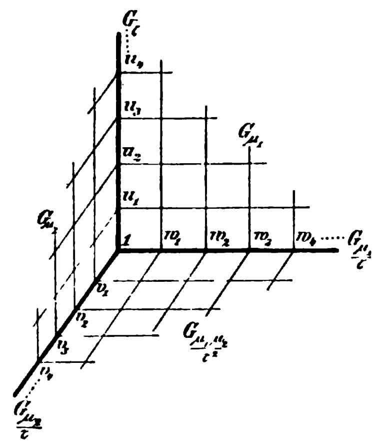


Fig. 3.

Die Gesamtgruppe reduciert sich bezüglich der ausgezeichneten $\Gamma_{\frac{\mu_1 \mu_2}{\tau}}$ auf eine endliche Gruppe $G_{\frac{\mu_1 \mu_2}{\tau}}$, deren Operationen wir uns zweckmässig in einem parallelepipedischen Schema angeordnet denken können. Indem wir etwa, wie wir hierneben in Fig. 3 angedeutet haben, ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde legen, mögen wir auf der positiven x-Axe im Ursprung $w_0 = 1$ und sodann in gleichen Intervallen die weiteren $\left(\frac{\mu_1}{\tau} - 1\right)$ Operationen $w_1, w_2, \ldots, w_{\frac{\mu_1}{\tau}-1}$ auf-

tragen, hiernach aber in analoger Weise auf der positiven y-Axe die $v_1, v_2, \ldots, v_{\frac{\mu_2}{\tau}-1}$, worauf in der xy-Ebene die $\frac{\mu_1\mu_2}{\tau^2}$ Operationen $w_i v_k$ der $G_{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau^2}}$ Platz finden; dieselben genügen übrigens ersichtlich der Bedingung:

$$w_i v_k \sim v_k w_i, \left(\text{bez. } \Gamma_{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\right).$$

Ein Repräsentantensystem der Gesamtgruppe bezüglich Γ_τ sei durch $1, u_1, u_2, \ldots, u_{\tau-1}$ gegeben; diese τ Operationen tragen wir dann entsprechend auf der z-Axe ab, um jetzt in der That die $\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}$ Operationen $w_i v_k u_l$ der $G_{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}$ nach übersichtlichem Princip in der Gestalt eines Parallelepipedons angeordnet zu haben.

Reducieren wir die Gesamtgruppe Γ bezüglich Γ_{μ_1}, so kommt die G_{μ_1} der in der xz-Ebene des Schemas befindlichen Operationen $w_i u_l$; reducieren wir Γ bezüglich Γ_{μ_2}, so kommt die G_{μ_2} der in der yz-Ebene gelegenen $v_k u_l$. Reducieren wir Γ bezüglich Γ_τ, so entspringt endlich die G_τ der in der z-Axe stehenden Operation u_l*). Demgegenüber bilden, wie schon vorhin angedeutet, die in der xy-Ebene, der x- und der y-Axe stehenden Operationen die Untergruppen $G_{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau^2}}$ bez. $G_{\frac{\mu_1}{\tau}}$ und $G_{\frac{\mu_2}{\tau}}$, welche den soeben in Betracht gekommenen Gruppen $\Gamma_\tau, \Gamma_{\mu_2}, \Gamma_{\mu_1}$ bezüglich $\Gamma_{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}$ zugeordnet sind.

Die hiermit zur Sprache gekommenen Anschauungen haben wir jetzt weiter zur vollen Erledigung unserer gruppentheoretischen Frage zu verwerten.

§ 4. Fortsetzung des gruppentheoretischen Excurses: Fall nicht-ausgezeichneter Untergruppen.

Sind uns zwei nicht-ausgezeichnete**) Untergruppen der Modulgruppe Γ gegeben, so gehen wir zur Erledigung unserer Frage nach dem gemeinsamen Bestandteile beider auf den Satz zurück, dass in jeder Untergruppe von endlichem Index eine in der Gesamtheit ausgezeichnete

*) Alle diese Reductionen stellen sich jetzt im rechtwinkligen Coordinatensystem der Fig. 3 unter dem Bilde einfacher Projectionen auf Coordinatenebenen oder -axen dar.

**) Die nachfolgende Erörterung ist übrigens völlig allgemein und umfasst den Fall, dass eine oder gar beide vorgelegte Untergruppen ausgezeichnet sind, sogleich mit.

Untergruppe von gleichfalls endlichem Index sich findet (cf. I p. 327). So nehmen wir unter voller Aufrechterhaltung der Bezeichnungen des vorigen Paragraphen als die beiden vorgelegten Gruppen $\Gamma_{\frac{\mu_1}{\sigma_1}}$ und $\Gamma_{\frac{\mu_2}{\sigma_2}}$, während die beiden zugehörigen ausgezeichneten Untergruppen $\Gamma_{\mu_1}, \Gamma_{\mu_2}$ sein sollen. Selbstverständlich sind dabei σ_1, σ_2 Teiler von μ_1 bez. μ_2, und zwar wird man im allgemeinen die letzteren ausgezeichneten Untergruppen so wählen, dass ihr Index ein möglichst niedriger ist; für die folgenden Betrachtungen ist dies indes nicht wesentlich.

Der gemeinsame Bestandteil von $\Gamma_{\frac{\mu_1}{\sigma_1}}$ und $\Gamma_{\frac{\mu_2}{\sigma_2}}$ enthält $\Gamma_{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}$ in sich; statt nun sogleich die gesuchte Gruppe selbst in Betracht zu ziehen, wollen wir vorab diejenige endliche Gruppe aufsuchen, auf welche sie sich bez. $\Gamma_{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}$ reduciert. Nun wird sich $\Gamma_{\frac{\mu_1}{\sigma_1}}$ bez. $\Gamma_{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}$ auf eine $G_{\frac{\sigma_1\mu_2}{\tau}}$ reducieren, und da müssen wir uns des genaueren die Lage der $\frac{\sigma_1\mu_2}{\tau}$ Operationen dieser Gruppe im Schema des vorigen Paragraphen veranschaulichen. $\Gamma_{\frac{\mu_1}{\sigma_1}}$ enthält Γ_{μ_1}, und eben deshalb werden die $\frac{\sigma_1\mu_2}{\tau}$ Operationen der $G_{\frac{\sigma_1\mu_2}{\tau}}$ gerade σ_1, zur y-Axe parallele, Transversalen unseres Schemas ganz erfüllen. Auf der anderen Seite bedeutet dies: $\Gamma_{\frac{\mu_1}{\sigma_1}}$ *reduciert sich bezüglich* Γ_{μ_1} *auf eine* G_{σ_1} *von* σ_1 *Operationen* $w_i u_k$, *die also sämtlich in der* xz*-Ebene gelegen sind und eine Untergruppe der dortselbst gelagerten* G_{μ_1} *bilden, auf welch' letztere sich die Gesamtheit* Γ *bez.* Γ_{μ_1} *reduciert.* Als Untergruppe dieser G_{μ_1} kennen wir bereits die $G_{\frac{\mu_1}{\tau}} \sim \Gamma_{\mu_2}$ (bez. Γ_{μ_1}) und benennen fortan als $G_{\frac{\sigma_1}{s_1}}$ die gemeinsame Untergruppe von G_{σ_1} und $G_{\frac{\mu_1}{\tau}}$; sie wird aus denjenigen Operationen $w_i u_k$ von G_{σ_1} bestehen, in denen insbesondere $u_k = 1$ ist. Wir behaupten dann: G_{σ_1} *giebt, nun auch noch bezüglich* Γ_{μ_2} *reduciert, eine Untergruppe* G_{s_1} *von derjenigen* G_τ, *welche die* z*-Axe unseres Schemas erfüllt;* legen wir dabei durch die s_1 von G_{s_1} auf der z-Axe eingenommenen Punkte Parallele zu x-Axe, so entfallen auf jede derselben $\frac{\sigma_1}{s_1}$ Operationen der G_{σ_1}.

Man wolle nämlich zum Belege dieser Behauptung die Aequivalenz:

$$w_g u_h \cdot w_i u_k \sim w_l u_m, \text{ (bez. } \Gamma_{\mu_1})$$

mit Hülfe der jedenfalls bestehenden Gleichung $u_h w_i = w_n u_h$ in

$$u_h u_k u_m^{-1} \sim w_n^{-1} w_g^{-1} w_l, \text{ (bez. } \Gamma_{\mu_1})$$

umsetzen, welche auch noch bez. Γ_τ reduciert

$$u_h u_k u_m^{-1} \sim 1, \quad u_h u_k \sim u_m \text{ (bez. } \Gamma_\tau)$$

liefert. Es liegt darin der Satz begründet: Beliebige zwei Operationen aus zwei bestimmten Horizontalreihen der xz-Ebene geben, in vorgeschriebener Folge combiniert, eine Operation aus einer bestimmten dritten Horizontalreihe*). Nunmehr folgt auf Grund einer schon öfter durchgeführten Überlegung: Beteiligt sich überhaupt eine Horizontalreihe der xz-Ebene an unserer G_{σ_1}, so liefert sie für dieselbe gerade $\frac{\sigma_1}{s_1}$ Operationen und nicht mehr; damit ist aber unsere obige Behauptung im vollen Umfange dargethan. Man wolle sich übrigens sogleich noch folgende, unmittelbar einleuchtende Definition der Gruppe G_{s_1} anmerken: *Wenn man* $\Gamma_{\frac{\mu_1}{\sigma_1}}$ *bezüglich der ausgezeichneten* Γ_τ *reduciert* (ohne dass natürlich $\Gamma_{\frac{\mu_1}{\sigma_1}}$ die Γ_τ in sich zu enthalten brauchte), *so entspringt die Untergruppe* G_{s_1} *von* G_τ*:*

$$(1) \qquad \Gamma_{\frac{\mu_1}{\sigma_1}} \sim G_{s_1}, \text{ (bez. } \Gamma_\tau).$$

Völlig analoge Betrachtungen gelten für die $\Gamma_{\frac{\mu_2}{\sigma_2}}$, die sich bezüglich $\Gamma_{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}$ auf die Gruppe $G_{\frac{\sigma_2\mu_1}{\tau}}$ reduciere, während sie andrerseits bezüglich Γ_τ auf G_{s_2} führen möge:

$$(2) \qquad \Gamma_{\frac{\mu_2}{\sigma_2}} \sim G_{s_2}, \text{ (bez. } \Gamma_\tau).$$

Die $\frac{\sigma_2\mu_1}{\tau}$ Operationen der $G_{\frac{\sigma_2\mu_1}{\tau}}$ füllen gewisse σ_2 Transversalen des Schemas, die mit der x-Axe desselben parallel laufen, vollständig aus, und zwar werden sich diese Transversalen zu je $\frac{\sigma_2}{s_2}$ in den s_2 durch die Operationen u der G_{s_2} angezeigten Horizontalebenen finden.

Die gemeinsame Untergruppe von $\Gamma_{\frac{\mu_1}{\sigma_1}}$ und $\Gamma_{\frac{\mu_2}{\sigma_2}}$, um welche es uns eigentlich zu thun ist, reduciert sich nun bezüglich $\Gamma_{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}$ offenbar auf die gemeinsame Untergruppe der eben betrachteten $G_{\frac{\sigma_1\mu_2}{\tau}}$ und $G_{\frac{\sigma_2\mu_1}{\tau}}$.

---

*) Man denke sich in der That, wie Fig. 3 andeutet, die z-Axe senkrecht gerichtet; übrigens drückt der gerade ausgesprochene Satz, wie man leicht bemerkt, nichts anderes aus, als dass $G_{\frac{\mu_1}{\tau}}$ ausgezeichnete Untergruppe von G_{μ_1} ist.

Sei also G_t die gemeinsame Untergruppe von G_{s_1} und G_{s_2} (so dass t gemeinsamer Teiler von s_1 und s_2 sein wird); alsdann werden nur in den t durch die Operationen von G_t angezeigten Horizontalebenen zugleich Operationen von $G_{\frac{\sigma_1 \mu_2}{\tau}}$ und $G_{\frac{\sigma_2 \mu_1}{\tau}}$ sich finden, und zwar offenbar jedesmal $\frac{\sigma_1 \sigma_2}{s_1 s_2}$. Insgesamt ist also den $G_{\frac{\sigma_1 \mu_2}{\tau}}$ und $G_{\frac{\sigma_2 \mu_1}{\tau}}$ eine $G_{\frac{t \sigma_1 \sigma_2}{s_1 s_2}}$ gemein, und da $\Gamma_{\frac{\mu_1 \mu_2}{\tau}}$ sowohl in $\Gamma_{\frac{\mu_1}{\sigma_1}}$ wie $\Gamma_{\frac{\mu_2}{\sigma_2}}$ enthalten ist, so entspringt der Satz: *Die gemeinsame Untergruppe der beiden vorgelegten Gruppen* $\Gamma_{\frac{\mu_1}{\sigma_1}}$ *und* $\Gamma_{\frac{\mu_2}{\sigma_2}}$ *ist eine* $\Gamma_{\frac{\mu_1 \mu_2 s_1 s_2}{\sigma_1 \sigma_2 \tau t}}$ *des endlichen Index* $\frac{\mu_1 \mu_2 s_1 s_2}{\sigma_1 \sigma_2 \tau t}$.

Bei der Ableitung dieses Resultates setzten wir, wie schon bemerkt, keineswegs voraus, dass Γ_{μ_1} und Γ_{μ_2} die umfassendsten in der Gesamtheit ausgezeichneten Untergruppen sein sollten, die sich in den beiden vorgelegten Gruppen finden. Wenn es also zweckmässig ist, dürfen wir ohne Änderung der voraufgehenden Entwicklung und ihres Resultates unter $\Gamma_{\mu_1}, \Gamma_{\mu_2}$ auch andere als die umfassendsten Untergruppen ihrer Art verstehen. Sobald übrigens Γ_τ die Gesamtgruppe ist, haben die Zahlen s_1, s_2, t, τ den Wert 1, und also haben wir z. B. die besonderen Sätze: *Sind die Classen der beiden vorgelegten Untergruppen gegen einander relativ prim, oder auch, ist die eine unter ihnen eine Congruenzgruppe, die andere aber nicht, so ist der Index ihrer gemeinsamen Untergruppe gleich dem Producte der Indices der beiden gegebenen Gruppen.* Demgegenüber kommen die voraufgehend entwickelten Vorstellungen im vollen Umfange in den Fällen $\tau > 1$ zur Geltung.

§ 5. Erledigung der Frage nach der Gleichberechtigung der transformierten Moduln $z'(\omega)$.

Mit Hülfe der nun gewonnenen Sätze können wir jetzt die Untersuchung der §§ 1, 2 leicht zum Abschluss bringen. Es handelte sich darum zu entscheiden, in welche irreducibelen Factoren die linke Seite der Gleichung $f(z', J) = 0$ für die $\mu\psi$ transformierten Moduln z' zerfällt*). Γ_μ war die Gruppe von $z(\omega)$; wir müssen indes, um einen beliebigen unter den irreducibelen Factoren zu fassen, von irgend einer mit Γ_μ gleichberechtigten $\Gamma_\mu^{(i)}$ ausgehen, zu welcher der mit $z(\omega)$ gleichberechtigte Modul $z_i(\omega)$ gehöre. Die zur Modulfunction $z_i(n\omega)$ gehörende Untergruppe hatte den nämlichen Index, wie die gemeinsame Untergruppe von $\Gamma_\mu^{(i)}$ und Γ_ψ'. Um denselben zu bestimmen,

*) Wir betrachten hier der Kürze halber nur Modulfunctionen, keine Formen.

benennen wir durch $\Gamma_{\sigma\mu}$ die umfassendste in der Gesamtheit ausgezeichnete Untergruppe, die sich in $\Gamma_\mu^{(i)}$ findet, und die offenbar dieselbe ist für alle Γ_μ, Γ_μ', ... Wir nehmen ferner als in Γ_ψ' enthaltene ausgezeichnete Untergruppe die Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe und müssen dementsprechend die Gruppe Γ_τ des vorigen Paragraphen hier als diejenige ausgezeichnete Congruenzgruppe n^{ter} Stufe von möglichst grossem Index erklären, die $\Gamma_{\sigma\mu}$ enthält. Wir haben also, um es zusammenzufassen, für die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen hier folgende specielle Bedeutung:

$$(1) \qquad \sigma_1 = \sigma, \quad \mu_1 = \sigma\mu, \quad \sigma_2 = \tfrac{1}{2}n\varphi(n), \quad \mu_2 = \tfrac{1}{2}n\varphi\psi,$$

während im übrigen

$$(2) \qquad \Gamma_\mu^{(i)} \sim G_{s_1^{(i)}}, \quad \Gamma_\psi' \sim G_{s_2} \text{ (bez. } \Gamma_\tau)$$

sein soll und die gemeinsame Untergruppe von $G_{s_1^{(i)}}$ und G_{s_2} durch G_{t_i} bezeichnet werden möge. Es folgt dann als unmittelbare Anwendung vom Hauptsatz des vorigen Paragraphen: *Derjenige irreducibele Bestandteil von $f(z', J) = 0$, welcher z_i' genügt, besitzt in z' den Grad:*

$$(3) \qquad \frac{\mu\psi s_1^{(i)} s_2}{\tau t_i}.$$

So oft also die Gruppe Γ_μ von $z(\omega)$ in Bezug auf n keinerlei einschränkenden Congruenzbedingungen unterliegt, was insbesondere immer dann eintritt, wenn die Classe m von Γ_μ relativ prim zum Transformationsgrad n ist, wird $\tau = 1$ und eben deshalb auch $s_1^{(i)} = s_2 = t_i = 1$. *In allen diesen Fällen ist die Relation $\mu\psi^{\text{ten}}$ Grades $f(z', J) = 0$ irreducibel oder (anders ausgedrückt) alle $\mu\psi$ transformierten Modulfunctionen $z'(\omega)$ sind mit einander gleichberechtigt.*

Demgegenüber tritt eine grössere Reihe verschiedener Möglichkeiten ein, *so oft Γ_μ Untergruppe einer Congruenzgruppe n^{ter} Stufe ist.*

Als Beispiel für den letzteren Fall setzen wir etwa Γ_μ mit der Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe selbst identisch; alsdann haben wir

$$\mu = \tau, \; s_1^{(i)} = t_i = 1, \; s_2 = \tfrac{1}{2}n\varphi(n),$$

und demgemäss wird die Relation $f(z', J) = 0$ in ψ irreducibele Gleichungen des Grades $\frac{1}{2}n\varphi\psi$ zerfallen. Im Specialfalle $n = 2$ (wo eine bekannte Modification der eben angegebenen Zahlen eintritt) haben wir drei Relationen sechsten Grades; wir werden dies später bestätigt finden.

Setze man ferner etwa $z(\omega) = \sqrt[8m]{\lambda(\omega)}$, wobei m eine beliebige ganze Zahl ist. Wir haben drei gleichberechtigte $\Gamma_{48m}^{(i)}$, die modulo 16 eingeschränkt sind, indem sie sich auf die drei in I p. 666 (5)

genannten Congruenzgruppen modulo 16 reducieren. Als Transformationsgrad wählen wir $n = 8$ und können sonach Γ_8 als Hauptcongruenzgruppe achter Stufe Γ_{192} ansetzen. Nun ist bezüglich Γ_{192} reduciert, d. h. modulo 8 genommen:

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_{48m} &\sim G_8; \quad v \equiv \begin{pmatrix} a, & 0 \\ 2b, & a \end{pmatrix},\\ \Gamma'_{48m} &\sim G'_8; \quad v \equiv \begin{pmatrix} a, & 2b \\ 0, & a \end{pmatrix},\\ \Gamma''_{48m} &\sim G''_8; \quad v \equiv \begin{pmatrix} a+2b, & -2b \\ 2b, & a-2b \end{pmatrix},\end{aligned}\right\} \pmod{8},$$

wobei wir immer sogleich die in der einzelnen $G_8^{(i)}$ enthaltenen Operationen angaben. Auf der anderen Seite ist

$$\Gamma'_{\psi(8)} \sim G_{16}; \quad v \equiv \begin{pmatrix} a, & 0 \\ b, & a \end{pmatrix}, \pmod{8},$$

und also folgt $t_0 = 8$, $t_1 = 2$, $t_2 = 2$. Durch leichte Zwischenrechnung ergiebt sich: Die Relation vom Grade $576 \cdot m$ für die transformierten $\sqrt[8m]{\lambda}$ zerfällt in sechs irreducibele Bestandteile, von denen vier den Grad $48 \cdot m$, die zwei letzten aber $192 \cdot m$ zeigen.

§ 6. Allgemeines über die Beziehung zwischen z' und z. Ausschluss der Nichtcongruenzmoduln.

Bei der nächstfolgenden Betrachtung setzen wir die Classe m des zu transformierenden Moduls $z(\omega)$ als relativ prim gegen den Transformationsgrad n voraus. Wir erreichen so, dass die Relation $\mu\psi^{\text{ten}}$ Grades $f(z', J) = 0$ irreducibel ist. Die Irreducibilität bezieht sich aber, wie schon gesagt, auf den Rationalitätsbereich J, und wir fragen nunmehr, *in welche Factoren $f(z', J)$ sich zerlegen lässt, sobald wir die ursprüngliche Modulfunction z (bez. auch Modulform z, sofern wir mit $f(z'; g_2, g_3)$ arbeiten) adjungieren.* Diese Frage kleidet man ohne Mühe in ein rein gruppentheoretisches Gewand ein, und zwar in folgender Weise: Als Gruppe von $z(n\omega)$ haben wir vorhin eine gewisse $\Gamma_{\mu\psi}$ bestimmt; zu einer beliebigen Wurzel z_i' von $f(z', J) = 0$ gehöre die mit ihr gleichberechtigte Gruppe $\Gamma_{\mu\psi}^{(i)}$. Wir bestimmen nach den entwickelten Regeln die gemeinsame Untergruppe $\Gamma_{\mu\varkappa}^{(i)}$ von Γ_μ und $\Gamma_{\mu\psi}^{(i)}$ und betonen, dass sich das zugehörige Polygon $F_{\mu\varkappa}^{(i)}$ aus $\varkappa$ Polygonen F_μ zusammen setzen lässt; $\varkappa$ aber ist hier eine ganze Zahl, die für die verschiedenen $\Gamma_{\mu\varkappa}^{(i)}$ sehr wohl verschiedene Werte annehmen mag. Für Γ_μ giebt (z, J) ein volles Modulsystem, und also schliesst man sofort, dass z_i' einer irreducibelen Relation $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades

$$(1) \qquad z'^{\varkappa} + R_1(z, J) \cdot z'^{\varkappa-1} + \cdots + R_{\varkappa}(z, J) = 0$$

genügen wird, deren linke Seite einer der Factoren von $f(z', J)$ ist. Die übrigen Factoren wird man in entsprechender Weise finden, indem man die durch (1) noch nicht erledigten Gruppen $\Gamma_{\mu\psi}^{(i)}$ heranzieht. Adjungiert man an Stelle von $z(\omega)$ eine damit gleichberechtigte Modulfunction $z(V(\omega))$, so wird dadurch leicht ersichtlicher Weise in der Gestalt der Factoren von $f(z', J)$ keinerlei Modification bewirkt; nur die Bedeutung der Wurzeln der einzelnen Gleichung (1) kann insofern eine andere werden, als sich die $\mu\psi$ Moduln z' nun in anderer Weise zusammenordnen mögen.

Wie man sieht, gewinnen wir die Grundlage für die Lösung des aufgeworfenen Problems durch Aufstellung der gemeinsamen Untergruppe von $\Gamma_{\mu\psi}^{(i)}$ und Γ_{μ}. Hiermit haben wir aber zugleich noch eine andere Fragestellung im Princip erledigt, welche letztere weiterhin eine besondere Bedeutung erlangen wird. Im voraufgehenden Kapitel erwiesen sich in theoretischer Hinsicht als besonders einfach diejenigen Transformationsgleichungen, welche ein transformiertes J' an das ursprüngliche J knüpften. Dem würde hier entsprechen, dass wir die algebraische Relation $F(z', z) = 0$ aufsuchen, durch welche z' an z geknüpft ist. In diesem Betracht erinnere man sich, dass J in der Relation (2) p. 84 zwischen z und J auf den Grad ν, in $f(z', J) = 0$ aber auf den Grad $\nu\psi$ steigt, sofern z auf dem Polygon F_{μ} eine ν-wertige Function ist. *Durch Elimination des J aus beiden Gleichungen entspringt also eine Relation:*

$$(2) \qquad z'^{\mu\nu\psi} + R_1(z) \cdot z'^{\mu\nu\psi-1} + \cdots + R_{\mu\nu\psi}(z) = 0,$$

welcher jedes transformierte z' als algebraische Function des ursprünglichen genügt; dabei wird, sofern wir auf der linken Seite von (2) durch Multiplication die Nenner der Functionen $R(z)$ entfernt haben, auch z bis auf den Grad $\mu\nu\psi$ steigen. Wir benennen die letztgedachte Gestalt für die linke Seite von (2) als $F(z', z)$ und mögen $F(z', z) = 0$ wiederum als eine Transformationsgleichung bezeichnen.

Das schon erwähnte Problem aber, welches sich hier unmittelbar anschliesst, ist offenbar dieses: *$F(z', z)$ in seine irreducibelen Factoren zerlegen.* Ist wie vorhin $\Gamma_{\varkappa\mu}$ die gemeinsame Untergruppe von Γ_{μ} und $\Gamma_{\mu\psi}^{(i)}$, so werden auf dem zugehörigen Polygon $F_{\varkappa\mu}$ die beiden zur $\Gamma_{\varkappa\mu}$ gehörenden Functionen $z_i'(\omega)$ und $z(\omega)$ je $\varkappa\nu$-wertig sein und solcherweise durch eine Relation verknüpft sein:

$$(3) \qquad z'^{\varkappa\nu} + R_1^{(i)}(z) \cdot z'^{\varkappa\nu-1} + \cdots + R_{\varkappa\nu}^{(i)} = 0,$$

welche im bekannten Sinne auch für z vom Grade $\varkappa\nu$ ist; diese

ergiebt uns nun offenbar einen der irreducibeln Factoren von (2). Des Überblicks halber geben wir vorläufig sogleich die beiden äussersten Fälle an, welche bei der vorliegenden Untersuchung eintreten können. Offenbar ist der höchste Wert, den $\varkappa$ annehmen kann, $\varkappa = \mu\psi$; *in diesem Fall ist* (2) *selbst bereits irreducibel.* Der niederste Wert für $\varkappa$ ist ψ; derselbe tritt ein, falls $\Gamma_{\mu\psi}^{(i)}$ in der Γ_μ enthalten ist. Haben wir zudem in Γ_μ eine Untergruppe des Geschlechtes $p = 0$, und ist z ein zugehöriger Hauptmodul, *so ist* (3) *eine Relation* ψ^{ten} *Grades sowohl in* z' *wie* z. Hier haben wir also die gleiche Einfachheit wiedererlangt, die wir bereits von der ersten Stufe her kennen, und werden deshalb bei diesem Falle sehr bald ausführlich zu verweilen haben. Vorab mögen wir hier noch ein paar Sätze entwickeln, welche den Zweck haben, das Feld unserer Untersuchung durch Ausschluss der Nichtcongruenzmoduln zu glätten.

Bedeutet W im speciellen die Transformation $\omega' = n\omega$, so können wir unsere Frage nach der Reducibilität von (2) auch in das Gewand kleiden, dass es sich um die gemeinsame Untergruppe von Γ_μ und $W^{-1}\Gamma_\mu W$ handeln soll; in der That ist ja $\Gamma_{\mu\psi}$ nichts anderes, als der gemeinsame Bestandteil der Modulgruppe Γ und der Gruppe $W^{-1}\Gamma_\mu W$. Ist aber $\Gamma_{\mu\psi}$ Untergruppe von Γ_μ, so werden wir sagen: *Der arithmetische Charakter der* Γ_μ *hat sich gegenüber der Transformation durch* W *vollständig erhalten.* Sind Γ_μ und $\Gamma_{\mu\psi}$ gemeinsam nur erst in der Gesamtgruppe Γ enthalten, so ist der arithmetische Charakter der Γ_μ bei der Transformation durch W vollständig verloren gegangen; für die dazwischen liegenden Fälle ist er endlich zum Teil erhalten geblieben. Indem wir nun hier in erster Linie allein auf die ausgezeichneten Untergruppen Γ_μ Rücksicht nehmen, gilt der wichtige Satz: *Für die der* m^{ten} *Classe angehörende Hauptcongruenzgruppe* m^{ter} *Stufe* Γ_μ *bleibt der arithmetische Charakter bei Transformation durch* W *vollständig erhalten;* und wir müssen hinzusetzen: *Man darf dies für eine besondere Eigenschaft allein jener Congruenzgruppe halten, welche für ausgezeichnete Nichtcongruenzgruppen* m^{ter} *Classe keineswegs zu bestehen scheint.*

Der erstere Satz ist unmittelbar evident: Ist nämlich

$$v = \begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} \equiv 1, \text{ (mod. } m),$$

so besteht offenbar auch die Congruenz

$$v' = W^{-1}vW = \begin{pmatrix}\alpha, & n^{-1}\beta\\ n\gamma, & \delta\end{pmatrix} \equiv 1, \text{ (mod. } m), \tag{4}$$

sofern v' überhaupt eine Modulsubstitution ist. Den letzteren, als

wahrscheinlich hingestellten Satz gab die ausführliche Betrachtung specieller Transformationsgleichungen an die Hand. Man kann auch gewisse Überlegungen an den Umstand knüpfen, dass die Nichtcongruenzgruppe Γ_μ der m^{ten} Classe angehören soll. Dieselben würden den ausgesprochenen Satz dem Verständnis näher bringen; inzwischen scheint es, dass eine völlige Klarstellung der Verhältnisse dadurch erschwert ist, dass wir über den arithmetischen Charakter der Nichtcongruenzgruppen fast nur negative Eigenschaften aussagen können. Demgegenüber giebt uns die thatsächlich festgestellte Invarianz der Hauptcongruenzgruppe m^{ter} Stufe bei Transformation durch W die Grundlage für einen wichtigen Ausbau unserer Entwicklung, welch' letztere demgemäss fortan auf die Congruenzgruppen allein eingeschränkt bleibt.

§ 7. Untersuchung der Transformationsgleichung für einen Congruenzmodul z beliebiger Stufe.

Zufolge der soeben ausgesprochenen Einschränkung verstehen wir unter Γ_μ fortan eine beliebige Congruenzgruppe m^{ter} Stufe und nehmen den Transformationsgrad n wie bisher relativ prim gegen m. In diesem Falle ist $\Gamma_{\mu\psi}$, wie jede mit ihr gleichberechtigte $\Gamma^{(i)}_{\mu\psi}$, eine Congruenzgruppe der Stufe mn. Es ist nämlich die Hauptcongruenzgruppe m^{ter} Stufe, deren Index wir zur leichteren Unterscheidung für den Augenblick mit (m) bezeichnen, in Γ_μ enthalten; $\Gamma_{\mu\psi}$ enthält demnach diejenige Untergruppe in sich, welche der $\Gamma_{(m)}$ mit der Congruenzgruppe n^{ter} Stufe $\Gamma_{\psi(n)}$ gemeinsam ist. — Wenn es sich also um den gemeinsamen Bestandteil der Γ_μ und $\Gamma^{(i)}_{\mu\psi}$ handelt, so werden wir die beiden in § 4 mit Γ_{μ_1} und Γ_{μ_2} bezeichneten ausgezeichneten Untergruppen hier mit $\Gamma_{(m)}$ und $\Gamma_{(m\cdot n)}$ identificieren. Daraufhin wird Γ_τ mit $\Gamma_{(m)}$ coincidieren, und Γ_μ, $\Gamma^{(i)}_{\mu\psi}$ bezüglich Γ_τ reducieren heisst nun einfach, sie modulo m nehmen. Sei

$$(1)\qquad \Gamma_\mu \equiv G_s, \quad (\text{mod. } m)$$

und $v \equiv \begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ irgend eine Operation der G_s. Wir können dann eine mit v mod. m congruente Modulsubstitution bekanntlich immer noch so wählen, dass ihr zweiter Coefficient durch n teilbar ist. Transformieren wir diese Substitution durch W, so entspringt eine Substitution der $\Gamma_{\mu\psi}$, die sich modulo m auf

$$(2)\qquad v' \equiv W^{-1} v W \equiv \begin{pmatrix}\alpha\ , & \beta n^{-1}\\ \gamma n, & \delta\end{pmatrix}, \quad (\text{mod. } m)$$

reduciert, das Symbol n^{-1} (mod. m) in der üblichen Bedeutung gebraucht. Alle s mod. m verschiedenen Operationen v' werden sich sonach in derjenigen Untergruppe der $G_{(m)}$ finden, auf welche sich $\Gamma_{\mu\psi}$ modulo m reduciert, und man beweist leicht durch Transformation dieser letzteren Untergruppe von $G_{(m)}$ vermöge W^{-1}, dass man solcherweise ihre sämtlichen Operationen gewinnt. *Wir haben also das Resultat:*

$$\Gamma_{\mu\psi} \equiv G_s' = W^{-1} G_s W, \quad (\text{mod. } m), \tag{3}$$

und man erkennt in G_s' sehr leicht eine mit G_s holoedrisch isomorphe Untergruppe der $G_{(m)}$. Die mit G_s' gleichberechtigten Gruppen (innerhalb $G_{(m)}$) seien G_s'', G_s''', ...; auf diese werden sich alsdann die übrigen $\Gamma_{\mu\psi}^{(i)}$ modulo m reducieren.

Mögen jetzt innerhalb der $G_{(m)}$ die Gruppen G_s und $G_s^{(i)}$ die Untergruppe G_{t_i} gemeinsam haben, so wird nach den Regeln des § 4 die Gruppe Γ_μ mit $\Gamma_{\mu\psi}^{(i-1)}$ eine Untergruppe des endlichen Index

$$\frac{\mu^2 \psi s^2}{(m) \cdot t_i} = \frac{\mu \psi s}{t_i} \tag{4}$$

gemeinsam haben. *Von der Transformationsgleichung $F(z', z) = 0$ des Grades $\mu\nu\psi$ wird sich daraufhin ein irreducibeler Factor des Grades $\frac{\nu\psi s}{t_i}$ in Bezug auf z' abspalten,* und man sieht sofort, *dass auch z in diesem Factor bis auf den Grad $\frac{\nu\psi s}{t_i}$ ansteigt,* insofern ja z' auf dem Polygon der Gruppe $\Gamma_{\mu\psi}^{(i-1)}$ die Wertigkeit $\nu\psi$ hat. Hiermit sind dann zugleich $\frac{s}{t_i}$ von den Untergruppen G_s', G_s'', ... erledigt; die rückbleibenden werden wir nach demselben Princip weiter behandeln, um die gesamten irreducibeln Factoren von $F(z', z) = 0$ zu erlangen.

Für die Reducibilität einer zur m^{ten} Stufe gehörenden Transformationsgleichung $F(z', z) = 0$ sind hiernach, sobald $m > 1$ ist, eine grosse Reihe verschiedener Fälle denkbar und, wie man sieht, kommt es in erster Linie darauf an, welchen Rest der Transformationsgrad n modulo m hat; *in der That sind Anzahl und Grad der irreducibeln Factoren von $F(z', z)$ für alle modulo m congruenten Transformationsgrade n in Übereinstimmung.* Soll $F(z', z)$ einen Factor des niedersten Grades $\nu\psi$ besitzen, so muss die zugehörige Zahl $t_i = s$ und also $G_s^{(i)} = G_s$ sein. Dies tritt offenbar stets und nur dann ein, wenn G_s durch W in eine mit ihr gleichberechtigte Gruppe transformiert wird:

$$G_s' \equiv W^{-1} G_s W \equiv V G_s V^{-1}, \quad (\text{mod. } m); \tag{5}$$

in diesem Falle wird also G_s durch eine gewisse Transformation n^{ter}

Ordnung, nämlich WV, in sich übergeführt. Soll $F(z', z)$ in lauter Factoren des Grades $\nu\psi$ zerfallen, so müssen alle $G_s^{(i)}$ unter einander und mit G_s identisch ausfallen: *Reduction in lauter Factoren $\nu\psi^{\text{ten}}$ Grades tritt also nur für diejenigen ausgezeichneten Untergruppen m^{ter} Stufe ein, welche mit W vertauschbar sind.*

So oft $n \equiv 1 \pmod{m}$ ist, ist die durch $G_{(m)} = W^{-1}G_{(m)}W$ angedeutete isomorphe Beziehung der $G_{(m)}$ auf sich selbst die identische, bei welcher jede Operation der $G_{(m)}$ sich selbst entspricht. Ist $m \equiv -1$, so können wir die Wirkung der Transformation vermöge W auch dadurch erzielen, dass wir durch die Modulsubstitution zweiter Art A transformieren. Im ersten Falle ist sonach stets G_s mit den $G_s^{(i)}$ gleichberechtigt; im letzteren Falle tritt Gleichberechtigung, wenn nicht schon innerhalb der $G_{(m)}$, so doch jedenfalls innerhalb der erweiterten $\overline{G}_{2(m)}$ ein. Für $n \gtrless 1, \pmod{m}$ dürfen wir keineswegs allgemein erwarten, dass G_s mit G_s' innerhalb $G_{(m)}$ gleichberechtigt ist. Da diese Verhältnisse indessen nicht nur von dem Reste n modulo m, sondern durchaus auch von der Eigenart der gerade betrachteten G_s abhängen, so verlangt die allgemeine Behandlung unserer Fragen die Kenntnis der Structur der $G_{(m)}$. Wir berücksichtigen hier demgemäss vor allen Dingen *den Fall der Primzahlstufe $m = q$*, wo wir Anschluss an die in I p. 419 u. f. gegebenen Entwicklungen gewinnen.

Für $m = q$ gestalten sich die Verhältnisse deshalb besonders einfach, weil innerhalb der $G_{(q)} = G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ zwei Untergruppen der gleichen Structur in den weitaus meisten Fällen zugleich mit einander gleichberechtigt sind. Hierbei wird sich unsere Untersuchung darauf zu beschränken haben, für die G_s die gemeinsamen Bestandteile aufzustellen, welche sie mit der einzelnen ihrer gleichberechtigten Untergruppen $G_s, G_s', G_s'', \ldots$ gemein hat. Nehmen wir z. B. den Fall der cyclischen G_q, die I p. 427 aufgestellt wurden, so ist die umfassende Relation $F(z', z) = 0$ vom Grade $\nu\psi \cdot \frac{q^2-1}{2}$. Die $\frac{q^2-1}{2}$ gleichberechtigten G_q sind nun bekanntlich zu je $\frac{q-1}{2}$ identisch, so dass wir für diese Gruppen $s = t_i = q$ haben *und von hieraus zunächst insgesamt $\frac{q-1}{2}$ irreducibele Factoren $\nu\psi^{\text{ten}}$ Grades erhalten.* Irgend eine $G_q', G_q'', \ldots$ hat aber mit G_q bekanntlich nur die Identität gemein, so dass nun für die übrigen Gruppen $s = q$, $t_i = 1$ zu setzen ist. Der von $F(z', z)$ noch rückbleibende Factor hat aber den Grad $\frac{q(q-1)}{2} \cdot \nu\psi$; *derselbe zerfällt sonach in $\frac{q-1}{2}$ irreducibele Factoren vom Grade $q\nu\psi$.* — Sollen wir viel-

[illegible] wegen der $q-1$ gleichberechtigten [illegible] $\equiv$ [illegible] mod. q gebildet, so [illegible] man, dass in jeder $G_{[illegible]}$ [illegible] q gleichberechtigte [illegible] enthalten sind, dass also umgekehrt die einzelne [illegible] sich immer in den [illegible] befindet [illegible]. Man gewinnt demnach leicht das Resultat: Die Transformationsgleichung $F(\tau, z) = 0$ [illegible] reducibel in τ und auch in z den Grad $q-1$ [illegible] [illegible].

[illegible] wir Gleichungen $F(\tau, z) = 0$ haben, bei denen kein einziger irreducibler Factor auf den niedersten Grad [illegible] herabsinken soll, so müssen wir auf Untergruppen derartiger Structur zurückgehen, dass sich von ihnen mehrere, unter einander nicht gleichberechtigte Systeme innerhalb der $G_{[illegible]}$ vorfinden. So haben wir z. B. für $q = [illegible] - 1$ zwei Systeme von je $\frac{q(q^2-1)}{[illegible]}$ Untergruppen $G_{[illegible]}$, die innerhalb der erweiterten $G_{[illegible]}$ gleichberechtigt [illegible], nicht aber schon innerhalb der $G_{[illegible]}$ selbst. [illegible] quadratischer Nichtrest von q ist, so können wir leicht den Schluss: [illegible] Transformationsgrad [illegible] quadratischer Rest von q ist [illegible] und [illegible] Factor [illegible] in $F(\tau, z)$ auftreten [illegible] Factor auf diesen Grad herab. [illegible] Angaben über die irreducibeln Factoren des betreffenden $F(\tau, z)$ wird man auf Grund der [illegible] entwickelten Sätze über die $G_{[illegible]}$ leicht [illegible].

§ [illegible]. Besondere Betrachtung des Falles $\nu = 1$. Die Modulargleichungen höherer Stufe.

Die soeben entwickelten Sätze passen ohne weiteres auch für die im Anfang des § [illegible] gemeinte Zerlegung der Relation [illegible] $J = 0$, wenn man [illegible] von [illegible] [illegible], nur ist dabei, sofern es sich um den Grad dieser Bestandteile in [illegible] handelt, in den vorausgehenden Angaben [illegible] statt ν zu setzen, während sich über den Grad in z und J allgemeine Angaben nicht machen lassen. In dem besonders wichtigen Falle, [illegible] $\nu = 1$ ist, concentrieren [illegible] die [illegible] im Anfang des § [illegible] entwickelten Problemstellungen. Hier ist [illegible] $\nu = [illegible]$ ein [illegible] und [illegible] J [illegible]. Trifft es sich überdies, dass [illegible] $\equiv$ [illegible] mod. n durch [illegible] in eine mit ihr gleichberechtigte

$G_s^{(i)}$ transformiert wird, so entspringt von $F(z', z)$ aus eine der $G_s^{(i)}$ zugeordnete Gleichung:

$$(1) \qquad z'^{\psi} + r_1(z) \cdot z'^{\psi-1} + r_2(z) \cdot z'^{\psi-2} + \cdots + r_{\psi}(z) = 0,$$

welche mit den Modulargleichungen der ersten Stufe (vgl. voriges Kap. p. 54) die grösste Analogie aufweist und eben deswegen als *eine zur m^{ten} Stufe gehörende Modulargleichung* bezeichnet werden möge.

In der That besitzt die Gleichung (1) sowohl in z', wie auch in z (nach der erforderlichen Umgestaltung) den Grad ψ. Was die Monodromiegruppe von (1) angeht, so hat dieselbe wieder genau die Ordnung und Structur der für die Transformationsgleichungen erster Stufe in § 6 des vorigen Kapitels (p. 53) angegebenen Gruppe der Ordnung $\frac{n\varphi(n)\psi(n)}{2^{\varkappa+\sigma}}$. Da nämlich m und n relative Primzahlen sind, so werden sich in der Γ_μ noch alle modulo n unterschiedenen Typen von Modulsubstitutionen vorfinden. Wir können dieserhalb allein schon durch die Operationen der Γ_μ alle jene Umstellungen der ψ Wurzeln z' von (1) hervorrufen, welche wir bei der ersten Stufe durch Ausübung der modulo n unterschiedenen Modulsubstitutionen auf die ψ Classen der Transformation bewirkten; eben jene Umstellungen der ψ Classen der Transformation n^{ter} Ordnung oder jetzt also der ψ Wurzeln von (1) bilden aber die gerade genannte Gruppe. Nun muss weiter jede rationale Function der ψ Wurzeln z', welche bei diesen Umstellungen unverändert bleibt, zur Γ_μ gehören und ist also bei dem der Gleichung (1) zu Grunde liegenden Rationalitätsbereich z als bekannt anzusehen. Gleichung (1) hat also in der That dieselbe Monodromiegruppe, wie die Modulargleichung erster Stufe n^{ter} Ordnung. Zu den bestimmenden Eigenschaften der Modulargleichungen sollte aber neben ihrem Grade und ihrer Monodromiegruppe drittens auch noch die Vertauschbarkeit ihrer Argumente z', z gehören (cf. p. 57). Wie diese dritte Eigenschaft für die Modulargleichungen höherer Stufe etwas allgemeiner als bei denen der ersten Stufe zu fassen ist, werden wir weiter unten in den zu betrachtenden Specialfällen noch ausführlich kennen lernen.

Was die Existenz der Modulargleichungen höherer Stufe anlangt, so sprechen wir noch einmal den Satz aus: *Modulargleichungen existieren jedenfalls nur für Hauptmoduln* $z(\omega)$. Wir können sogleich hinzusetzen: *Es existieren auch für jeden Hauptmodul Modulargleichungen, sofern der Transformationsgrad n durch die Stufe m geteilt den Rest* 1 *lässt.* Mehr kann man allgemein nicht aussagen; freilich kennen wir vom vorigen Paragraphen her Hauptmoduln, welche für *alle* gegen m primen Transformationsgrade n Modulargleichungen besitzen; aber

andrerseits liefern uns für $q = 7$ die sieben gleichberechtigten G_{24} des einzelnen Systems Beispiele von Hauptmoduln (cf. I p. 384), welche nur für solche n Modulargleichungen besitzen, die quadratische Reste von 7 sind.

Existieren für eine vorliegende Γ_μ des Geschlechtes $p = 0$ bei fest gegebenem n Modulargleichungen, so ist es weiter von Wichtigkeit, die Anzahl dieser Gleichungen d. h. die Anzahl der Factoren ψ^{ten} Grades von $F(z', z)$ anzugeben. Auch diese Frage werden wir auf gruppentheoretischem Wege zu beantworten haben. Ist nämlich $\Gamma_{\frac{\mu}{\varkappa}}$ die umfassendste Untergruppe, in welcher Γ_μ ausgezeichnet enthalten ist, so fallen bei Transformation der Γ_μ vermöge der Operationen eines zur Γ_μ gehörenden Repräsentantensystems (der Gesamtgruppe) im ganzen $\varkappa$ Gruppen mit Γ_μ identisch aus. Entsprechend finden sich unter den mit $W^{-1} G_s W$ gleichberechtigten Gruppen insgesamt $\varkappa$ mit G_s identische, *und also existieren für einen zur Γ_μ gehörenden Hauptmodul z im ganzen $\varkappa$ Modulargleichungen.* Aber dieselben stehen in einer äusserst nahen Beziehung zu einander. Sei nämlich

$$\Gamma_{\frac{\mu}{\varkappa}} \sim G_\varkappa \quad (\text{bez. } \Gamma_\mu), \tag{2}$$

so lässt sich zufolge I p. 603 diese $G_\varkappa$ am zweckmässigsten als eine Gruppe von $\varkappa$ linearen Substitutionen des Hauptmoduls z darstellen. Hier bemerkt man leicht: *Aus einer einzelnen Modulargleichung entspringen alle $\varkappa$, indem man bei unverändertem z' auf z jene $\varkappa$ linearen Substitutionen der $G_\varkappa$ ausübt.* Übrigens bedarf es nur einer kurzen Betrachtung, zu beweisen, dass jene $\varkappa$ Modulargleichungen auch alle in ihrer äusseren Gestalt von einander verschieden sind. Inzwischen behalten wir uns doch alle in dieser Richtung liegenden Einzeluntersuchungen für das nächste Kapitel vor, in welchem wir Beispiele von Modulargleichungen ausführlich durchsprechen wollen.

Schliesslich mögen wir hier nebenher bemerken, dass die in den voraufgehenden Paragraphen entwickelten Grundlagen für die *formentheoretischen* Transformationsgleichungen ihre Bedeutung behalten. Dabei würde uns z. B. die Existenz der zur ersten Stufe adjungierten Transformationsgleichungen der Wurzeln aus Δ (vgl. das vorige Kap. p. 74 u. f.) von gruppentheoretischer Seite her verständlich werden*). Es würde das einfach darauf hinauskommen, dass die zu $\sqrt[3]{\Delta}, \sqrt[4]{\Delta}, \sqrt[12]{\Delta}$ gehörenden Γ_3, Γ_4, Γ_{12} *ausgezeichnete* Gruppen ihrer Stufen m sind,

*) Gerade mit diesen gruppentheoretischen Gesichtspunkten arbeitet Hr. Hurwitz in seiner wiederholt genannten Abhandlung des 18ten Annalenbandes.

und dass dieselben, modulo m reduciert, zu lauter *mit W vertauschbaren* Gruppen führen, sofern nur an der hier überall zu Grunde liegenden Voraussetzung relativ primer m, n festgehalten wird*).

§ 9. Die zur m^{ten} Stufe gehörenden Repräsentantensysteme der Transformation n^{ter} Ordnung.

Bedeutet $R_0, R_1, \ldots, R_{\psi-1}$ ein beliebiges Repräsentantensystem erster Stufe n^{ter} Ordnung, so bildeten wir im vorigen Kapitel alle eigentlichen Transformationen n^{ter} Ordnung in der Gestalt $V_i R_k$, wobei V_i die Modulgruppe Γ zu durchlaufen hat; alle Transformationen $R_{k-1}, V_1 R_{k-1}, V_2 R_{k-1}, \ldots$ setzten dabei die k^{te} Classe zusammen. Untersuchten wir demgegenüber die Zahlen $V_i R_k(\omega)$ in Anbetracht ihrer Äquivalenz bezüglich der Congruenzgruppe m^{ter} Stufe Γ_μ, so zerfiel die einzelne jener ψ Classen nunmehr in μ unterschiedene Classen, und wir hatten die letzteren durch $R_k, V_1 R_k, V_2 R_k, \ldots, V_{\mu-1} R_k$ zu repräsentieren (p. 85), wo jetzt $1, V_1, \ldots, V_{\mu-1}$ ein Repräsentantensystem der Γ_μ vorstellt; man mag sich die $\mu\psi$ solcherweise entspringenden Repräsentanten für Transformation n^{ter} Ordnung m^{ter} Stufe schematisch in Gestalt eines Rechtecks angeordnet denken, dessen $(k+1)^{\text{te}}$ Horizontalreihe aus den Transformationen $R_k, V_1 R_k, \ldots, V_{\mu-1} R_k$ besteht.

Die Anordnung der $\mu\psi$ Classen in Horizontalreihen des Schemas haben wir also nach der Vorschrift getroffen, dass alle μ Classen der einzelnen Horizontalreihe bezüglich der Gesamtgruppe Γ äquivalent ausfallen. Für die Anordnung in Vertikalreihen geben die voraufgehenden Entwicklungen über Modulargleichungen höherer Stufe eine entsprechende Vorschrift an die Hand, die wir offenbar durch geeignete Auswahl der R_k zu bewerkstelligen haben. Sei $z(\omega)$ ein zur Γ_μ gehörender Modul und $z(R_0(\omega))$ algebraische Function $\nu\psi^{\text{ten}}$ Grades

*) Betreffs der ausgedehnten Litteratur über die Modulargleichungen höherer Stufe vgl. man die Angaben des folgenden Kapitels. Zu den formentheoretischen Gleichungen höherer Stufe, auf welche wir weiterhin nicht mehr zurückkommen können, sind vor allem ihrem Wesen nach die *Jacobi'schen Multiplicatorgleichungen* zu rechnen, welche wir der zweiten Stufe zu adjungieren haben, wie schon gelegentlich bemerkt wurde. Ausgedehnte Untersuchungen über die zu den Stufen $m = 2, 3, 4, 5$ gehörenden Gleichungen dieser Art sind in neuerer Zeit von Hrn. **Paul Biedermann** angestellt worden; man sehe dessen Leipziger Dissertation *„Über Multiplicatorgleichungen höherer Stufe im Gebiete der elliptischen Functionen“* Grunert's Archiv, 2. Reihe Bd. 5 (1887). (Der Ausdruck „Multiplicatorgleichung“ ist hier in noch allgemeinerem Sinne genommen, wie in den Schlussbemerkungen des vorigen Kapitels und geradezu gleichbedeutend mit dem von uns gebrauchten Ausdruck einer „formentheoretischen Transformationsgleichung“.)

von $z(\omega)$, die Zahl ν dabei in der bisherigen Bedeutung gebraucht. Innerhalb der Γ_μ gehören alsdann zu $z'(\omega) = z(R_0(\omega))$ im ganzen ψ gleichberechtigte Moduln $z(R_0 v_k(\omega))$, die zugleich Wurzeln jener Relation $\nu\psi^{\text{ten}}$ Grades sind. Dabei müssen die v_k der Γ_μ angehören, *und wir wollen nunmehr dieser Vorschrift dadurch genügen, dass wir allgemein die Congruenz fordern:*

$$(1) \qquad v_k \equiv 1, \ (\text{mod. } m).$$

Ausserdem aber müssen die v_k ein Repräsentantensystem für eine gewisse unter den ψ Congruenzgruppen n^{ter} Stufe Γ_ψ bilden. Der Einfachheit wegen wählen wir als Γ_ψ insbesondere die durch $\gamma \equiv 0$ (mod. n) charakterisierte, die wir auch bislang immer unter Γ_ψ schlechtweg verstanden, wobei wir alsdann unter R_0 insbesondere die Transformation $R_0(\omega) = n\omega$ zu verstehen haben. Man setze jetzt endlich $R_k = R_0 v_k$, womit die gewollte Auswahl der R_k getroffen ist.

In dem somit bestimmten Schema bestehe nun die $(i+1)^{\text{te}}$ Verticalreihe aus den Transformationen $R_0^{(i)}, R_1^{(i)}, \ldots, R_{\psi-1}^{(i)}$, so dass wir für $R_k^{(i)}$ die Darstellung haben:

$$(2) \qquad R_k^{(i)}(\omega) = V_i R_0 v_k(\omega).$$

Der Erfolg unserer Auswahl der R_k ist alsdann, dass die Congruenz

$$(3) \qquad R_0^{(i)}(\omega) \equiv R_1^{(i)}(\omega) \equiv R_2^{(i)}(\omega) \equiv \cdots \equiv \frac{a_i\omega + b_i}{c_i\omega + d_i}, \ (\text{mod. } m)$$

besteht, und zwar nennen wir dabei, wie gewohnt, zwei Repräsentanten

$$R(\omega) = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}, \quad R'(\omega) = \frac{a'\omega + b'}{c'\omega + d'}$$

einander modulo m congruent, wenn die Bedingung

$$a' \equiv \pm a, \quad b' \equiv \pm b, \quad c' \equiv \pm c, \quad d' \equiv \pm d, \quad (\text{mod. } m)$$

besteht, wo natürlich entweder nur die oberen oder nur die unteren Zeichen gelten. Gegenüber den Formeln (3) sind aber irgend zwei Repräsentanten aus verschiedenen Verticalreihen einander modulo m stets incongruent.

Irgend eine Verticalreihe unseres Schemas, z. B. die $(i+1)^{\text{te}}$:

$$(4) \qquad R_0^{(i)}, \ R_1^{(i)}, \ \ldots, \ R_{\psi-1}^{(i)}$$

liefert uns jetzt das, was wir als ein zur Γ_μ *gehörendes Repräsentantensystem für Transformation* n^{ter} *Ordnung bezeichnen.* Nach dieser Auffassung giebt es alsdann μ verschiedene Repräsentantensysteme für die Γ_μ, *und das einzelne unter ihnen werden wir durch das aus* (3) *ent-*

nommene Schema der vier Zahlen $\begin{pmatrix} a_i, & b_i \\ c_i, & d_i \end{pmatrix}$ *charakterisieren.* Ist Γ_μ insbesondere die Hauptcongruenzgruppe m^{ter} Stufe, so benennen wir (4) schlechtweg als ein zur m^{ten} Stufe gehörendes Repräsentantensystem für Transformation n^{ter} Ordnung. Ersetzen wir für den Fall der zuletzt gemeinten speciellen Γ_μ den einzelnen Repräsentanten durch einen anderen seiner Classe angehörigen (d. h. hängen wir eine mit 1 modulo m congruente Modulsubstitution vorn an), so bestehen für das derart geänderte System die Congruenzen (3) nach wie vor. Man gestaltet diese zunächst allein für die Hauptcongruenzgruppe gedachte Überlegung leicht zu dem folgenden Satze aus: *Haben wir irgend ein beliebiges Repräsentantensystem n^{ter} Ordnung erster Stufe, dessen Operationen einander durchgehends modulo m congruent sind, so bildet dasselbe zugleich ein Repräsentantensystem m^{ter} Stufe, indem durch dasselbe in der That die m Classen einer Verticalreihe unseres Schemas repräsentiert sind.* Dass dann dieses System auch für jede andere Gruppe Γ_μ m^{ter} Stufe eines der zugehörigen μ Repräsentantensysteme abgiebt, ist leicht ersichtlich.

Man hänge nun, Γ_μ wieder als beliebige Gruppe m^{ter} Stufe gedacht, den Operationen der $(i+1)^{\text{ten}}$ Verticalreihe $V_i R_0$, $V_i R_1$, .. rechts die mit 1 mod. n congruente Substitution v an. Es bilden dann doch $V_i R_0 v$, $V_i R_1 v$, .. ein Repräsentantensystem erster Stufe, und also nach obigem Satze auch eines für die Γ_μ. Da zugleich

$$V_i R_k v \equiv V_i R_k \pmod{m},$$

ist, so dürfen wir zusammenfassend die Sätze aussprechen: *Indem man den Repräsentanten $R_k^{(i)}$ eine beliebige Modulsubstitution vorsetzt, wird eine Permutation der Verticalreihen des Schemas bei ungeänderten Horizontalreihen bewirkt; wenn man dagegen den $R_k^{(i)}$ rechts eine Substitution $v \equiv 1 \pmod{m}$ anhängt, so bewirkt das eine Permutation der Horizontalreihen des Schemas bei ungeänderten Verticalreihen.* Dass die Gruppe dieser letzteren Permutationen mit der Monodromiegruppe der Modulargleichung holoedrisch isomorph ist, wird man leicht erkennen.

Eine weitere, hierher gehörende Überlegung hat zum Ziele, aus der Classe der Transformationen $R_k^{(i)}$, $v_1 R_k^{(i)}$, $v_2 R_k^{(i)}$, ... einen Repräsentanten in einer für ausführliche Untersuchungen möglichst brauchbaren Gestalt auszuwählen. Wir berücksichtigen auch hier in erster Linie die Hauptcongruenzgruppe $\Gamma_{\mu(m)}$ und wollen für dieselbe zuvörderst ein zum Schema $\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ gehörendes System herausgreifen. Die arithmetischen Repräsentanten erster Stufe waren:

$$R_k'(\omega) = \frac{A_k \omega + B_k}{D_k}, \quad A_k D_k = n, \ 0 \leq B_k < D_k, \tag{5}$$

unter dem Zusatz, dass die Zahlen A, B, C einen gemeinsamen Teiler nicht aufweisen sollen. Hier setze man an Stelle der einzelnen Transformation (5) erstlich:

$$\omega' = \frac{A_k\omega + mB_k}{D_k}, \tag{6}$$

womit wir wieder ein Repräsentantensystem erster Stufe gewonnen haben, da ja infolge relativ primer m, n die Zahlen mB_k zugleich mit B_k ein Restsystem modulo D_k durchlaufen. *Jetzt schreibe man als zweckmässigste Gestalt des zu bildenden Repräsentantensystems einfach:*

$$R_k(\omega) = V_k\left(\frac{A_k\omega + mB_k}{D_k}\right),\quad V_k \equiv \begin{pmatrix} D_k, & 0 \\ 0, & D_k^{-1} \end{pmatrix}, \; (\text{mod. } m), \tag{7}$$

wo V_k eine der rechts angegebenen Congruenz modulo m genügende Modulsubstitution ist; eine solche lässt sich in der That stets finden, da D_k als Teiler von n prim gegen m ist. Von der somit gewonnenen ersten Reihe unseres rechteckigen Schemas aus werden dann die übrigen in oben beschriebener Weise durch Vorsetzen geeigneter Substitutionen V_i hergestellt.

Handelt es sich nunmehr nicht um die Hauptcongruenzgruppe der m^{ten} Stufe $\Gamma_{\mu(m)}$, sondern um eine andere zu dieser Stufe gehörende $\Gamma_{\frac{\mu(m)}{\varkappa}}$, so wird deren rechteckiges Schema aus dem der $\Gamma_{\mu(m)}$ dadurch entspringen, dass die Verticalreihen des letzteren immer zu je $\varkappa$ äquivalent ausfallen; für die Fixierung des einzelnen $R_k^{(i)}$ haben wir dabei stets unter $\varkappa$ Repräsentanten des grossen Schemas eine zweckmässige Auswahl zu treffen.

Endlich haben wir hier gerade wie bei der ersten Stufe auch noch der erweiterten Transformation n^{ter} Ordnung zu gedenken, bei der die vier Coefficienten der einzelnen Transformation einen gemeinsamen Factor > 1 haben dürfen. Wenn wir in (7) die Zahl B_k bei stehenden A_k, D_k uneingeschränkt ein Restsystem modulo D_k durchlaufen lassen, so gewinnen wir *ein zum Schema* $\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$, (mod. n) *gehörendes Repräsentantensystem für erweiterte Transformation n^{ter} Ordnung.* Die Anzahl der Repräsentanten letzterer Art ist wieder $\Phi(n)$, wie denn überhaupt betreffs der in Rede stehenden Erweiterung alle bezüglichen, bei der ersten Stufe entwickelten Sätze sich ohne weiteres übertragen.

§ 10. Ein besonderer Satz über den Fall nicht relativ primer m, n. Beispiele.

Für den Fall, dass der Transformationsgrad n mit der Stufenzahl m des zu transformierenden Moduls einen Teiler > 1 gemein

hat, lässt sich nicht so leicht, wie im voraufgehend betrachteten Falle relativ primer m, n, eine allgemeine Theorie entwerfen; jetzt nämlich sind die Verhältnisse um vieles mannigfaltiger und die Anzahl der notwendigen Fallunterscheidungen sehr viel grösser. Wir bringen dieserhalb auch nur eine einzige zum Falle nicht relativ primer m, n gehörige Untersuchung, die wir übrigens hier sogleich bis ins einzelne durchführen.

Sei (z, J) ein volles Modulsystem für die Hauptcongruenzgruppe q^{ter} Stufe $\Gamma_{(q)}$, q wieder als Primzahl gedacht. Man gehe von $z(\omega)$ über zu $z(q\omega)$ und zeige, dass eine Operation der $\Gamma_{(q)}$ stets und nur dann $z'(\omega) = z(q\omega)$ in sich transformiert, wenn ihr dritter Coefficient γ durch q^2 teilbar ist. Nun beweist man durch elementare Rechnung, dass die durch

$$(1) \qquad \begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} \equiv 1, \text{ (mod. } q); \quad \gamma \equiv 0, \text{ (mod. } q^2)$$

definierte Gruppe der Stufe q^2 innerhalb der $\Gamma_{(q)}$ eine *ausgezeichnete Untergruppe des Index* q ist, die wir $\Gamma_{q(q)}$ nennen*). Dieserhalb wird sich $\Gamma_{(q)}$ bezüglich $\Gamma_{q(q)}$ auf eine endliche Gruppe G_q der Ordnung q reducieren, die infolge der Primzahleigenschaft von q nur eine *cyclische* Gruppe sein kann. Die transformierte Function $z'(\omega) = z(q\omega)$ genügt demgemäss einer Gleichung q^{ten} Grades:

$$(2) \qquad z'^q + R_1(z, J) \cdot z'^{q-1} + \cdots + R_q(z, J) = 0,$$

deren Coefficienten rationale Functionen von z und J sind, während ihre Monodromiegruppe mit der cyclischen Gruppe G_q holoedrisch isomorph ist. Aus letzterem Umstande ergiebt sich nach den Principien der Galois'schen Gleichungstheorie das Resultat, *dass z' mit Hülfe einer q^{ten} Wurzel in z und J dargestellt werden kann.*

In den niedersten Fällen $q = 2, 3, 5, \ldots$, wo die Rechnung mit Hülfe der aus Bd. I bekannten Modulfunctionen leicht auf directem Wege durchführbar ist, finden wir dieses Resultat bestätigt.

Es ist $\lambda(2\omega)$ eine Function vierter Stufe, die gegenüber S invariant ist und sich deshalb rational in $\mu^4(\omega)$ darstellen lässt. Aber das Teilungspolygon vierter Stufe**) hat nur drei Spitzen $\omega = i\infty, 0, \frac{1}{2}$, und in diesen nimmt $\lambda(2\omega)$ die Werte bez. $\infty, 0, 1$, dagegen μ^4 die Werte ∞ bez. $1, 0$ an. Da überdies in der ersten Spitze $\lambda(2\omega)$, wie $\mu^4(\omega)$ mit r^{-1} proportional werden, so gewinnen wir ohne weitere Rechnung als Beziehung zwischen den beiden in Rede stehenden Grössen:

*) Man verwerte hier etwa die in I p. 412 u. f. durchgeführte Überlegung.

**) Vergl. den vierten Teil der Figur 82 in I p. 355.

$$(3)\qquad \lambda(2\omega) = 1 - \mu^4(\omega), \quad 1 - \lambda(2\omega) = \mu^4(\omega).^{*)}$$

Gehen wir von hier aus unter Benutzung der Formeln (3) in I p. 665 zu den Bezeichnungen k, k' über, so folgt:

$$k^2(2\omega) = \frac{1}{\mu^4(\omega)}, \quad k'^2(2\omega) = \frac{\mu^4(\omega) - 1}{\mu^4(\omega)}.$$

Wenn man endlich jetzt noch μ auf Grund der Formeln I p. 675 durch die Moduln k, k' ersetzt, sowie die vierte bez. zweite Wurzel zieht, so entspringen die bekannten Formeln:

$$(4)\qquad \sqrt{k(2\omega)} = \frac{k}{1+k'}, \quad k'(2\omega) = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'},$$

in welchen man rechter Hand ω als Argument von k, k' zu denken hat**). Hier drückt sich $k^2(2\omega)$ thatsächlich rational in $k^2(\omega)$ und $k'(\omega) = \sqrt{1-k^2(\omega)}$ aus, womit unser allgemeiner Satz im Falle $q = 2$ seine Bestätigung gefunden hat.

Für $q = 3$ knüpfen wir am zweckmässigsten an $\xi\left(\frac{\omega}{3}\right)$, welche Grösse zu der durch $\beta \equiv 0$, (mod. 9) definierten Congruenzgruppe neunter Stufe gehört. Da sich dieselbe aber bei Ausübung von S^3 nur um eine multiplicative dritte Einheitswurzel ändert, so gehört $\xi^3\left(\frac{\omega}{3}\right)$ zu der durch $\beta \equiv 0$, (mod. 3) definierten Γ_4 der dritten Stufe, deren Polygon man leicht aus Fig. 81 in I p. 354 ausschneidet. Nun wird $\xi^3\left(\frac{\omega}{3}\right)$ in der Spitze $\omega = i\infty$ dieses Polygons nur einfach unendlich. Wir schliessen daraus, dass $\xi^3\left(\frac{-1}{3\omega}\right)$ als Hauptmodul zum dritten Transformationspolygon F_4 gehört, wenn wir an der im vorigen Kapitel (p. 40 u. f.) zu Grunde gelegten Fixierung desselben festhalten. Andrerseits gehört auch $\xi^3(\omega)$ als Hauptmodul zum letzteren Polygon, und da ergiebt sich aus dem Verhalten der beiderlei Moduln in den Spitzen ohne weitere Rechnung die Relation:

$$\xi^3\left(\frac{-1}{3\omega}\right) - 1 = \frac{c}{\xi^3(\omega) - 1}.$$

Die Constante c bestimmt man durch die Substitution $\omega = \frac{-1}{\omega'}$ (wobei für die rechte Seite das bekannte Verhalten von $\xi(\omega)$ in Betracht kommt) und nachherige Annäherung bei $\omega = i\infty$. Man findet $c = 1$ und damit für $\xi(3\omega)$ die Darstellung:

*) Diese Relation wurde bereits in I p. 678 benutzt.

**) Cf. Jacobi, *Fundamenta nova etc.*, Gesammelte Werke Bd. I p. 149.

$$(5)\qquad \frac{\xi(3\omega)+2}{\xi(3\omega)-1}=\frac{\xi(\omega)}{\sqrt[3]{\xi^3(\omega)-1}},$$

die unsern obigen Satz für $q=3$ bestätigt.

Mit Hülfe einer bis ins einzelne analogen Überlegung finden wir für $q=5$ die der Formel (5) entsprechende Relation:

$$(6)\qquad \frac{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\zeta(5\omega)+(\varepsilon-\varepsilon^4)}{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\zeta(5\omega)+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}=\sqrt[5]{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}+125\cdot\Delta\zeta_1{}^6\zeta_2{}^6}.$$

Rechter Hand sind hier als Argumente der unter dem Wurzelzeichen stehenden Formen ω_1, ω_2 zu denken; der Radicand drückt sich übrigens mit Hülfe der Formeln in I p. 640 leicht durch $\zeta(\omega)$ aus.

§ 11. Berechnung von ω bei gegebenem Modul durch Transformationsketten.

Die Formeln des vorigen Paragraphen geben uns die Mittel zu einer eigenartigen näherungsweisen Auflösung der fundamentalen Aufgabe, bei gegebenem Werte einer Modulfunction z. B. $\lambda(\omega)$ oder $\xi(\omega)$ den Wert des zugehörigen Argumentes ω zu bestimmen. Es geschieht dies durch unendlich oft wiederholte Anwendung einer und derselben Transformation, und zwar einer solchen der zweiten Ordnung, wofern wir mit $\lambda(\omega)$ als gegebener Grösse arbeiten wollen.

Um dies des näheren auszuführen, schreibe man zur Abkürzung:

$$(1)\qquad \lambda_\nu(\omega)=\lambda(2^\nu\omega)$$

und entnehme aus den Formeln des vorigen Paragraphen die Relationen:

$$(2)\qquad \begin{cases}\lambda_{\nu+1}=-4\left(2\lambda_\nu(\lambda_\nu-1)-(2\lambda_\nu-1)\sqrt{\lambda_\nu(\lambda_\nu-1)}\right),\\ \lambda_{\nu-1}=\frac{1}{2}+\dfrac{\lambda_\nu-2}{4\sqrt{1-\lambda_\nu}},\end{cases}$$

von denen die eine die Inversion der anderen darstellt. Damit diese Formeln für numerische Rechnung brauchbar oder überhaupt nur richtig sind, müssen die in ihnen enthaltenen Wurzeln eindeutig fixiert gedacht werden. In diesem Sinne wollen wir erstlich die Wurzel $\sqrt{\lambda_\nu(\lambda_\nu-1)}$ dadurch zu einer wohldefinierten Modulfunction machen, dass wir sie auf der imaginären ω-Axe als reell und positiv denken, während andrerseits $\sqrt{1-\lambda_\nu}$ für $\omega=0$ gleich 1 sein soll. Nur unter diesen Voraussetzungen sind die Formeln (2) correct, wovon man sich durch Veranschaulichung der Werteverteilung des λ auf dem Polygon der Hauptcongruenzgruppe zweiter Stufe zu überzeugen hat. Für ziemlich grosse λ_ν können wir demgemäss $\sqrt{\lambda_\nu(\lambda_\nu-1)}$ aus

(3) $$\sqrt{\lambda_\nu(\lambda_\nu - 1)} = -\lambda_\nu + \tfrac{1}{2} + \frac{1}{8\lambda_\nu} + \frac{1}{16\lambda_\nu^2} + \cdots$$

berechnen und ebenso für hinreichend kleine λ_ν die Wurzel $(1-\lambda_\nu)^{-\frac{1}{2}}$ aus

(4) $$\frac{1}{\sqrt{1-\lambda_\nu}} = 1 + \tfrac{1}{2}\lambda_\nu + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\lambda_\nu^2 + \cdots.$$

Nunmehr denke man den Zahlwert von $\lambda_0 = \lambda(\omega)$ gegeben, jedoch von $0, 1, \infty$ verschieden, da wir für letztere Fälle die zugehörigen ω als reelle rationale Brüche sofort charakterisieren können. Irgend ein zu λ_0 gehöriger Wert ω wird also im Innern der Halbebene liegen, und demnach wird sich $\omega_\nu = 2^\nu\omega$ mit wachsendem ν schneller und schneller von der reellen ω-Axe entfernen. Um aber die erste Recursionsformel (2) zur Verwendung zu bringen, wollen wir unter ω insbesondere dasjenige zu λ_0 gehörende Argument verstehen, welches innerhalb unseres früher eingegrenzten Polygons F_6 zweiter Stufe gelegen ist (cf. Fig. 68, I p. 279), wobei betreffs der Randpunkte an der damals gegebenen Vorschrift festzuhalten ist.

Bei der Berechnung von λ_1 aus λ_0 vermöge obiger Formel (2) müssen wir nun einen ausgiebigen Gebrauch von den bezüglichen Figuren des Bd. I machen, um nämlich das Vorzeichen der Wurzel $\sqrt{\lambda_0(\lambda_0 - 1)}$ richtig zu treffen. Durch die Beziehung der λ-Ebene auf das Polygon F_6*) wolle man sich die Lage des Punktes $\omega(\lambda_0)$ im F_6 annähernd veranschaulichen. Liegt der reelle Teil von ω zwischen $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$, so ist der reelle Teil von $(2\lambda - 1)$ negativ, der von $\sqrt{\lambda(\lambda - 1)}$ aber positiv. Die erste dieser beiden Behauptungen bestätigt man leicht durch Vergleich der beiden Figuren 75a und 76 in I p. 294; zum Beweise der letzteren beachte man, dass $\lambda(\lambda - 1)$ auf dem ganzen Rande des in I p. 289 gezeichneten Polygons F_8 reell und negativ ist. Man setzt diese elementare Betrachtung leicht fort und wolle überdies bemerken, dass jede einzelne der Zahlen $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$, falls es nötig sein sollte, durch einmalige oder wiederholte Ausübung von $S^{\pm 2}$ nach F_6 zurückverlegt werden kann. Da aber bei $S^{\pm 2}$ weder λ noch $\sqrt{\lambda(\lambda - 1)}$ eine Änderung erfährt, so leitet man ohne Mühe die folgende bei der recurrenten Berechnung der $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ aus λ_0 allgemein gültige Regel ab: *Die Zahl* $\sqrt{\lambda_\nu(\lambda_\nu - 1)}$ *ist stets so zu wählen, dass das Vorzeichen ihres reellen Teiles dem des reellen Teiles von* $(2\lambda_\nu - 1)$ *entgegengesetzt ist. Ist aber* $\sqrt{\lambda_\nu(\lambda_\nu - 1)}$ *rein imaginär, so gilt entweder das Gleiche von* $(2\lambda_\nu - 1)$, *wo dann beide Zahlen ent-*

*) Vergl. die zugehörigen Zeichnungen in I p. 294 u. f.

gegengesetztes Zeichen haben sollen; oder es ist $(2\lambda_\nu - 1)$ *reell und absolut kleiner als* 1, *und in diesem Falle ist* $\sqrt{\lambda_\nu(\lambda_\nu - 1)}$ *als positiv imaginäre Zahl zu fixieren.*

Liegt $\omega_\nu' = S^{\pm 2\varkappa}(\omega_\nu)$ im Polygon F_6, so ist $\lambda_\nu = \lambda(\omega_\nu) = \lambda(\omega_\nu')$; der Punkt ω_ν' wird aber mit wachsendem ν mehr und mehr in die Spitze $\omega = i\infty$ von F_6 hineingetrieben. Nun aber ist sehr wichtig, dass sich von ω_ν' aus infolge der nicht näher bestimmten Zahl $\varkappa$ das ursprüngliche ω noch nicht vollständig berechnen lässt, sondern nur erst dessen imaginärer Bestandteil, der offenbar gleich dem durch 2^ν dividierten imaginären Bestandteil von ω_ν' ist. Inzwischen liegt es überhaupt schon im Princip der bisher eingeschlagenen Überlegung begründet, dass wir durch dieselbe vorab nicht mehr als den imaginären Bestandteil von ω bestimmen können.

Man möge nämlich die Recursionsrechnung vermöge (2) bis zu einem solchen λ_ν bez. ω_ν' getrieben haben, dass man in erster Annäherung die für $\omega = i\infty$ gültige Formel

$$\lambda_\nu = -\frac{1}{16}e^{-\pi i \omega_\nu'} \tag{5}$$

in Anwendung bringen kann. Hier löse man nun nach ω_ν' auf und gehe dann sogleich zum ursprünglichen ω zurück; es folgt

$$-\frac{\log(-16\lambda_\nu)}{2^\nu \pi i} = \omega + c,$$

unter c eine reelle Zahl verstanden, die hier in der That infolge des links auftretenden Logarithmus unbestimmt bleibt. Verstehen wir also unter $|z|$ in üblicher Weise den absoluten Betrag der Zahl z, so kommt endlich:

$$\omega = c_1 + i\frac{\log|16\lambda_\nu|}{2^\nu \pi}, \quad (\lim \nu = +\infty), \tag{6}$$

wo c_1 eine nicht näher bestimmbare reelle Constante ist und der Logarithmus reell genommen werden mag. *Unsere Kette von Transformationen zweiter Ordnung giebt uns also nicht bereits* ω *selbst, sondern nur erst die zur Operation* S *gehörende Bahncurve*), auf welcher der Punkt* ω *gelegen ist.*

Um ω vollständig zu gewinnen, müssen wir auch noch die zweite Recursionsformel (2) verwerten und vermöge derselben von λ_0 aus die Reihe der Werte $\lambda_{-1}, \lambda_{-2}, \ldots$ berechnen. Die Überlegung gestaltet sich hier im einzelnen ganz ähnlich wie vorhin: Man wolle

*) Cf. I p. 163 u. f.

z. B. bemerken, dass der einzelne der Punkte ω_{-1}, ω_{-2}, ... entweder selbst schon im F_6 gelegen ist oder doch durch einmalige oder wiederholte Anwendung einer Operation $TS^{\pm 2}T$ nach F_6 zurückverlegt werden kann (vergl. Fig. 68 I p. 279 oder auch Fig. 82 I p. 355). Diese letztere Operation ändert weder λ noch $\sqrt{1-\lambda}$, und wir stellen für die Recursionsrechnung mit der zweiten Formel (2) leicht die Regel auf: Das Vorzeichen von $\sqrt{1-\lambda_\nu}$ ist stets so zu wählen, *dass der reelle Bestandteil von* $\sqrt{1-\lambda_\nu}$ *positiv ist;* rein imaginär kann $\sqrt{1-\lambda_\nu}$ für $\nu<0$ nie werden; sollte aber $\sqrt{1-\lambda_0}$ rein imaginär sein, so wähle man diese Grösse als solche *positiv.*

Für negative Indices ν können wir, wie schon bemerkt, jeder Grösse ω_ν ein ω_ν' durch

$$T(\omega_\nu') = S^{\pm 2\varkappa} T(\omega_\nu) \tag{7}$$

an die Seite stellen, so dass $T(\omega_\nu')$ im F_6 liegt. Man sieht, dass solcherweise ω_ν' mit wachsendem ν mehr und mehr in die Spitze $\omega=0$ des Polygons F_6 hineingetrieben wird; hier aber können wir von ω_ν' aus bei unbekanntem $\varkappa$ nicht direct auf ω zurückschliessen, sondern vielmehr nur erst auf die zu TST gehörende Bahncurve, auf welcher ω gelegen ist.

Für die Umgebung der Spitze $\omega=0$ unseres Polygons F_6 gilt nun in erster Annäherung:

$$\lambda(\omega) = -16 e^{-\frac{\pi i}{\omega}},$$

woraus sich nach kurzer Zwischenrechnung für das gesuchte zu λ_0 gehörende ω die neue Darstellung gewinnen lässt:

$$\frac{1}{\omega} = c_2 + i\,\frac{\log|16^{-1}\cdot\lambda_{-\nu}|}{2^\nu \pi}, \quad (\lim \nu = +\infty). \tag{8}$$

Um Übereinstimmung mit Formel (6) zu erzielen, haben wir hier den Index ν wieder als positive hinreichend gross gewählte Zahl gedacht. Den Logarithmus in (8) wolle man reell wählen; er wird alsdann negativ ausfallen (da $\lambda_{-\nu}$ mit wachsendem ν sich der Null nähert), und dies muss ja auch der Fall sein, damit der in (8) gegebene Wert ω der positiven Halbebene angehört. Endlich ist c_2 eine reelle Constante, die unbestimmt bleibt; (8) liefert uns also, wie schon bemerkt, nur erst die zu TST gehörende Bahncurve durch den gesuchten Punkt.

Um endlich zu ω selbst zu gelangen, wird man die Gleichungen (6) und (8) mit einander multiplicieren, um alsdann durch Trennung des Reellen vom Imaginären zwei Gleichungen für c_1 und c_2 zu erhalten. Wenn wir im Verlauf der Rechnung zur Abkürzung

$$(9)\qquad \Lambda_\nu = -\frac{\log|16\lambda_\nu|\cdot\log|16^{-1}\lambda_{-\nu}|}{4^\nu\pi^2}$$

schreiben, so kommt für den gesuchten Wert ω die Darstellung:

$$(10)\qquad \omega = \pm\frac{2^\nu\pi\sqrt{\Lambda_\nu-\Lambda_\nu^2}}{\log|16^{-1}\lambda_{-\nu}|} - i\frac{2^\nu\pi\Lambda_\nu}{\log|16^{-1}\lambda_{-\nu}|},\ (\lim\nu = +\infty).$$

Es erscheint hiernach denkbar, *die Gleichung $\lambda(\omega)=\lambda_0$ nach ω durch eine doppelte Kette von unendlich vielen quadratischen Gleichungen vermittelst Logarithmen aufzulösen.* Welcher von den beiden Werten (10) übrigens der richtige ist, wird man aus der gegebenen Zahl λ_0 mit Hinblick auf die Werteverteilung von $\lambda(\omega)$ im Polygon F_6 leicht entscheiden*).

Wenden wir auf $\lambda(\omega)$ die dritte Transformation zweiter Ordnung $\omega' = \frac{\omega+1}{2}$ wiederholt an, so erhalten wir Werte des λ für eine Kette von Punkten $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots$ des Polygons F_6, die mehr und mehr in die dritte, bei $\omega = 1$ gelegene Spitze von F_6 hineingetrieben werden. Die betreffenden Werte λ werden dabei gegen 1 convergieren, und es hat dies zur Folge, dass wir etwas Convergentes erhalten, wenn wir alle diese λ-Werte mit einander multiplicieren. In der That zeigt sich, dass das solcherweise zu gewinnende Product, mit einer geeigneten Potenz von ω_2 multipliciert, eine höchst einfache Modulform liefert. Statt übrigens $\lambda(\omega)$ durch $\omega' = \frac{\omega+1}{2}$ zu transformieren, kann man auch $\frac{\lambda}{\lambda-1}$ d. i. $k'^2(\omega)$ durch $\omega' = 2\omega$ transformieren und hat alsdann unter Gebrauch der Abkürzung $k_\nu' = k'(2^\nu\omega)$ zufolge der Formel (4) des vorigen Paragraphen die Recursionsformel zu verwenden:

$$(11)\qquad k'_\nu = \frac{2\sqrt{k'_{\nu-1}}}{1+k'_{\nu-1}}.\,^{**})$$

Die Bildung des unendlichen Productes $k'k_1'k_2'\ldots$ und die Auswertung desselben führen uns direct auf die hier in Betracht kommenden Entwicklungen *Jacobi's* im Artikel 38 der *Fundamenta nova*, auf

*) Die Entwicklung des Textes in ihrer allgemeinen Form, welche den gleichzeitigen Gebrauch beider Formeln (2) als erforderlich erscheinen liess und die bei beliebigem complexen λ_0 gültige Formel (10) ergab, ist erst in letzter Zeit vom Herausgeber geleistet.

**) Dass mit wachsendem ν die aus (11) zu berechnenden k_ν' gegen 1 convergieren, folgt ganz unabhängig von der vorliegenden Bedeutung des k' aus der *Gauss*'schen Theorie des *arithmetisch-geometrischen Mittels* (cf. Gauss' Werke, Bd. 3 p. 352 u. f.)

welche wir uns hier der Kürze halber beziehen dürfen*). Jacobi's Formeln, in die neuere Bezeichnungsweise umgesetzt, liefern die Relationen:

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{\omega_2}{\pi} = \dfrac{\sqrt[3]{2kk'}}{\sqrt{k'}\,\sqrt[12]{\Delta}} \cdot \left\{ \sqrt{k_1'}\,\sqrt{k_2'}\,\sqrt{k_3'} \cdot \cdot \cdot \cdot \right\}, \\[2ex] \dfrac{\omega_2}{\pi} = \dfrac{\sqrt[3]{2kk'}}{\sqrt[12]{\Delta}} \cdot \left\{ \dfrac{2}{1+k'} \cdot \dfrac{2}{1+k_1'} \cdot \dfrac{2}{1+k_2'} \cdots \right\}. \end{cases}$$

Die Formeln (11) und (12) ergeben eine sehr merkwürdige Darstellung des Argumentes ω_2 bei gegebenen Werten von λ und Δ **).

Es unterliegt keinem Zweifel, dass Entwicklungen, wie wir sie hier für die zweite Stufe durchgeführt haben, sich auch an die Stufen 3, 4, ... knüpfen lassen, wo dann die Formeln (5) etc. des vorangehenden Paragraphen in Kraft treten. Inzwischen würden uns solche Entwicklungen zu weit abführen und doch qualitativ nichts Neues darbieten.

---

*) Vergl. Jacobi's Werke, Bd. I p. 149 u. f.

**) Das genaue Analogon der Jacobi'schen Productbildung würde für die beiden zuerst betrachteten Repräsentanten der Transformation zweiter Ordnung darin bestehen, dass wir im Anschluss an die zweite Formel (2) p. 111 die *unendliche Reihe*:

$$\lambda_0 + \lambda_{-1} + \lambda_{-2} + \cdots$$

herstellten, von der ersten Formel (2) p. 111 aus aber die Reihe:

$$\lambda_0^{-1} + \lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} + \cdots.$$

Jedoch müssen wir hier von einer eingehenden Untersuchung dieser Reihen absehen.

Viertes Kapitel.

Von der Aufstellung der Modulargleichungen höherer Stufe unter besonderer Berücksichtigung von $m = 5$ und 16.

Unter den Transformationsgleichungen höherer Stufe, für deren Existenz und Beschaffenheit im vorigen Kapitel die allgemeinen Grundlagen entwickelt wurden, zeichneten sich durch ihre eleganten Eigenschaften die *Modulargleichungen* höherer Stufe aus; solche wollen wir im gegenwärtigen Kapitel wirklich bilden. Modulargleichungen gab es, wie wir fanden, nur für Hauptmoduln; aber es scheint im Gebiete der Congruenzgruppen nur eine beschränkte Anzahl solcher Moduln zu geben, so dass auch die Zahl verschiedenartiger Modulargleichungen eine begrenzte sein würde*). Unsere Betrachtung bleibt natürlich auf die von I her bekannten Hauptmoduln beschränkt, und zwar sollen in erster Linie die Galois'schen Hauptmoduln, sodann aber die bei der achten und sechzehnten Stufe auftretenden Wurzeln aus λ etc. zur Geltung kommen. Nur diese letzteren Gleichungen sind der überlieferten Theorie bekannt**), und sie gehören gewiss auch zu den einfachsten überhaupt existierenden Modulargleichungen. Dagegen gewannen wir erst vermöge unserer gruppentheoretischen Principien die naturgemässe Begriffsumgrenzung der Modulargleichungen, und dass hier die Modulargleichungen der Galois'schen Hauptmoduln eben, weil sie zu ausgezeichneten Untergruppen gehören, die erste und wichtigste Stelle einnehmen müssen, wird man leicht ermessen.

Wir nennen gleich die beiden Hülfsmittel, durch welche die Aufstellung der Modulargleichungen in den beiden für uns in Betracht kommenden Fällen von vornherein vereinfacht werden kann. Vor allen Dingen werden wir gewisse *invariantentheoretische* Operationsweisen ver-

---

*) Vgl. die für Primzahlstufen vollständige Aufzählung der Hauptmoduln in Hrn. Gierster's Arbeit: *Über Congruenzgruppen von Primzahlstufe,* Math. Ann. Bd. 22 (1883).

**) Man vgl. die geschichtlichen Referate in dem p. 2 genannten Werke von Enneper-Müller.

wenden, die uns der Art nach aus den Vorlesungen über das Ikosaeder bekannt sind, und deren Eingreifen in die hier vorliegende Fragestellung sich leicht aus den Entwicklungen des vorigen Kapitels ergiebt. Hierüber hinaus werden wir einen wenn auch beschränkten Gebrauch von der *Verzweigung* der Modulargleichung zu machen haben. Insbesondere für niedere Transformationsgrade kann man mit Hülfe dieser Mittel die Gestalt der Modulargleichung so weit umgrenzen, dass nur noch wenige Zahlencoefficienten durch Einsetzung der nach Potenzen von r fortschreitenden Reihenentwicklungen unserer Moduln zu berechnen bleiben.

Bei allen diesen Darlegungen handelt es sich um jene Grundgedanken, welche Hr. Klein zumal in seiner wiederholt genannten Arbeit vom Herbst 1879 entwickelt hat (*Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen*, Sitzungsber. d. Münchener Akademie vom Dec. 1879, Math. Ann. Bd. 17). Die Ausführungen in ihrer hier vorliegenden Form sind, soweit nicht andere Citate angemerkt werden, erst vom Herausgeber gegeben worden, so insbesondere die unten folgenden Entwicklungen zur Theorie der Jacobi-Sohncke'schen Modulargleichungen.

§ 1. Existenz und Anzahl der Modulargleichungen für die zu betrachtenden Hauptmoduln.

Für die Galois'schen Hauptmoduln $\lambda(\omega)$, $\xi(\omega)$, $\mu(\omega)$ und $\zeta(\omega)$ oder, anders ausgesprochen, für Doppelverhältnis, Tetraeder-, Oktaeder- und Ikosaederirrationalität ergeben sich aus den Entwicklungen des § 8 Kap. 3 (p. 102 u. f.) unmittelbar folgende Resultate:

Die einzelne der genannten vier Modulfunctionen besitzt für jeden gegen ihre Stufe m relativ primen Transformationsgrad n im ganzen $\mu(m)$ verschiedene Modulargleichungen, die alle aus einer unter ihnen dadurch hervorgehen, dass wir bei ungeändertem ursprünglichen Modul auf den transformierten der Reihe nach die $\mu(m)$ wohlbekannten linearen λ-, bez. ξ-, ... Substitutionen der endlichen $G_{\mu(m)}$ ausüben.

Eine erste unter diesen übrigens durchaus coordinierten Gleichungen ist z. B. diejenige, welche den betreffenden Hauptmodul, gebildet für die Argumente

$$R(\omega) = V\left(\frac{A\omega + Bm}{D}\right) \tag{1}$$

zu Wurzeln hat, die Bezeichnungen von (1) *in der Bedeutung von* (7) p. 108 *gebraucht, so dass wir in* (1) *ein zum Schema* $\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ *gehörendes Repräsentantensystem m^{ter} Stufe haben.*

Bei der sechzehnten Stufe gebrauchen wir an Stelle der $\sqrt[8]{\lambda}$ etc. sogleich die in I p. 665 erklärten Bezeichnungen φ, ψ, χ. Die zu diesen Modulfunctionen gehörenden Gruppen Γ_{48} waren jeweils in einer gewissen zur zweiten Stufe gehörenden Γ_8 ausgezeichnet enthalten*), und die einzelne dieser Γ_8 reducierte sich bezüglich ihrer Γ_{48} auf eine Diedergruppe G_{16}; der betreffende Hauptmodul φ, ψ oder χ erfuhr bei dieser G_{16} die Diedersubstitutionen in der wohlbekannten Gestalt. Wir schliessen sofort:

Der Hauptmodul φ (ebenso wie auch ψ und χ) besitzt für jeden ungeraden Transformationsgrad n sechzehn unterschiedene Modulargleichungen, welche alle aus einer unter ihnen dadurch entstehen, dass wir bei unverändertem ursprünglichen Modul auf den transformierten die sechzehn Diedersubstitutionen der G_{16} ausüben. In der That werden ja die Gruppen Γ_{48}, wie man sich überzeugen wolle, alle drei durch $W(\omega) = n\omega$ in sich transformiert.

Unter den sechzehn Modulargleichungen ist eine diejenige, welche zu Wurzeln die betreffende Modulfunction, gebildet für die Argumente

$$(2) \qquad R(\omega) = V\left(\frac{A\omega + 16B}{D}\right), \quad V \equiv \begin{pmatrix} D, & 0 \\ 0, & D^{-1} \end{pmatrix}, \quad (\text{mod. } 16),$$

hat. Indessen wolle man bemerken, dass die drei gleichberechtigten Γ_{48} eine ausgezeichnete Γ_{384} gemeinsam haben, die sich modulo 16 auf die G_4'

$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5, & 8 \\ 8, & 13 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9, & 0 \\ 0, & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 13, & 8 \\ 8, & 5 \end{pmatrix}$$

reduciert. Wir dürfen also, unabhängig davon, welche von den drei Functionen φ, ψ, χ gerade betrachtet wird, den in (2) gegebenen R eine beliebige Operation der Γ_{384} vorsetzen und wählen hierzu die besondere

$$\begin{pmatrix} D^{-1}, & 4 - 4\left(\frac{2}{D}\right) \\ 4 - 4\left(\frac{2}{D}\right), & D \end{pmatrix},$$

welche sich mit V zu der Modulsubstitution vereint:

$$\omega' = \frac{\omega + 4 - 4\left(\frac{2}{D}\right)}{\omega\left(4 - 4\left(\frac{2}{D}\right)\right) + 1 + 32\left(1 - \left(\frac{2}{D}\right)\right)}.$$

Das in Rede stehende Repräsentantensystem nimmt daraufhin die Gestalt an:

---

*) Vgl. hier überall die Angaben von I p. 665 u. f.

$$(3)\qquad R(\omega)=\frac{A\omega+16B+4D\left(1-\left(\frac{2}{D}\right)\right)}{4A\left(1-\left(\frac{2}{D}\right)\right)\omega+D+32(2B+D)\left(1-\left(\frac{2}{D}\right)\right)},$$

wobei für A, B, D die bekannten Bedingungen bestehen, dass $AD=n$, $0<B<D$ ist, und dass A, B, D einen gemeinsamen Factor nicht aufweisen.

Von hier aus werden wir uns die 48 Repräsentantensysteme für den einzelnen unserer drei Hauptmoduln dadurch herstellen, dass wir 48 bezüglich der zugehörigen Γ_{48} inäquivalente Modulsubstitutionen auf (3) ausüben. Sechzehn unter diesen 48 Systemen (durch die betreffende Γ_8 bestimmt) correspondieren den sechzehn Modulargleichungen; den übrigen $2\cdot 16$ Repräsentantensystemen entsprechen ersichtlich zwei Systeme von je 16 Gleichungen, welche mit den Modulargleichungen an Grad und Gestalt in voller Übereinstimmung sind, nur dass (sofern es sich etwa um φ handelt) das transformierte φ durch diese Gleichungen nicht an das ursprüngliche φ, sondern statt dessen an das ursprüngliche ψ bez. χ gebunden erscheint. Wollen wir auch für diese Repräsentantensysteme die Relationen zwischen ursprünglichem und transformiertem φ haben, so werden wir eben nicht mehr mit Gleichungen des Grades $\psi(n)$ zu thun haben; vielmehr werden nach den Regeln des vorigen Kapitels hier im ganzen vier irreducibele Relationen des Grades $8\psi(n)$ eintreten. —

Modulargleichungen für $\sqrt[4]{\lambda}$ lassen sich aus den 16 Modulargleichungen von $\sqrt[8]{\lambda}$ ohne weiteres dadurch herstellen, dass man dieselben in gewisser Reihe zu Paaren mit einander multipliciert. Fährt man in gleicher Weise fort, so gewinnt man Modulargleichungen für $\sqrt{\lambda}$ und kann endlich dadurch, dass man die $3\cdot 16$ φ, ψ, χ-Modulargleichungen in richtiger Folge zu je acht multipliciert, die sechs λ-Modulargleichungen aus ihnen herstellen. Andrerseits könnte man versuchen, in einer einzelnen φ-Modulargleichung etwa $\varphi=x^2$, $\varphi'=y^2$ zu setzen, und die entspringende Relation $2\psi(n)^{\text{ten}}$ Grades zwischen x und y auf ihre Reducibilität untersuchen. Ist unsere obige Angabe über die Nichtcongruenzmoduln (p. 98) begründet, so darf eine Reduction in zwei Relationen des Grades $\psi(n)$ hier nicht mehr eintreten. Wir werden das weiter unten an einem einzelnen Beispiele wirklich durchführen.

Wenn man sich die Rechnungen vergegenwärtigt, welche die Modulargleichungen von $\sqrt[8]{\lambda}$ in die für $\sqrt[4]{\lambda}$ überführen, so ist evident, dass erstere Gleichungen einfachere Gestalt darbieten werden als letztere.

Auch bei den Wurzeln aus Δ wurden die Transformationsgleichungen um so einfacher, je höher die Stufe der betreffenden Wurzel war. Von diesem Gesichtspunkt geleitet wird man es zweckmässig finden, auch noch den Hauptmodul $\sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)}$ zur Bildung von Modulargleichungen heranzuziehen*); denn die Stufe desselben war $m = 48$, und wir werden demgemäss nur den Transformationsgrad auf ungerade durch 3 nicht teilbare Zahlen n einzuschränken haben, sofern wir an den Voraussetzungen des vorigen Kapitels festhalten wollen. Thatsächlich sind auch diese Modulargleichungen verschiedentlich betrachtet worden (worüber wir noch weiter unten die Nachweise geben); entwickeln wir also hier noch kurz, welche Grundlage das vorige Kapitel für die Modulargleichungen von $\sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)}$ ergiebt!

Der Hauptmodul $\sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)}$ ändert sich bei einer beliebigen, nur der Bedingung $\gamma \equiv 0$ (mod. 2) genügenden Modulsubstitution nach unseren früheren Untersuchungen um den Factor:

$$(4) \qquad \left(\frac{2}{\alpha}\right) e^{-\frac{\pi i}{8} 3\alpha(2\beta+\gamma) + \frac{2\pi i}{3}(\alpha^2+\gamma^2)(\alpha\beta+\gamma\delta)}$$

und gehört sonach zu einer Γ_{72} der Stufe 48, welche sich vollständig durch die drei Congruenzen charakterisieren lässt:

$$(5) \quad \gamma \equiv 0, \text{ (md. 2)}, \quad \alpha\beta + \gamma\delta \equiv 0, \text{ (md. 3)}, \quad \beta + \frac{\gamma}{2} \equiv 0, \text{ (md. 8)}.$$

In der durch die erste dieser Bedingungen definierten Γ_3 der Stufe 2 ist Γ_{72} ausgezeichnet enthalten, und Γ_3 reduciert sich bez. Γ_{72} auf eine *cyclische* G_{24}, als deren Erzeugende wir S:

$$(6) \qquad \sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)'} = e^{-\frac{\pi i}{12}} \sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)}$$

ansehen können. Da für jeden gegen 2 und 3 primen Transformationsgrad $n \equiv n^{-1}$ (mod. 24) ist, so beweist man aufs leichteste an den Congruenzen (5), dass Γ_{72} durch $W(\omega) = n\omega$, modulo 48 betrachtet, in sich transformiert wird. Es ergeben sich also unmittelbar die Sätze: *Für unseren in Rede stehenden Hauptmodul existieren bei jedem gegen* 6 *relativ primen Transformationsgrad* n *im ganzen* 24 *verschiedene Modulargleichungen; dieselben entstehen alle aus einer unter ihnen, indem man den transformierten Modul (bei unverändertem ursprünglichen) der aus* (6) *zu erzeugenden cyclischen* G_{24} *unterwirft.* —

Die mit der Γ_{72} gleichberechtigten Untergruppen, sowie sonstige Hauptmoduln ziehen wir nicht mehr besonders in Betracht.

---

*) Vergl. hier und weiterhin I p. 674.

§ 2. Von der Vertauschbarkeit der Argumente in den linken Seiten der Modulargleichungen.

Die linke Seite einer Modulargleichung erster Stufe $f(J', J) = 0$ war eine symmetrische Function ihrer beiden Argumente J' und J; wir untersuchen nunmehr, welchen Verhältnissen wir in dieser Richtung bei den Modulargleichungen höherer Stufe begegnen. Sei demnach τ ein Hauptmodul m^{ter} Stufe, für welchen bei Transformation n^{ter} Ordnung $\varkappa$ Modulargleichungen existieren. Eine unter ihnen schreiben wir $f(\tau', \tau) = 0$ und denken die linke Seite derselben als ganze Function sowohl von τ, wie τ', gestaltet, welche beide Argumente alsdann in f bis auf den Grad $\psi(n)$ ansteigen. Ausführlicher geschrieben ist:

$$f\left(\tau\left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d}\right), \tau(\omega)\right) = 0, \tag{1}$$

und da diese Gleichung in ω identisch besteht, so ziehen wir aus derselben sofort die weitere Gleichung:

$$f\left(\tau(\omega), \tau\left(\frac{+d\omega - b}{-c\omega + a}\right)\right) = 0. \tag{2}$$

Wir schreiben in (2) für den ursprünglichen Modul $\tau(\omega)$ wieder kurz τ, für den transformierten τ', wodurch unsere Gleichung in $f(\tau, \tau') = 0$ übergeht. Sie ist offenbar selbst wieder eine der $\varkappa$ Modulargleichungen und also folgern wir mühelos den Satz: *Bei Vertauschung der Argumente τ, τ' werden die linken Seiten unserer $\varkappa$ Modulargleichungen teils zu Paaren vertauscht, teils vielleicht in sich selbst transformiert;* von etwa zutretenden constanten Factoren sehen wir dabei zunächst völlig ab.

Des genaueren können wir den erhaltenen Satz folgendermassen durchbilden: Die Gleichungen (2) schreiben wir unter Aufnahme einer sogleich näher zu bestimmenden Modulsubstitution V:

$$f\left[\tau(\omega), \tau\left(V^{-1} V\left(\frac{+d\omega - b}{-c\omega + a}\right)\right)\right] = 0.$$

Es soll aber V so gewählt werden, dass $V\left(\frac{+d\omega - b}{-c\omega + a}\right)$ und $\frac{a\omega + b}{c\omega + d}$ in dem nämlichen unter den $\varkappa$ zu den $\varkappa$ Modulargleichungen gehörenden Repräsentantensystemen enthalten sind; wir erreichen das stets und nur dadurch, dass wir V aus der Congruenz

$$V\left(\frac{+d\omega - b}{-c\omega + a}\right) \equiv \frac{a\omega + b}{c\omega + d}, \pmod{m} \tag{3}$$

bestimmen. Des weiteren nehmen wir die Formel:

$$\tau(V^{-1}(\omega)) = \frac{\mathsf{A}\tau(\omega) + \mathsf{B}}{\Gamma\tau(\omega) + \Delta} \tag{4}$$

zu Hülfe und führen solcherweise die Gleichung (2) über in

$$f\left(\tau, \frac{\mathsf{A}\tau' + \mathsf{B}}{\Gamma\tau' + \Delta}\right) = 0, \tag{5}$$

welch' letzterer Gleichung $\tau' = \tau\left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d}\right)$ genügt. Also das Resultat: *Wenn wir in der ursprünglich vorgelegten Gleichung die Argumente der linken Seite τ' und τ mit einander vertauschen, sodann aber auf τ' noch eine gewisse, in der zugehörigen $G_\varkappa$ enthaltene lineare Substitution ausüben, so kommen wir zur ursprünglichen Gleichung zurück.*

Die nähere Untersuchung wird sich bei dieser Sachlage vor allem auf die Substitution V beziehen, als deren Coefficienten wir aus (3) die folgenden berechnen:

$$\begin{cases} \alpha \equiv (a^2 + bc)n^{-1}, & \delta \equiv (bc + d^2)n^{-1}, \\ \beta \equiv (a + d)bn^{-1}, & \gamma \equiv (a + d)cn^{-1}, \end{cases} \pmod{m}. \tag{6}$$

Man wird nun zweckmässig

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\alpha', & \beta' \\ n\gamma', & \delta' \end{pmatrix} \tag{7}$$

setzen und erhält solcherweise aus allen $\varkappa$ in Betracht kommenden Repräsentantensystemen je eine einzelne Transformation n^{ter} Ordnung, wenn man in (7) die Modulsubstitution $\begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix}$ ein zur Γ_μ von $\tau(\omega)$ gehörendes Repräsentantensystem der $\Gamma_{\frac{\mu}{\varkappa}}$ durchlaufen lässt. Vermöge (7) nehmen aber die Coefficienten (6) von V die Gestalt an:

$$\begin{cases} \alpha \equiv n\alpha'^2 + \beta'\gamma', & \delta \equiv n^{-1}\delta'^2 + \beta'\gamma', \\ \beta \equiv \beta'(\alpha' + \delta' n^{-1}), & \gamma \equiv \gamma'(n\alpha' + \delta'), \end{cases} \pmod{m}. \tag{8}$$

Der bemerkenswerteste Specialfall ist der, dass die so gewonnene Substitution V der Γ_μ angehört: *Stets und nur, wenn dies der Fall ist, wird die Modulargleichung, welche zum betreffenden Repräsentanten* (7) *gehört, bei Vertauschung von τ' und τ in sich selbst übergehen.*

Wir erläutern diese Sätze jetzt dadurch, dass wir erstlich den Fall der Modulargleichungen fünfter Stufe $m = 5$ besonders betrachten; wir bezeichnen dabei die in (7) rechts zur Geltung kommende Operation der G_{60} durch V' und müssen übrigens die vierfache Fallunterscheidung $n \equiv 1, 2, 3, 4, \pmod{5}$ treffen:

Ist erstlich $n \equiv 1$, so folgt:

$$V^{-1} \equiv V'^2, \pmod{5}, \tag{9}$$

woraus ohne weiteres der Satz entspringt: *Nur wenn V' die Identität oder eine der 15 in der G_{60} enthaltenen Operationen der Periode zwei ist, wird V der Hauptcongruenzgruppe Γ_{60} angehören; für $n \equiv 1 \pmod{5}$ werden sonach unter allen sechzig Modulargleichungen nur sechzehn bei Vertauschung der Argumente in sich selbst übergehen.*

Im Falle $n \equiv -1$ folgt:

$$V^{-1} = V'AV'A, \pmod{5}, \tag{10}$$

wobei wir unter A in gewohnter Weise die Spiegelung an der imaginären ω-Axe verstehen. Soll $V^{-1} \equiv 1$ sein, so muss $V'A$ eine Operation der Periode zwei in der erweiterten $\overline{G}_{60}$ sein; in dieser Gruppe aber gab es sechzehn Spiegelungen (fünfzehn mit reellem Symmetriekreise und eine ohne einen solchen): *Auch für $n \equiv -1$ giebt es somit sechzehn Modulargleichungen, welche bei Vertauschung der Argumente in sich übergehen.* Die zugehörigen sechzehn Repräsentantensysteme sind natürlich keineswegs durchgehends wieder jene, welche bei $n = +1$ die Modulargleichungen mit vertauschungsfähigen Argumenten lieferten; jedoch wolle man bemerken, dass das zum Schema $\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ gehörende System, dem $V' = 1$ zukommt, in beiden Fällen $V^{-1} \equiv 1$ liefert.

Um bei $n \equiv \pm 2$ diejenigen V' zu finden, welche $V \equiv 1$ liefern, müssen wir alle Lösungen von

$$\pm 2\alpha'^2 + \beta'\gamma' \equiv \pm 3\delta'^2 + \beta'\gamma' \equiv \pm 1,$$
$$(\pm 2\alpha' + \delta')\beta' \equiv (\pm 2\alpha' + \delta')\gamma' \equiv 0,$$
$$\alpha'\delta' - \beta'\gamma' \equiv 1$$

aufstellen. Die Anzahl ist in beiden Fällen zehn, *und also giebt es für $n \equiv +2$, wie für $n \equiv -2$ unter den sechzig Modulargleichungen insgesamt zehn mit vertauschungsfähigen Argumenten.* Setzen wir $V' = 1$, so wird $V \equiv \begin{pmatrix} 2, & 0 \\ 0, & 3 \end{pmatrix}$; also der Satz: *Bei $n \equiv \pm 2$ geht die zum Schema $\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ gehörende Modulargleichung in sich über, wenn man τ' durch τ, τ aber durch $-\frac{1}{\tau}$ ersetzt.* Nebenher wolle man noch anmerken: *Die zu den Schemata $\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ n, & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0, & 2 \\ 2n, & 0 \end{pmatrix}$ gehörenden Modulargleichungen gehen in allen vier Fällen bei Vertauschung der Argumente in sich über.*

Wir nehmen ferner $m = 16$, berücksichtigen dabei aber nur die φ-Modulargleichungen und bezeichnen die zum Schema $\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ gehörende

Gleichung durch $f(\varphi', \varphi) = 0$. Für dieses Schema folgt aus (8) $V \equiv \begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & n^{-1} \end{pmatrix}$ (mod. 16), und es ist nach I p. 670:

$$\varphi(V^{-1}(\omega)) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \varphi(\omega),$$

welche Gleichung jetzt im speciellen an Stelle der obigen Gleichung (4) tritt. Der hiermit gewonnene Satz aber heisst: *Die Modulargleichung $f(\varphi', \varphi) = 0$ geht in sich über, wenn man φ an Stelle von φ', und zugleich $(-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \varphi'$ an Stelle von φ setzt*; hier haben wir also Vertauschbarkeit zunächst nur für $n = 8h \pm 1$. Um auch in den Fällen $n = 8h \pm 3$ Schemata anzugeben, bei denen die zugehörige Modulargleichung $f' = 0$ den ursprünglichen und transformierten Modul vertauschungsfähig enthält, specificieren wir (8) in folgender Weise:

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} n = 8h+3, \; V_3'(\omega) = \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 2, & 5 \end{pmatrix}, \; V_3 \equiv \begin{pmatrix} 8h+7, & 0 \\ 0, & 8h+7 \end{pmatrix} \\ n = 8h+5, \; V_5'(\omega) = \begin{pmatrix} 1, & 4 \\ 4, & 17 \end{pmatrix}, \; V_5 \equiv \begin{pmatrix} 8h+5, & 8 \\ 8, & 8h+13 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{(md. 16)}.$$

Diese Substitutionen $V_\varkappa$ lassen $\varphi(\omega)$ unverändert, und also gehen die zugehörigen Modulargleichungen $f'(\varphi(V_\varkappa'(n\omega)), \varphi(\omega)) = 0$ bei Vertauschung der beiden Argumente in sich über. Bei der Wirkung der $V_\varkappa'$ auf φ folgt übrigens, dass $f'\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\varphi', \varphi\right)$ bez. $f'(i\varphi', \varphi)$ direct die linke Seite der zum Schema $\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ gehörenden Gleichung $f(\varphi', \varphi)$ ist:

$$(12) \qquad f'\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\varphi', \varphi\right) = f(\varphi', \varphi), \quad n = 8h+3,$$

$$(13) \qquad f'(i\varphi', \varphi) \qquad = f(\varphi', \varphi), \quad n = 8h+5.$$

Einen dabei etwa noch auftretenden Factor denken wir mit in f hineingenommen. —

Geht eine Modulargleichung bei Vertauschung der beiden Moduln in sich selbst über, so wird ihre linke Seite bei für unabhängig angesehenen Argumenten sich jedenfalls bis auf einen Factor reproducieren, wenn wir diese Argumente permutieren. Aber man folgert aus der Irreducibilität der Gleichung gerade wie bei der ersten Stufe, *dass die linke Seite der Modulargleichung für diesen Fall direct eine symmetrische Function ihrer beiden Argumente sein muss.* Für die φ-Modulargleichungen $f(\varphi', \varphi) = 0$ können wir bei unabhängig gedachten φ', φ im Falle $n = 8h \pm 3$ nur erst die Gleichung:

$$(14) \qquad f(\varphi, -\varphi') = c \cdot f(\varphi', \varphi),$$

sowie weiter den Satz folgern: Die ganze Function $f(\varphi', \varphi)$ der beiden Veränderlichen φ' und φ ist symmetrisch in $\frac{1+i}{\sqrt{2}}\varphi', \varphi$ bez. in $i\varphi', \varphi$, je nachdem $n = 8h + 3$ oder $8h + 5$ ist. Um aber von hier aus c zu bestimmen, wolle man noch die folgende Überlegung anstellen:

Soll eine Wurzel $\varphi' = \varphi(R(\omega))$ unserer Modulargleichung unendlich werden, so muss $R(\omega) = \frac{\alpha}{\gamma}$ werden mit $\alpha \equiv \gamma \equiv 1 \pmod{2}$; denn es muss in diesem Falle nach I p. 665 (2) das Argument von φ in eine (mod. 2) mit $\omega = 1$ äquivalente Polygonspitze hineinwandern. Nach der Gestalt des R (cf. (3) p. 120) folgt umgekehrt

$$(15) \qquad \omega = \frac{\alpha'}{\gamma'} = R^{-1}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right), \quad \alpha' \equiv \gamma' \equiv 1 \pmod{2},$$

so dass das zu $\varphi' = \infty$ gehörende φ gleichfalls ∞ ist. Da man diese Überlegung leicht umkehrt, so folgt der auch anderweit nutzbringende Satz: *Unter den beiden Grössen φ' und φ ist jede eine ganze algebraische Function der andern.* Die Gestalt von $f(\varphi', \varphi)$ ist also:

$$(16) \qquad f(\varphi', \varphi) = \varphi'^{\psi} + c\varphi^{\psi} + \cdots,$$

wobei in den ausgelassenen Gliedern die Exponenten von φ' und φ durchgehends $< \psi$ sind.

In Formel (16) hat nun c offenbar dieselbe Bedeutung wie in (14), da $\psi(n)$ für $n > 2$ stets eine gerade Zahl ist. Der Wert von c aber entspringt sofort aus dem Umstande, dass $f(\varphi', \varphi)$ symmetrisch in $\frac{1+i}{\sqrt{2}}\varphi', \varphi$ bez. $i\varphi', \varphi$ ist; man hat offenbar

$$(17) \qquad \begin{cases} c = i^{\frac{3}{2}\psi(n)} & \text{für } n = 8h + 3, \\ c = (-1)^{\frac{1}{2}\psi(n)} & \text{für } n = 8h + 5. \end{cases}$$

Unter Rückgang auf die Bedeutung von $\psi(n)$ ergiebt sich hieraus schliesslich der in beiden Fällen $n = 8h \pm 3$ gültige Satz: *In der Gleichung $f(\varphi, -\varphi') = \pm f(\varphi', \varphi)$ gilt nur in dem einen Falle einer Primzahlpotenz n das untere Zeichen; enthält aber n wenigstens zwei verschiedene Primfactoren, so gilt stets das obere Zeichen.*

§ 3. Grundlegung der invariantentheoretischen Methode für die Aufstellung der Modulargleichungen.

Sei $\tau(\omega)$ ein Hauptmodul, der für Transformation n^{ter} Ordnung im ganzen $\varkappa$ Modulargleichungen besitzt. Jede beliebig vorgeschriebene

unter denselben $f'(\tau', \tau) = 0$ können wir, wie bekannt, aus einer ersten $f(\tau', \tau) = 0$ dadurch herstellen, dass wir bei unverändertem τ auf τ' eine bestimmte, der Gleichung $f' = 0$ zugeordnete, lineare τ'-Substitution der Gruppe $G_\varkappa$ ausüben. Denken wir die linken Seiten der $\varkappa$ Modulargleichungen als ganze Functionen von τ' und τ geschrieben, so haben wir in diesem Sinne auch bei unabhängig gedachten τ', τ die Identität:

$$(1) \qquad f'(\tau', \tau) = \text{Const.}\ (c'\tau' + d')^\psi \cdot f\left(\frac{a'\tau' + b'}{c'\tau' + d'}, \tau\right).$$

Aber bei der soeben erkannten Reciprocität zwischen ursprünglichem und transformiertem Modul können wir z. B. von $f'(\tau', \tau) = 0$ aus die übrigen Gleichungen auch dadurch herstellen, dass wir τ' unverändert lassen und auf τ die Operationen der $G_\varkappa$ ausüben. Insbesondere wird es eine bestimmte Substitution $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ in der $G_\varkappa$ geben, welche auf τ angewandt zu $f(\tau', \tau) = 0$ zurückführt; es wird in diesem Sinne die Gleichung identisch bestehen:

$$(2) \qquad f(\tau', \tau) = \text{Const.}\ (c\tau + d)^\psi \cdot f'\left(\tau', \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right).$$

Durch Combination der Identitäten (1) und (2) folgt als neue Identität

$$(3) \qquad f(\tau', \tau) = C \cdot (c'\tau' + d')^\psi (c\tau + d)^\psi \cdot f\left(\frac{a'\tau' + b'}{c'\tau' + d'}, \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right),$$

wobei C eine noch nicht näher bestimmte numerische Constante ist.

Diese Identität benutzen wir nun, um von ihr aus eine invariantentheoretische Methode zur Aufstellung der Modulargleichungen zu entwickeln. Wir werden die betreffende Methode am Schlusse des vorliegenden Paragraphen noch ausführlicher bezeichnen; fürs erste geben wir eine Reihe von Vorbemerkungen. Man beachte vor allem, dass für die besondere Modulargleichung $f = 0$ durch (3) eine eindeutige Beziehung der endlichen Gruppe $G_\varkappa$ auf sich selbst begründet ist, welche wir durch die Nebeneinanderstellung der Substitutionen:

$$(4) \qquad \begin{pmatrix} a', & b' \\ c', & d' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$$

andeuten können. Diese Beziehung der $G_\varkappa$ auf sich ist uns sehr bekannt: Schreiben wir nämlich die in Rede stehende Modulargleichung ausführlich $f[\tau(R(\omega)), \tau(\omega)] = 0$, so können wir, da dieselbe in ω identisch besteht, auch

$$(5) \qquad f[\tau(R\,V(\omega)), \tau(V(\omega))] = 0$$

schreiben. Hier wählen wir nun V aus der $\Gamma_{\frac{\mu}{\varkappa}}$ und denken diese Substitution überdies bezüglich Γ_μ reduciert, so dass derselben eine bestimmte τ-Substitution der $G_\varkappa$, etwa die zweite Substitution (4) entspricht. Mit Γ_μ wird, wie man sofort sieht, auch $\Gamma_{\frac{\mu}{\varkappa}}$, modulo m reduciert, durch R in sich transformiert, so dass auch RVR^{-1} der $\Gamma_{\frac{\mu}{\varkappa}}$ angehört und, bezüglich Γ_μ reduciert, auf eine weitere Operation der $G_\varkappa$ führt. Ein Blick auf (5) zeigt, dass diese Operation keine andere als die erste Substitution (4) sein kann. *Die hier vorliegende Beziehung der $G_\varkappa$ auf sich selbst ist gerade die, welche wir sonst durch Transformation vermöge R bewerkstelligten.*

Solche zwei Substitutionen (4), wie wir sie nun zusammengeordnet fanden, werden wir wir jetzt als *eine simultane Substitution der beiden Variabelen τ', τ* bezeichnen; die $\varkappa$ simultanen Substitutionen bilden dann natürlich, abstract genommen, wieder unsere Gruppe $G_\varkappa$. Wollen wir also Gleichung (3) vorläufig dahin zum Ausdruck bringen, *dass jede Modulargleichung eine Gruppe $G_\varkappa$ von $\varkappa$ unterschiedenen simultanen Substitutionen in sich zulässt.*

Aber zum vollen Wert gelangen dieser Satz und die Gleichung (3) erst dadurch, dass wir hier wiederum die *homogene* Betrachtungsweise benutzen. Wir werden also etwa $\tau(\omega)$ nach den in I p. 616 u. f. entwickelten Regeln in den Quotienten zweier Modulformen $\tau_1(\omega_1, \omega_2)$, $\tau_2(\omega_1, \omega_2)$ spalten und setzen hierauf nach Anologie der bei der ersten Stufe getroffenen Massnahmen (cf. p. 37):

$$\tau_i'(\omega_1, \omega_2) = \tau_i\left(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \frac{\gamma\omega_1 + \delta\omega_2}{n}\right). \tag{6}$$

Die Substitutionen (4) denken wir so gewählt, dass ihre Determinante 1 ist; jede Substitution (4) spaltet sich alsdann in *zwei* homogene, über deren Zusammenordnung eben durch die Festsetzung (6) in eindeutiger Weise verfügt ist. *Insgesamt entspringt eine homogene $G_{2\varkappa}$ simultaner binärer Substitutionen der beiden Variabelenreihen τ_1', τ_2' und τ_1, τ_2.* Vor allem aber setzen wir nun:

$$\tau_2'^{\psi}\tau_2^{\psi} f(\tau', \tau) = f(\tau_1', \tau_2'; \tau_1, \tau_2), \tag{7}$$

wodurch die linke Seite unserer Modulargleichung zu einer doppeltbinären Form der Variabelenreihen τ_1', τ_2' und τ_1, τ_2 geworden ist, und zwar von der Dimension ψ in jeder dieser Reihen. Die Gleichung (3) schreibt sich daraufhin in die geglättete Gestalt um:

$$f(a'\tau_1' + b'\tau_2', c'\tau_1' + d'\tau_2'; a\tau_1 + b\tau_2, c\tau_1 + d\tau_2) = C\cdot f(\tau_1', \tau_2'; \tau_1, \tau_2), \tag{8}$$

wo wir nur gegen (3) die Bedeutung des numerischen Factors C in

zweckmässiger Weise modificierten. *Zufolge* (8) *hat die doppelt-binäre Form f die fundamentale Eigenschaft, sich bei Ausübung der* $2\varkappa$ *simultanen Substitutionen der* $G_{2\varkappa}$ *jeweils bis auf einen Factor zu reproducieren.*

Die Constante C anlangend ist es besonders interessant, dass wir in den weitaus meisten Fällen den Wert derselben durch rein gruppentheoretische Schlussweisen von vornherein angeben können. Es liegt dies daran, dass wir die Structur der jeweils in Betracht kommenden Gruppe $G_\varkappa$ von früher her kennen. Nehmen wir z. B. $m = 5$, und also den Fall des Ikosaeders, so ist $G_{2\varkappa}$ die homogene Ikosaedergruppe. Aber die letztere lässt sich bekanntlich aus zwei Substitutionen S, T erzeugen, von denen die erste die Periode fünf, die zweite die Periode vier hat, während $(ST)^3 = 1$ ist. T^2 besteht im Zeichenwechsel der vier Grössen τ_i, τ_i', und hierbei bleibt f sicher unverändert. Bei Ausübung von T kann also f höchstens noch einen Zeichenwechsel erleiden: $C_T = \pm 1$, während f bei Ausübung von S, allgemein zu reden, eine multiplicative fünfte Einheitswurzel annimmt: $C_S = \varepsilon^\nu$. Hier aber muss, da ST von der Periode drei ist, $\pm \varepsilon^\nu$ eine dritte Einheitswurzel sein, und also ist $C_S = C_T = +1$.*) *Die linke Seite* $f(\xi_1', \xi_2'; \xi_1, \xi_2)$ *einer Modulargleichung fünfter Stufe bleibt absolut invariant gegenüber allen* 120 *simultanen binären Substitutionen der* G_{120}.

Das gleiche Resultat ergiebt sich für die bei $m = 3$ auftretenden ξ-Modulargleichungen, während wir bei $m = 2$ und 4 für die Modulargleichungen von λ und μ durch Anwendung der gekennzeichneten gruppentheoretischen Schlussweise nur erst $C = \pm 1$ folgern können. Um für $m = 16$ die Modulargleichungen von $\varphi(\omega)$ noch etwas ausführlicher zu betrachten, so ist hier die homogene Diedergruppe G_{32} zu Grunde zu legen. Dieselbe lässt sich aus einer Substitution S der Periode acht und einer zweiten T der Periode vier erzeugen, deren Product ST gleichfalls die Periode vier aufweist. Statt S und T können wir aber auch T und ST als Erzeugende dieser G_{32} ansehen, und nun bemerkt man leicht wieder, dass sowohl gegenüber T wie ST die Form $f(\varphi_1', \varphi_2'; \varphi_1, \varphi_2)$ entweder unverändert bleibt oder Zeichenwechsel erfährt: *Die linke Seite* $f(\varphi_1', \varphi_2'; \varphi_1, \varphi_2)$ *einer* φ*-Modulargleichung bleibt gegenüber den* 32 *homogenen simultanen Substitutionen der* G_{32} *entweder durchaus unverändert oder wechselt doch nur ihr Zeichen.* Einzig für die bei der Stufe $m = 48$ eintretenden Modulargleichungen von $\sqrt[24]{\lambda(\lambda - 1)}$ gelingt die Bestimmung von C mit Hülfe solcher gruppentheoretischer Überlegungen allein noch nicht, weil nämlich

---

*) Es ist dies genau dieselbe Schlussweise, die bereits in Bd. I p. 694 zur Verwendung kam.

hier $G_\varkappa$ eine *cyclische* G_{24} wird. Doch betrachten wir diese Modulargleichungen an gegenwärtiger Stelle nicht besonders.

So oft C nicht mehr durchgängig $+1$, sondern ± 1 ist, muss offenbar gerade der Hälfte der Substitutionen von $G_{2\varkappa}$ der Wert $C = +1$ zukommen, der andern Hälfte $C = -1$. Jene $\varkappa$ Substitutionen mit $C = +1$ müssen alsdann eine innerhalb $G_{2\varkappa}$ ausgezeichnete Untergruppe $G_\varkappa$ bilden, die bei Fortgang zur nicht-homogenen Schreibweise eine innerhalb $G_\varkappa$ ausgezeichnete $G_{\frac{\varkappa}{2}}$ ergiebt*). So ist, wofern für $m = 4$ wirklich $C = \pm 1$ auftritt, $G_{\frac{\varkappa}{2}}$ die in der Oktaedergruppe ausgezeichnet enthaltene Tetraedergruppe, für $m = 2$ die in der G_6 enthaltene cyclische G_3; für $m = 16$ aber wäre $G_{\frac{\varkappa}{2}}$ eine von den drei in der Dieder-G_{16} ausgezeichnet enthaltenen Untergruppen G_8.**)

Immer haben wir jetzt eine $G_{2\varkappa}$ oder doch eine $G_\varkappa$ homogener simultaner Substitutionen unserer doppelt-binären Formen f in sich nachgewiesen und gründen nun auf dieses Resultat die folgende Methode der Aufstellung der Formen $f(\tau_1', \tau_2'; \tau_1', \tau_2)$: *Statt direct die Gestalt von f zu untersuchen, stellen wir uns vielmehr die Aufgabe, vorab allgemein die doppelt-binären Formen gleicher Dimension in τ_1', τ_2' und τ_1, τ_2 anzugeben, welche im Einzelfall gegenüber der Gruppe der simultanen Substitutionen den Charakter der (absoluten) Invarianz besitzen.* Wir gehen insbesondere darauf aus, *immer die vollen Systeme solcher Formen zu gewinnen; denn hernach werden wir die linken Seiten der in Betracht kommenden Modulargleichungen (unter Rücksichtnahme auf deren Dimension ψ) als ganze rationale Functionen der Formen jenes vollen Systems mit Hülfe einiger unbekannten numerischen Coefficienten sofort hinschreiben können.* Wie wir diese letzteren bestimmen mögen, wird Gegenstand weiterer Überlegungen sein müssen; zunächst bringen wir den hiermit exponierten invariantentheoretischen Ansatz durch Betrachtung einiger Beispiele zur wirklichen Durchbildung.

§ 4. Von der Bildung der vollen Formensysteme durch Polarisation im Falle der Cogredienz***).

Die Durchführung des soeben entwickelten Ansatzes hängt in erster Linie davon ab, welcher Art die öfter genannte Beziehung der

*) Die hier vollzogene Schlussweise wurde bereits in Bd. I p. 624 bei den Wurzeln aus Δ zur Anwendung gebracht.

**) Cf. I p. 466 u. f.

***) Man vgl. zu diesem Paragraphen die Lehrbücher der Invariantentheorie, z. B. Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen* (Leipzig, 1872), erster

Gruppe $G_{2\varkappa}$ auf sich selbst im Einzelfalle ist. In dieser Hinsicht ist offenbar der denkbar einfachste Fall der, dass jede Operation der $G_{2\varkappa}$ sich selbst zugewiesen ist; in diesem Falle erfahren die binären Variabelen τ_1', τ_2' gleichzeitig immer dieselbe Substitution wie τ_1, τ_2, und es sind demnach beide Systeme als *cogredient* zu bezeichnen*). Wollen wir sogleich entwickeln, welche Überlegung in diesem Falle der Cogredienz zur Gewinnung eines gewünschten vollen Formensystems hinführt! Es handelt sich dabei um einen in der Invariantentheorie wohlbekannten Ansatz, den wir hier in aller Kürze ableiten mögen.

Sei $f(\tau_1', \tau_2'; \tau_1, \tau_2)$ oder kürzer $f(\tau_i', \tau_i)$ irgend eine doppeltbinäre Form ν^{ter} Dimension in jeder Variabelenreihe, welche gegenüber der $G_{2\varkappa}$ Invarianz besitzt; durch Identischsetzen der beiden Variabelenreihen, $\tau_i' = \tau_i$, entspringt aus f eine einfach-binäre Form:

$$f(\tau_1, \tau_2; \tau_1, \tau_2) = g(\tau_1, \tau_2) \tag{1}$$

der Dimension 2ν, welche gleichfalls gegenüber den Operationen der $G_{2\varkappa}$ unverändert bleibt. Von letzterer Form bilde man nun die ν^{te} Polare nach τ_1', τ_2' und benutze für dieselbe die Bezeichnung:

$$g_\nu(\tau_1'\ \tau_2'; \tau_1, \tau_2) = \frac{\nu!}{(2\nu)!}\left(\tau_1'\frac{\partial g}{\partial \tau_1} + \tau_2'\frac{\partial g}{\partial \tau_2}\right)^\nu, \tag{2}$$

wobei rechts eine bekannte symbolische Schreibweise für die höheren Ableitungen von g gebraucht wurde. Es ist ein in den Elementen der Invariantentheorie zu beweisender Satz, dass eine Form $g(\tau_1, \tau_2)$ jede ihrer Polaren als Covariante besitzt, sofern nur die neuen Variabelen mit den alten cogredient sind; es ist also auch $g_\nu(\tau_i', \tau_i)$ eine zur $G_{2\varkappa}$ gehörende Invariante.

Wolle man nun ferner vermöge des Euler'schen Satzes von den homogenen Functionen aus (2) den Schluss ziehen, dass

$$g_\nu(\tau_1, \tau_2; \tau_1, \tau_2) = g(\tau_1, \tau_2) \tag{3}$$

ist; eben deswegen muss mit Rücksicht auf (1) die Differenz

$$f(\tau_1', \tau_2'; \tau_1, \tau_2) - g_\nu(\tau_1', \tau_2'; \tau_1, \tau_2) \tag{4}$$

unter der Bedingung $\tau_i' = \tau_i$ mit Null identisch werden. Aber dieser Umstand ergiebt wiederum als Folgerung, dass die Form (4) die Determinante:

$$(\tau', \tau) = \tau_1'\tau_2 - \tau_1\tau_2' \tag{5}$$

als Factor besitzen muss, so dass wir die Identität gewinnen:

Abschn. § 7 oder Gordan, *Vorlesungen über Invariantentheorie* (herausgegeben von Kerschensteiner, Leipzig 1887), II, 1, § 7.

*) Cf. „Ikos." p. 232.

(6) $$f(\tau_1', \tau_2'; \tau_1, \tau_2) = g_\nu(\tau_i', \tau_i) + (\tau', \tau) \cdot f_{\nu-1}(\tau_i', \tau_i),$$
wobei $f_{\nu-1}$ eine doppelt-binäre Form $(\nu - 1)^{\text{ter}}$ Dimension in jeder der beiden Variabelenreihen ist.

Die Determinante (5) ist durch die Eigenschaft ausgezeichnet, bei allen simultanen Substitutionen der cogredienten τ_i', τ_i unverändert zu bleiben, da wir ja diese Substitutionen als solche der Determinante $+1$ fixierten; (τ', τ) benennen wir dieserhalb als *identische Invariante*. Mit Rücksicht hierauf folgt aus der Identität (6), dass auch $f_{\nu-1}$ bei allen $2\varkappa$ Operationen der $G_{2\varkappa}$ unverändert bleiben muss. Jetzt aber wiederholt sich derselbe Gedankengang, den wir in der That auf $f_{\nu-1}$ gerade so gut anwenden können, wie wir ihn soeben auf f selbst anwandten. Wir werden zu einer mit (6) gleichgebildeten Identität gelangen:

$$f_{\nu-1}(\tau_i', \tau_i) = g_{\nu-1}(\tau_i'; \tau_i) + (\tau', \tau) \cdot f_{\nu-2}(\tau_i'; \tau_i),$$

und indem wir dieselbe Schlussweise jetzt auf $f_{\nu-2}$ und so fort im ganzen ν Male hinter einander anwenden, alsdann aber aus allen diesen Gleichungen $f_{\nu-1}$, $f_{\nu-2}$ u. s. w. eliminieren, entspringt schliesslich die Identität:

(7) $$f(\tau_i'; \tau_i) = g_\nu + (\tau', \tau) \cdot g_{\nu-1} + (\tau', \tau)^2 \cdot g_{\nu-2} + \cdots + (\tau', \tau)^\nu \cdot g_0.$$

Es bedeuten also hierin die g_μ stets μ^{te} Polaren einfach-binärer Formen $2\mu^{\text{ter}}$ Dimension, die im oft genannten Sinne zur $G_{2\varkappa}$ gehören; aus solchen Polaren und übrigens der identischen Invariante (τ', τ) lässt sich jede oben charakterisierte Form $f(\tau_i; \tau_i)$ rational und ganz zusammensetzen.

Im Gebiete der einfach-binären Formen lassen sich alle für die einzelne $G_{2\varkappa}$ in Betracht kommenden Formen bei den von uns zu untersuchenden Fällen stets aus *drei* speciellen Formen ihrer Art F_1, F_2, F_3 rational und ganz aufbauen, und zwar sind diese Formen selbstverständlich von gerader Dimension (weil sie doch auch bei gleichzeitigem Zeichenwechsel von τ_1, τ_2 unverändert bleiben). Da andrerseits die Polare einer Summe gleich der Summe der Polaren der einzelnen Glieder ist, so werden wir also, um alle Polaren g_ν rational und ganz darstellen zu können, offenbar nur die Formen $F_1^\alpha F_2^\beta F_3^\gamma$ mit beliebigen ganzen positiven Zahlen α, β, γ in bezeichneter Weise polarisieren müssen. Diese Aufgabe aber reduciert sich durch folgenden Gedankengang: Sei die Gesamtdimension von $F_1^\alpha F_2^\beta F_3^\gamma$ die $2\nu^{\text{te}}$ und $G_\nu(\tau_i', \tau_i)$ ihre ν^{te} Polare, seien ferner $G_1(\tau_i', \tau_i)$, $G_2(\tau_i', \tau_i)$, $G_3(\tau_i', \tau_i)$ die von F_1, F_2, F_3 zu gewinnenden Polaren gleicher Dimension in den ursprünglichen wie neuen Veränderlichen. Es folgt dann durch die nämliche Überlegung, welche vorhin zur Formel (6) führte, jetzt die Identität:

(8) $$G_\nu(\tau_i', \tau_i) = G_1^\alpha G_2^\beta G_3^\gamma + (\tau', \tau) \cdot f_{\nu-1}(\tau_i', \tau_i),$$

wobei $f_{\nu-1}$ eine invariante Form von der Dimension $(\nu - 1)$ in jeder Variabelenreihe ist. Hier müssen wir nun Formel (8) mit (7) zu einem recurrenten Process vereinigen: $f_{\nu-1}$ stellen wir nach (7) durch $(\tau'; \tau)$ und Polaren einfach-binärer Formen dar, deren Dimension $\leqq 2\nu - 2$ ist. Diese letzteren Formen schreiben wir wieder als Summen von Gliedern $F_1^\delta F_2^\varepsilon F_3^\zeta$ hin und haben nun ihre Polaren nach (8) aus (τ', τ), G_1, G_2, G_3 sowie solchen Formen $f(\tau_i', \tau_i)$ ganz und rational zusammenzusetzen, deren Dimension in der einzelnen Variabelenreihe nunmehr $\leqq \nu - 2$ ist. Man überblickt sofort, wie der hiermit eingeleitete Process nach einer endlichen Anzahl von Schritten zum Abschluss kommt, und gewinnt insbesondere als Hauptsatz: *Jede gegenüber den $2\varkappa$ simultanen Substitutionen der $G_{2\varkappa}$ invariante doppelt-binäre Form gleicher Dimension in den beiden Variabelenreihen ist rational und ganz darstellbar in (τ', τ), $G_1(\tau_i', \tau_i)$, $G_2(\tau_i', \tau_i)$, $G_3(\tau_i', \tau_i)$.*

Hiermit ist die Frage nach dem vollen System doppelt-binärer Formen im Falle der Cogredienz zur vollen Erledigung gebracht.

§ 5. Von der Tragweite des Falles der Cogredienz.

Ehe wir nach den Regeln des vorigen Paragraphen volle Formensysteme wirklich herstellen, müssen wir uns über die Tragweite des bislang allein betrachteten Falles der Cogredienz unterrichten. Wir müssen zu dem Zweck die folgende gruppentheoretische Überlegung anstellen, bei der wir uns auf die nicht-homogene Gruppe $G_\varkappa$ beschränken dürfen, und die speciell für $n = 5$ bereits „Ikos." p. 232 u. f. besprochen wurde.

Wir können sogleich $\varkappa$ Arten angeben, die Gruppe $G_\varkappa$ auf sich selbst holoedrisch isomorph zu beziehen, indem wir nämlich $G_\varkappa$ nach einander durch ihre $\varkappa$ Substitutionen transformieren und dabei im Einzelfall immer die transformierte Substitution der ursprünglichen zuordnen. Soll eine dieser Zuordnungen die identische sein und also zu Cogredienz führen, so muss die zur Transformation benutzte Substitution der $G_\varkappa$ innerhalb dieser Gruppe ausgezeichnet sein, und solches gilt bei den für uns in Betracht kommenden Gruppen in der Regel nur von der Identität; die einzige Ausnahme ist die Diedergruppe $G_{2\nu}$ von *geradem* ν, wo sich in der That neben 1 noch eine ausgezeichnete V_2 vorfindet*). Wir gelangen also in gekennzeichneter Weise

*) Von den Modulargleichungen für $\sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)}$, bei denen $G_\varkappa$ cyclisch wird, sehen wir der Kürze halber ab, zumal da diese Gleichungen von anderer Seite ausgiebig betrachtet worden sind (cf. unten).

im ganzen also $\varkappa$ bez. beim Dieder mit geradem ν zu $\frac{\varkappa}{2}$ verschiedenen Beziehungen der $G_\varkappa$ auf sich selbst.

Liegt nun aber irgend eine beliebige holoedrisch isomorphe Beziehung der $G_\varkappa$ auf sich selbst vor, so werden wir von ihr aus gleich im ganzen $\varkappa$ bez. $\frac{1}{2}\varkappa$ solche Beziehungen herstellen können, wenn wir nämlich sie in der soeben bezeichneten Weise hinterher noch durch die Operationen der $G_\varkappa$ transformieren. Diese $\varkappa$ bez. $\frac{1}{2}\varkappa$ Beziehungen fassen wir zu einer Classe zusammen; findet sich in derselben die identische Zuordnung, so kommen wir offenbar zu jener ersten Classe zurück, welche wir nun auch als die „Classe der Cogredienz" benennen können. Diese besondere Classe der Cogredienz existiert natürlich für jede Gruppe $G_\varkappa$. Ob darüber hinaus noch weitere Classen vorkommen, hängt selbstverständlich von der Eigenart der Gruppe $G_\varkappa$ ab; immer aber ist evident, dass *die Anzahl aller möglichen Beziehungen der $G_\varkappa$ auf sich selbst ein Multiplum von $\varkappa$ bez. $\frac{1}{2}\varkappa$ ist, und dass der Quotient aus dieser Anzahl und $\varkappa$ bez. $\frac{1}{2}\varkappa$ die Zahl der Classen giebt.*

Für unsere invariantentheoretischen Fragen nach doppelt-binären Formen, welche der einzelnen Zuordnung der $G_\varkappa$ angehören, werden wir alle $\varkappa$ bez. $\frac{1}{2}\varkappa$ Zuordnungen der einzelnen Classe gleich miterledigt haben, wenn wir nur für eine unter ihnen das volle Formensystem berechnet haben. Offenbar treten hier ganz dieselben Verhältnisse ein, wie bei den Modulargleichungen selbst: *In den Formen jenes vollen Systems werden wir nach einander etwa bei unveränderten τ_1', τ_2' auf τ_1, τ_2 alle Substitutionen der homogenen $G_{2\varkappa}$ ausüben, um für alle $\varkappa$ bez. $\frac{1}{2}\varkappa$ in Rede stehenden Beziehungen der Gruppe auf sich selbst die vollen Formensysteme zu gewinnen.* Der blosse Zeichenwechsel von τ_1, τ_2 ergiebt dabei keine wesentlich neue Formen, und beim Dieder mit geradem ν wird auch die ausgezeichnete V_2 im wesentlichen auf dasselbe Formensystem zurückführen.

Jetzt ist es für den Fortgang der Betrachtung fundamental, dass wir für alle zu betrachtenden Gruppen von vornherein die Anzahl aller isomorphen Beziehungen der einzelnen $G_\varkappa$ auf sich selbst angeben können, wie wir solches zunächst an der Ikosaedergruppe G_{60} in folgender Weise erläutern. Die G_{60} lässt sich aus zwei ihrer Substitutionen V_5, V_2 mit $(V_5 V_2)^3 = 1$ erzeugen. Bei einer Beziehung der G_{60} auf sich selbst entsprechen den V_5, V_2 wiederum zwei Substitutionen V_5', V_2' mit $(V_5' V_2')^3 = 1$, und andrerseits werden wir stets eine isomorphe Beziehung der G_{60} auf sich selbst dadurch definieren können, dass wir irgend zwei derartige Substitutionenpaare V_5, V_2 und V_5', V_2'

einander entsprechen lassen*). Nun fanden wir bereits in I p. 481, dass es 120 Paare V_5, V_2 fraglicher Art in jeder G_{60} giebt, *und also lässt sich eine Ikosaedergruppe auf 120 Arten isomorph auf sich selbst beziehen; diese 120 Arten werden zwei Classen bilden, von denen die eine diejenige der Cogredienz ist***).

Es fragt sich jetzt, ob bei der Transformation n^{ter} Ordnung fünfter Stufe thatsächlich beide Classen zur Geltung kommen; dem ist in der That so, wie wir leicht ins einzelne ausführen. Für den Transformationsgrad n haben wir nämlich die Fallunterscheidung $n \equiv \pm 1, \pm 2$, (mod. 5) zu treffen. *Der erste Fall* $n \equiv 1$ *gehört ersichtlich zur Classe der Cogredienz*, zu welcher das Schema $\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ unmittelbar hinführt. Beim zweiten Fall $n \equiv -1$ entsprechen den homogenen Substitutionen S, T, sofern wir wieder das Schema $\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ zu Grunde legen, die neuen S^{-1}, T^{-1}. Aber diese Substitutionen genügen den Congruenzen:

$$S^{-1} \equiv U^{-1}SU, \quad T^{-1} \equiv U^{-1}TU, \quad (\text{mod. } 5),$$

unter U die homogene Substitution $\begin{pmatrix} 2, & 0 \\ 0, & 3 \end{pmatrix}$ verstanden, gehen also aus S und T vermöge Transformation durch eine Operation der G_{60} selbst hervor. *Demnach führt auch* $n \equiv -1$ *zur Classe der Cogredienz, und wir werden, sofern wir immer beim Schema* $\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ *verbleiben wollen, ein volles Formensystem für* $n \equiv -1$ *aus demjenigen der Cogredienz dadurch ableiten, dass wir im letzteren* $-\zeta_2, \zeta_1$ *an Stelle von* ζ_1, ζ_2 *setzen.* Die beiden rückständigen Fälle $n \equiv \pm 2$ führen aber notwendig zur zweiten Classe, welche wir als die *Classe der Digredienz* bezeichnen mögen***). In der That sind ja die Operationen $S^{\pm 2}$, welche bei Gebrauch des Schemas $\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ der Operation S zugeordnet sind, innerhalb der G_{120} wohl unter einander, aber nicht mit S gleichberechtigt. Die Fälle $n \equiv \pm 2$ (mod. 5) werden also durch die Regeln des vorigen Paragraphen noch nicht mit erschöpft; wir müssen ihnen vielmehr weiter unten eine besondere Betrachtung widmen.

---

*) Cf. I p. 455 u. f.

**) Vgl. hierzu „Ikos." l. c.

***) In den Vorlesungen über das Ikosaeder ist der eben gemeinte Fall als derjenige der *Contragredienz* bezeichnet. Es erscheint aber zweckmässig statt dessen die im Texte befürwortete Bezeichnung zu gebrauchen, weil nämlich der Begriff der Contragredienz weiter unten in einer typischen, hier aber nicht vorliegenden Bedeutung gebraucht wird.

[illegible]

[illegible] der Fall einer Diedergruppe $G_{2\nu}$, welche wir [illegible] zwei [illegible] Substitutionen s und t erzeugen, die den Bedingungen genügen:

$$s^\nu = 1, \quad t^2 = 1, \quad (st)^2 = 1.$$

Unter den Substitutionen s^ν haben $\varphi(\nu)$ die Periode ν; irgend eine derselben, mit einer der ν Substitutionen $s^\nu t$ combiniert, erzeugt $G_{2\nu}$. Letztere Gruppe lässt sich also in $\nu\varphi(\nu)$ Arten isomorph auf sich selbst beziehen, und diese Arten bilden $\frac{1}{2}\varphi(\nu)$ bez. $\varphi(\nu)$ Classen, je nachdem ν ungerade oder gerade ist. Für $\nu = 3$ haben wir nur die eine Classe der Cogredienz, so dass für die bei $n = 2$ *eintretenden* [illegible]*-Modulargleichungen die Resolventenprocesse des vorigen Paragraphen die erschöpfende Grundlage abgeben.* Für die bei $n = 16$ eintretenden Modulargleichungen von $\varphi(\omega) = \sqrt[8]{k}$ entspringen zunächst vier Classen, von denen jedoch nur zwei bei Transformation n^{ter} Ordnung wirklich zur Geltung kommen. Als Operationen s, t haben wir nämlich:

$$(1) \qquad s(\varphi) = e^{\frac{\pi i}{4}}\varphi, \quad t(\varphi) = \frac{1}{\varphi},$$

welche nach der Tabelle (5) in I p. 670 bez. den Modulsubstitutionen $\begin{pmatrix}1, 2\\ 0, 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1, 0\\ 1, 1\end{pmatrix}$ entsprechen. Legen wir nun bei Transformation n^{ter} Ordnung das Schema $\begin{pmatrix}n, 0\\ 0, 1\end{pmatrix}$ zu Grunde, so werden offenbar den beiden Substitutionen (1) die nachfolgenden zuzuordnen sein:

$$(2) \qquad s'(\varphi) = e^{\frac{\pi i n}{4}}\varphi, \quad t'(\varphi) = \frac{1}{\varphi}.$$

Hier liegt für $n = 8h + 1$ direct Cogredienz vor; aber auch in dem Falle $n = 8h - 1$ befinden wir uns in der Classe der Cogredienz, indem nämlich

$$s' = t^{-1}st, \quad t' = t^{-1}tt$$

hier zutrifft. In eine zweite Classe gehören indessen die beiden Fälle $n = 8h \pm 3$; aber man halte fest, dass auch hier wieder die für $n = 8h - 3$ durch (1) und (2) festgelegte Beziehung der G_{16} auf sich selbst durch Transformation vermöge t in die für $n = 8h + 3$ gültige übergeführt wird. Sollen wir die beiden hiermit zur Geltung gekommenen Classen wieder als diejenigen der Cogredienz und Digredienz unterscheiden, so wolle man anmerken: *Für die bei $n = 8h \pm 1$ eintretenden Fälle der Cogredienz geben die Entwicklungen des vorigen Paragraphen eine erschöpfende Grundlage; die Fälle der Digredienz, nämlich $n = 8h \pm 3$, bleiben noch zu erledigen.*

§ 6. Aufstellung der vollen Formensysteme für die bei $m = 5$ auftretenden Modulargleichungen des Ikosaeders.

Aus dem gesamten Gebiete, welches unsere bisherige Betrachtung umspannt, wählen wir uns jetzt zur besonderen Discussion einerseits die Modulargleichungen fünfter Stufe, sodann aber die bei $m = 16$ auftretenden Modulargleichungen von $\varphi(\omega)$. Nur für diese werden wir demnach die vollen Formensysteme aufstellen und haben hierbei offenbar Gelegenheit, die beiden einzigen durch die Betrachtung der Cogredienz noch nicht miterledigten Fälle der Untersuchung zu unterziehen. Zunächst stellen wir die ζ-Formen auf; es ist dabei im Interesse einer übersichtlichen Bezeichnungsweise wünschenswert, wenn wir die transformierten ζ_1, ζ_2 nicht wie bisher durch ζ_1', ζ_2', sondern durch eine specielle Benennung, etwa η_1, η_2 auszeichnen. Um übrigens in ζ_1, ζ_2 wirklich Modulformen fünfter Stufe zu besitzen, müssen wir jetzt unter ζ_1, ζ_2 diejenigen Grössen verstehen, welche wir früher mit ζ_3, ζ_4 bezeichneten (cf. I p. 631 (9)). Als Erzeugende S, T der homogenen Ikosaedergruppe haben wir demgemäss die l. c. unter (10) gegebenen Substitutionen in Ansatz zu bringen. Des näheren unterscheiden wir nun gleich zwischen Cogredienz und Digredienz.

Erstlich im Falle der Cogredienz sind die Erzeugenden der G_{120} der simultanen Substitutionen:

$$S:\ \eta_1' = \varepsilon^3\eta_1, \quad \eta_2' = \varepsilon^2\eta_2; \qquad \zeta_1' = \varepsilon^3\zeta_1, \quad \zeta_2' = \varepsilon^2\zeta_2$$

$$(1) \qquad T: \begin{cases} \sqrt{5}\,\eta_1' = +(\varepsilon - \varepsilon^4)\eta_1 - (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\eta_2, \\ \sqrt{5}\,\eta_2' = -(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\eta_1 - (\varepsilon - \varepsilon^4)\eta_2; \\ \sqrt{5}\,\zeta_1' = +(\varepsilon - \varepsilon^4)\zeta_1 - (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\zeta_2, \\ \sqrt{5}\,\zeta_2' = -(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\zeta_1 - (\varepsilon - \varepsilon^4)\zeta_2. \end{cases}$$

Das volle Formensystem umfasst neben der identischen Invariante $A_0 = \eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1$ die sechste, bez. zehnte und fünfzehnte Polare der drei bekannten Ikosaederformen f, H, T. Die Berechnung dieser Polaren ist in den Vorlesungen über das Ikosaeder auf p. 215 durchgeführt; es sind nämlich die dort angegebenen Formen B, C, D genau die fraglichen Polaren, wenn wir nur statt der l. c. gebrauchten Zeichen A_0, A_1, A_2 deren Bedeutung:

$$A_0 = -\tfrac{1}{2}(\eta_1\zeta_2 + \eta_2\zeta_1), \quad A_1 = \eta_1\zeta_1, \quad A_2 = -\eta_2\zeta_2$$

eintragen (cf. „Ikos." p. 211). Unter Festhaltung am Schema $\begin{pmatrix} n, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}$ der Transformation finden wir schliesslich erstlich für den Fall $n = 5h + 1$ als

volles Formensystem der η_i, ζ_i für $n \equiv 1 \pmod 5$:

$$
(2) \quad \begin{cases}
A_0 = \eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1, \\
A_6 = 42(\eta_1\zeta_2 + \eta_2\zeta_1)(\eta_1^5\zeta_2^5 - \eta_2^5\zeta_1^5) \\
\qquad + (\eta_1^6\zeta_2^6 + \eta_2^6\zeta_1^6) - 6^2\eta_1\eta_2\zeta_1\zeta_2(\eta_1^4\zeta_2^4 + \eta_2^4\zeta_1^4) \\
\qquad - 15^2\eta_1^2\eta_2^2\zeta_1^2\zeta_2^2(\eta_1^2\zeta_2^2 + \eta_2^2\zeta_1^2) + 20^2\eta_1^3\eta_2^3\zeta_1^3\zeta_2^3, \\
A_{10} = 17\cdot 22(\eta_1^{10}\zeta_2^{10} + \eta_2^{10}\zeta_1^{10}) - 66(\eta_1^5\zeta_2^5 - \eta_2^5\zeta_1^5) \\
\qquad \cdot\{21(\eta_1^5\zeta_2^5 - \eta_2^5\zeta_1^5) + 175\,\eta_1\eta_2\zeta_1\zeta_2(\eta_1^3\zeta_2^3 + \eta_2^3\zeta_1^3) \\
\qquad + 450\,\eta_1^2\eta_2^2\zeta_1^2\zeta_2^2(\eta_1\zeta_2 + \eta_2\zeta_1)\} \\
\qquad + (\eta_1^{10}\zeta_2^{10} + \eta_2^{10}\zeta_1^{10}) - 10^2\eta_1\eta_2\zeta_1\zeta_2(\eta_1^8\zeta_2^8 + \eta_2^8\zeta_1^8) \\
\qquad + 45^2\eta_1^2\eta_2^2\zeta_1^2\zeta_2^2(\eta_1^6\zeta_2^6 + \eta_2^6\zeta_1^6) \\
\qquad + 120^2\eta_1^3\eta_2^3\zeta_1^3\zeta_2^3(\eta_1^4\zeta_2^4 + \eta_2^4\zeta_1^4) \\
\qquad + 210^2\eta_1^4\eta_2^4\zeta_1^4\zeta_2^4(\eta_1^2\zeta_2^2 + \eta_2^2\zeta_1^2) + 252^2\eta_1^5\eta_2^5\zeta_1^5\zeta_2^5, \\
A_{15} = (\eta_1^{15}\zeta_2^{15} + \eta_2^{15}\zeta_1^{15}) + (\eta_1^{10}\zeta_2^{10} - \eta_2^{10}\zeta_1^{10}) \\
\qquad \cdot\{11(\eta_1^5\zeta_2^5 + \eta_2^5\zeta_1^5) + 75\,\eta_1\eta_2\zeta_1\zeta_2(\eta_1^3\zeta_2^3 + \eta_2^3\zeta_1^3) \\
\qquad + 175\,\eta_1^2\eta_2^2\zeta_1^2\zeta_2^2(\eta_1\zeta_2 + \eta_2\zeta_1)\} - (\eta_1^5\zeta_2^5 + \eta_2^5\zeta_1^5) \\
\qquad \cdot\{(\eta_1^{10}\zeta_2^{10} + \eta_2^{10}\zeta_1^{10}) + 25\,\eta_1\eta_2\zeta_1\zeta_2(\eta_1^8\zeta_2^8 + \eta_2^8\zeta_1^8) \\
\qquad + 225\,\eta_1^2\eta_2^2\zeta_1^2\zeta_2^2(\eta_1^6\zeta_2^6 + \eta_2^6\zeta_1^6) \\
\qquad + 975\,\eta_1^3\eta_2^3\zeta_1^3\zeta_2^3(\eta_1^4\zeta_2^4 + \eta_2^4\zeta_1^4) \\
\qquad + 2275\,\eta_1^4\eta_2^4\zeta_1^4\zeta_2^4(\eta_1^2\zeta_2^2 + \eta_2^2\zeta_1^2) + 3003\,\eta_1^5\eta_2^5\zeta_1^5\zeta_2^5\}.
\end{cases}
$$

Wenn wir jetzt auch im Falle $n = 5h - 1$ das Schema $\begin{pmatrix} n, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}$ der Transformation beibehalten, so wird das bezügliche Formensystem nach den Regeln des vorigen Paragraphen dadurch entstehen, dass man bei unveränderten η_i an Stelle von ζ_1, ζ_2 einfach $-\zeta_2, \zeta_1$ schreibt. So entspringt als

volles Formensystem der η_i, ζ_i *für* $n \equiv -1$ (*mod.* 5):

$$(3)\quad \begin{cases} \mathsf{B}_1(\eta_1, \eta_2; \zeta_1, \zeta_2) = \mathsf{A}_1(\eta_1, \eta_2; -\zeta_2, \zeta_1) = \eta_1\zeta_1 + \eta_2\zeta_2, \\ \mathsf{B}_k(\eta_1, \eta_2; \zeta_1, \zeta_2) = \mathsf{A}_k(\eta_1, \eta_2; -\zeta_2, \zeta_1); \; k = 6, 10, 15. \end{cases}$$

Auch für den Fall der Digredienz ist (auf Grund *Gordan*'scher Untersuchungen) das volle System der doppelt-binären Formen in den Vorlesungen über das Ikosaeder aufgestellt, wo man dasselbe p. 196 oben vorfindet. Da es indessen schwer halten könnte, jene Entwicklungen ausser dem Zusammenhange zu überblicken, so mögen wir hier in Kürze einen Gedankengang skizzieren, der zu jenen Formen hinführt. Wir setzen $n \equiv 2$ (mod. 5) voraus und haben dann den homogenen Substitutionen S, T die beiden folgenden Operationen zuzuordnen:

$$S' = S^2, \quad T' \equiv \begin{pmatrix} 0, & 3 \\ 3, & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3, & 0 \\ 0, & 2 \end{pmatrix}, \text{ (mod. 5)}.$$

Die Erzeugenden der G_{120} der 120 simultanen Substitutionen sind demgemäss:

$$S\colon\ \eta_1' = \varepsilon\eta_1, \quad \eta_2' = \varepsilon^4\eta_2; \quad \zeta_1' = \varepsilon^3\zeta_1, \quad \zeta_2' = \varepsilon^2\zeta_2,$$

$$(4)\quad T\colon \begin{cases} \sqrt{5}\eta_1' = -(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\eta_1 - (\varepsilon - \varepsilon^4)\eta_2; \\ \sqrt{5}\eta_2' = -(\varepsilon - \varepsilon^4)\eta_1 + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\eta_2, \\ \sqrt{5}\zeta_1' = +(\varepsilon - \varepsilon^4)\zeta_1 - (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\zeta_2; \\ \sqrt{5}\zeta_2' = -(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\zeta_1 - (\varepsilon - \varepsilon^4)\zeta_2. \end{cases}$$

Die einzelne ζ-Substitution geht also dadurch in ihre entsprechende η-Substitution über, dass man ε^2 an Stelle von ε setzt; bei dieser Ersetzung muss zugleich das Zeichen von $\sqrt{5} = \varepsilon + \varepsilon^4 - \varepsilon^2 - \varepsilon^3$ gewechselt werden.

Die gesuchten Formen sind nun jedenfalls ganze homogene Functionen der vier Grössen:

$$(5)\qquad y_1 = \eta_2\zeta_2, \quad y_2 = \eta_2\zeta_1, \quad y_3 = -\eta_1\zeta_2, \quad y_4 = \eta_1\zeta_1,$$

welch' letztere zufolge leichter Rechnung gegenüber den unter (4) gegebenen Operationen S und T das folgende Verhalten zeigen:

$$S\colon\ y_\nu' = \varepsilon^\nu y_\nu,$$

$$(6)\quad T\colon \begin{cases} \sqrt{5}y_1' = +y_1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}y_2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}y_3 - y_4, \\ \sqrt{5}y_2' = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}y_1 - y_2 + y_3 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}y_4, \\ \sqrt{5}y_3' = +\frac{1+\sqrt{5}}{2}y_1 + y_2 - y_3 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}y_4, \\ \sqrt{5}y_4' = -y_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}y_2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}y_3 + y_4. \end{cases}$$

Setzen wir aber weiter ($\nu = 0, 1, 2, 3, 4$):

$$(7) \qquad z_\nu = \varepsilon^\nu y_1 + \varepsilon^{2\nu} y_2 + \varepsilon^{3\nu} y_3 + \varepsilon^{4\nu} y_4,$$

fünf Formeln, aus denen sich die y sofort in der Gestalt berechnen:

$$(8) \qquad 5y_\nu = z_0 + \varepsilon^{-\nu} z_1 + \varepsilon^{-2\nu} z_2 + \varepsilon^{-3\nu} z_3 + \varepsilon^{-4\nu} z_4,$$

so werden die gesuchten Formen auch als ganze homogene Functionen der z_ν angesprochen werden können. Aber für die z berechnen wir aus (6) das folgende Verhalten gegenüber S und T:

$$(9) \qquad \begin{cases} S: & z_\nu' = z_{\nu+1}, \\ T: & z_0' = z_0, \quad z_1' = z_2, \quad z_2' = z_1, \quad z_3' = z_4, \quad z_4' = z_3. \end{cases}$$

Da der simultane Zeichenwechsel der η_i, ζ_i die y_ν nicht ändert, so wird aus den erzeugenden Permutationen (9) eine Ikosaedergruppe G_{60}, und es ist unmittelbar evident, dass dies die Gruppe der geraden Vertauschungen der fünf z_ν ist.

Wenn wir jetzt die linke Seite der Modulargleichung als ganze homogene Function der z schreiben, so wird sie zufolge des eben erhaltenen Resultates die Gestalt annehmen

$$(10) \qquad f(\eta_1, \eta_2; \zeta_1, \zeta_2) = s_1 + s_2\sqrt{D},$$

wo s_1, s_2 irgend zwei symmetrische ganze Functionen der fünf z_ν, D aber deren Discriminante ist. Nun aber soll sich $f(\eta_i, \zeta_i)$ nach den in § 2 (p. 124) entwickelten Regeln bis auf einen Factor reproducieren, wenn wir an Stelle von $\eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2$ bez. $-\zeta_2, \zeta_1, \eta_1, \eta_2$ schreiben. Diese Umänderung hat für die y die Permutation $y_\nu' = y_{2\nu}$ zur Folge, und diese wieder ergiebt für die z die *ungerade* Permutation $z_\nu' = z_{3\nu}$, so dass $(s_1 - s_2\sqrt{D})$ bis auf einen Factor mit $(s_1 + s_2\sqrt{D})$ übereinstimmen muss. Ersichtlich ist dies nur dadurch möglich, dass entweder s_1 oder s_2 identisch verschwinden, und von beiden Fällen ist der erstere deshalb nicht möglich, weil alsdann die Modulargleichung reducibel sein würde. *Die linke Seite der Modulargleichung ist dieserhalb eine ganze symmetrische Function der fünf z_ν und als solche ganz und rational in den elementaren symmetrischen Functionen der Grössen z_ν.*

Ziehen wir zufolge dieses Resultats zur Gewinnung eines vollen Formensystems etwa die fünf Potenzsummen der z_ν heran, so fällt dabei ins Gewicht, dass nach (7) sowohl die Summe der z, wie auch die Summe der Quadrate der z mit Null identisch ist. Es bleibt nur noch die dritte, vierte und fünfte Potenzsumme, welche wir bei der Umrechnung auf η_i, ζ_i von den Factoren 15 bez. 20 und 5 befreien. So gewinnen wir als

volles Formensystem für $n \equiv 2$ (*mod.* 5):

$$(11)\quad \begin{cases} A_3 = \eta_1^3\zeta_1\zeta_2^2 + \eta_1^2\eta_2\zeta_1^3 - \eta_1\eta_2^2\zeta_2^3 + \eta_2^3\zeta_1^2\zeta_2, \\ A_4 = -\eta_1^4\zeta_1^3\zeta_2 - \eta_1^3\eta_2\zeta_2^4 - 3\eta_1^2\eta_2^2\zeta_1^2\zeta_2^2 \\ \qquad + \eta_1\eta_2^3\zeta_1^4 + \eta_2^4\zeta_1\zeta_2^3, \\ A_5 = \eta_1^5(\zeta_1^5 - \zeta_2^5) + 10\eta_1^4\eta_2\zeta_1^2\zeta_2^3 - 10\eta_1^3\eta_2^2\zeta_1^4\zeta_2 \\ \qquad + 10\eta_1^2\eta_2^3\zeta_1\zeta_2^4 + 10\eta_1\eta_2^4\zeta_1^3\zeta_2^2 + \eta_2^5(\zeta_1^5 + \zeta_2^5). \end{cases}$$

Dem reiht sich nun ohne weiteres für das Schema $\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ an als

volles Formensystem für $n \equiv 3$ (*mod.* 5):

$$(12)\qquad B_k(\eta_1, \eta_2; \zeta_1, \zeta_2) = A_k(\eta_1, \eta_2; -\zeta_2, \zeta_1).$$

§ 7. Aufstellung der vollen Formensysteme für die bei $m = 16$ auftretenden Modulargleichungen von $\varphi(\omega)$.

Letzten Endes wollen wir auch noch für die Modulargleichungen 16ter Stufe von $\varphi(\omega) = \sqrt[4]{k}$ die vollen Formensysteme angeben. Dabei ist es wieder zweckmässig, die bisher gebrauchte Bezeichnungsweise einer ähnlichen Modification zu unterwerfen, wie im vorigen Paragraphen, und wir gehen in diesem Sinne etwa auf die seit lange gebrauchte Bezeichnung $\varphi = u$, $\varphi' = v$ zurück, welche Modulfunctionen wir dann zum Zweck homogener Schreibweise durch die Quotienten $u_1 : u_2$ beziehungsweise $v_1 : v_2$ ersetzen. Wie man bemerken wird, ist es nicht erforderlich diese u_1, u_2 etc. noch ausdrücklicher als Modulformen zu definieren.

In § 3 fand sich nur erst, dass die linke Seite einer (homogen geschriebenen) Modulargleichung von $\varphi(\omega)$ sich vom Vorzeichen abgesehen bei den 32 Substitutionen der homogenen Diedergruppe G_{32} reproducierte. Hier ist des näheren zu entscheiden, ob thatsächlich bei der Hälfte jener 32 Substitutionen Zeichenwechsel eintritt oder nicht. Zu dem Zweck berechnen wir aus den Angaben von § 2 und insbesondere aus den damaligen Formeln (16) und (17) folgende Anfangsglieder für die linke Seite der Modulargleichung *):

$$(1)\quad \begin{cases} n = 8h \pm 1, \quad f(v_1, v_2; u_1, u_2) \\ \qquad = v_1^\psi u_2^\psi + v_2^\psi u_1^\psi + v_1 v_2 u_1 u_2 (a v_1^{\psi-2} u_1^{\psi-2} + \cdots) = 0, \\ n = 8h \pm 3, \quad f(v_1, v_2; u_1, u_2) \\ \qquad = v_1^\psi u_2^\psi - v_2^\psi u_1^\psi + v_1 v_2 u_1 u_2 (b v_1^{\psi-2} u_1^{\psi-2} + \cdots) = 0 \end{cases}$$

*) Durch diese Gestalten kommt eben der früher bereits erwähnte Satz zum Ausdruck, dass sowohl u und v, wie aber auch u^{-1} und v^{-1}, von einander *ganze* algebraische Functionen sind.

Hinzuzusetzen ist, dass für $n = 8h \pm 3$ der Transformationsgrad n als Primzahlpotenz vorausgesetzt wurde (andernfalls hätte das zweite Glied $v_2^\psi u_1^\psi$ das positive Zeichen bekommen müssen); dieser Fall der Primzahlpotenz (für $n = 8h \pm 3$) soll aber, als in erster Linie wichtig, hier allein Berücksichtigung finden. Wir gehen nun zur Einzeldiscussion der verschiedenen Fälle.

Im Falle $n = 8h + 1$ haben wir, immer unter Gebrauch des Schemas $\begin{pmatrix} n, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}$, cogrediente v_i, u_i, und zwar sind die Erzeugenden der G_{32} *):

$$(2)\qquad s: \begin{cases} v_1' = e^{\frac{\pi i}{8}} v_1, & v_2' = e^{-\frac{\pi i}{8}} v_2, \\ u_1' = e^{\frac{\pi i}{8}} u_1, & u_2' = e^{-\frac{\pi i}{8}} u_2, \end{cases} \qquad t: \begin{cases} v_1' = i v_2, & v_2' = i v_1, \\ u_1' = i u_2, & u_2' = i u_1. \end{cases}$$

Da ψ stets eine gerade Zahl ist, so folgt: *$f(v_i, u_i)$ verhält sich gegenüber den 32 simultanen Substitutionen absolut invariant.* Jetzt ist im einfach-binären Gebiet das volle System der invarianten Formen gegeben durch:

$$(3)\qquad u_1^2 u_2^2, \quad u_1^{16} + u_2^{16}, \quad u_1 u_2 (u_1^{16} - u_2^{16}).\text{**)}$$

Wir bilden von diesen Formen bez. die zweite, achte und neunte Polare und setzen übrigens die identische Invariante hinzu. Die entspringenden Bildungen lassen sich, indem wir sie zweckmässig combinieren, noch mehr vereinfachen, *und es kommt als volles System doppelt-binärer Formen für die aus* (2) *entspringende* G_{32}:

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathsf{A}_1 = v_1 u_2 - v_2 u_1, \quad \mathsf{A}_2 = v_1 v_2 u_1 u_2, \quad \mathsf{A}_8 = v_1^8 u_1^8 + v_2^8 u_2^8, \\ \qquad \mathsf{A}_9 = (v_1 u_2 + v_2 u_1)(v_1^8 u_1^8 - v_2^8 u_2^8). \end{cases}$$

Diesen für $n = 8h + 1$ gültigen Formeln reihen sich ohne weiteres diejenigen für $n = 8h - 1$ an; wir haben einzig u_1 und u_2 zu permutieren (p. 136) und gewinnen so als *volles Formensystem für* $n = 8h - 1$:

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathsf{B}_1 = v_1 u_1 - v_2 u_2, \quad \mathsf{B}_2 = v_1 v_2 u_1 u_2, \quad \mathsf{B}_8 = v_1^8 u_2^8 + v_2^8 u_1^8, \\ \qquad \mathsf{B}_9 = (v_1 u_1 + v_2 u_2)(v_1^8 u_2^8 - v_2^8 u_1^8). \end{cases}$$

Hieran reihen wir für $n = 8h \pm 1$ noch die folgenden Sätze: Die Modulargleichung bleibt bei Permutation der beiden Variabelenreihen v_i, u_i unverändert, und ein Gleiches gilt von den Formen $f(v_i, u_i)$, wie ein Blick auf die erste Gleichung (1) lehrt. Demgemäss werden A_1

*) Cf. „Ikos." p. 37 Formel (20).

**) Cf. „Ikos." p. 63 Formel (5a).

und B_9 nur in *geraden* Potenzen für die Formen f zur Geltung kommen. Eben deshalb aber werden, da doch ψ stets eine gerade Zahl ist, auch A_9 und B_1 in den bezüglichen f nur in geraden Potenzen enthalten sein. Wir können also für die linken Seiten der Modulargleichungen als volle Formensysteme direct diese angeben:

$$(6)\qquad \begin{cases} n = 8h + 1: \ A_1^2,\ A_2,\ A_8,\ A_9^2, \\ n = 8h - 1: \ B_1^2,\ B_2,\ B_8,\ B_9^2. \ - \end{cases}$$

Im Falle $n = 8h + 5$ haben wir die nicht-homogene G_{16} derart auf sich selbst zu beziehen, dass den s, t die Operationen s^5, t entsprechend gesetzt werden. Beim Rückgang zu den homogenen Substitutionen s, t entsteht die Frage, welche von den beiden s^5 sowie auch t zugehörigen homogenen Substitutionen den beiden unter (2) geschriebenen u-Substitutionen s, t zuzuordnen sind. Hierüber dürfen wir aber willkürlich entscheiden, weil nämlich (infolge des geraden ψ) ein Zeichenwechsel der einen Variabelenreihe die Form f unverändert lässt. Als Erzeugende der 32 simultanen Substitutionen setze man daraufhin etwa fest:

$$(7)\qquad s: \begin{cases} v_1' = e^{\frac{5\pi i}{8}} v_1, & v_2' = e^{-\frac{5\pi i}{8}} v_2, \\ u_1' = e^{\frac{\pi i}{8}} u_1, & u_2' = e^{-\frac{\pi i}{8}} u_2, \end{cases} \qquad t: \begin{cases} v_1' = i v_2, & v_2' = i v_1, \\ u_1' = i u_2, & u_2' = i u_1. \end{cases}$$

Gegenwärtig ist ψ das Doppelte einer ungeraden Zahl; es folgt, *dass f sowohl gegenüber s, wie t Zeichenwechsel erleidet und demzufolge erst bei derjenigen homogenen Dieder-G_{16} absolut invariant bleibt, welche die beiden Erzeugenden hat:*

$$s' = s^2: \begin{cases} u_1' = e^{\frac{\pi i}{4}} u_1, & u_2' = e^{-\frac{\pi i}{4}} u_2, \\ v_1' = -e^{\frac{\pi i}{4}} v_1, & v_2' = -e^{-\frac{\pi i}{4}} v_2, \end{cases}$$

$$t' = st: \begin{cases} u_1' = e^{\frac{5\pi i}{8}} u_2, & u_2' = e^{\frac{3\pi i}{8}} u_1, \\ v_1' = -e^{\frac{\pi i}{8}} v_2, & v_2' = e^{-\frac{\pi i}{8}} v_1. \end{cases}$$

Hier ist es aber, da doch ψ eine gerade Zahl ist, erlaubt, in der v-Substitution s' rechter Hand das Zeichen von v_1, v_2 zu wechseln. Schreiben wir dann noch

$$x_1 = e^{-\frac{\pi i}{8}} u_1, \quad x_2 = u_2; \quad y_1 = e^{-\frac{5\pi i}{8}} v_1, \quad y_2 = v_2,$$

so haben wir in den so eingeführten neuen Variabelen als erzeugende Substitutionen der homogenen Gruppe G_{16}:

$$(8)\quad s':\ \begin{cases} x_1' = \frac{1-i}{\sqrt{2}}x_1, & x_2' = \frac{1-i}{\sqrt{2}}x_2, \\ y_1' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}y_1, & y_2' = \frac{1-i}{\sqrt{2}}y_2, \end{cases} \qquad t':\ \begin{cases} x_1' = ix_2, & x_2' = ix_1, \\ y_1' = iy_2, & y_2' = iy_1, \end{cases}$$

so dass wir vermöge dieser indirecten Operationsweise wieder *cogrediente* Variabele x_i, y_i erreicht haben. Als Formensystem berechnet sich daraufhin zuvörderst in den x_i, y_i:

$$x_1y_2 - x_2y_1,\quad x_1x_2y_1y_2,\quad x_1^4y_1^4 + x_2^4y_2^4,$$
$$x_1y_2 + x_2y_1,\quad x_1^4y_1^4 - x_2^4y_2^4,$$

das man nun rückwärts für u, v umrechnen wolle. Die entspringenden Formen darf man dann wieder mit Rücksicht auf den *geraden* Grad der Modulargleichung einigen zweckmässigen Combinationen unterwerfen, und es findet sich schliesslich für unseren Zweck **als *volles Formensystem bei $n = 8h + 5$*:**

$$(9)\quad \begin{cases} A_2 = v_1v_2u_1u_2, \quad A_2' = v_1^2u_2^2 - v_2^2u_1^2, \quad A_4 = v_1^4u_1^4 - v_2^4u_2^4, \\ A_6 = (v_1^2u_2^2 + v_2^2u_1^2)(v_1^4u_1^4 + v_2^4u_2^4). \end{cases}$$

Noch merke man an: *Bei Ausübung der unter (7) geschriebenen Substitutionen s und t bleiben A_2 und A_6 beide Male unverändert, während A_2' und A_4 Zeichenwechsel erleiden.* Bei Aufstellung der Modulargleichungen gewinnt dieser Satz eine leicht ersichtliche Bedeutung.

Endlich wird man sich im Falle $n = 8h + 3$ sofort die Erzeugenden s und t der simultanen Substitutionen bilden und zeigen, *dass $f(v_i, u_i)$ auch jetzt wieder bei s und bei t Zeichenwechsel erleidet.* Des näheren gestalten sich die Verhältnisse ganz ähnlich, wie in dem soeben erledigten Falle, *und wir gewinnen insbesondere als ein für unsere Zwecke ausreichendes Formensystem bei $n = 8h + 3$*:

$$(10)\quad \begin{cases} B_2 = v_1v_2u_1u_2, \quad B_2' = v_1^2u_1^2 - v_2^2u_2^2, \quad B_4 = v_1^4u_2^4 - v_2^4u_1^4, \\ B_6 = (v_1^2u_1^2 + v_2^2u_2^2)(v_1^4u_2^4 + v_2^4u_1^4). \end{cases}$$

Auch hier gilt wieder der Satz, *dass B_2' und B_4 gegenüber s und t Zeichenwechsel erleiden, während B_2 und B_6 durchgängig unverändert bleiben.* —

§ 8. Weitere Hülfsmittel zur endgültigen Bestimmung der Modulargleichungen. Geschichtliche Notizen.

Bildet man im Einzelfalle aus dem gerade zur Geltung kommenden vollen Formensystem den Ansatz für die linke Seite der Modulargleichung, so werden in demselben im allgemeinen immer noch mehrere numerische Coefficienten unbekannt bleiben, und es handelt

sich weiter darum, wie man die letzteren zu bestimmen hat. Die beiden Hülfsmittel, welche in dieser Beziehung für die niedersten Transformationsgrade ohne besondere Mühe zur Kenntnis der fertigen Gestalt der Modulargleichungen führen, sind immer dieselben, welche wir auch im Voraufgehenden bei ähnlichen Gelegenheiten zur Verwendung brachten.

Man wird sich erstlich für die Formen des vollen Systems im Einzelfalle *Reihenentwicklungen nach ansteigenden Potenzen von r* verschaffen können und daraufhin den für die linke Seite der Modulargleichung aufgeschriebenen Ansatz in eine Potenzreihe nach r entwickeln. Deren Coefficienten sind lineare Functionen der in jenem Ansatz noch unbekannten Zahlen, und nun muss offenbar jede dieser linearen Functionen mit Null identisch sein, da doch die Modulargleichung unabhängig von ω erfüllt ist. Die so gewonnenen linearen Gleichungen für die fraglichen unbekannten Zahlen werden aber für die letzteren ein und nur ein Lösungssystem durch nicht sämtlich verschwindende Grössen ergeben, was man aus der Existenz und Irreducibilität der Modulargleichung ohne weiteres folgert.

Fürs zweite wolle man sich des bei der ersten Stufe ausgiebig benutzten Mittels erinnern, *die Verzweigung der Modulargleichung* der näheren Untersuchung zu unterwerfen. Selbstverständlich können wir auch bei den höheren Stufen aus einer solchen, in das eigentliche Wesen der algebraischen Abhängigkeit von ursprünglichen und transformierten Modul einführenden Betrachtungsweise zweckmässige Sätze für die Aufstellung der Modulargleichungen abziehen. Wir gedenken in dieser Hinsicht z. B. kurz der Modulargleichungen von $\varphi(\omega) = u(\omega)$ für Primzahltransformation $n = q$.

An die Stelle der gewöhnlichen complexen u-Ebene setzen wir hierbei in üblicher Weise sogleich die diedrisch ($\nu = 8$) geteilte Kugel, deren beide Pole die Werte $u = 0$ und $u = \infty$ tragen, während auf dem Aequator die acht Werte $u = 1, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, i, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, -1, \ldots$ in gleichen Intervallen aufgetragen sind. Um die Verzweigung der Modulargleichung zu versinnlichen, werden wir diese Kugel mit $(q+1)$ Blättern überdecken, und nun erkennt man sofort, dass nur an den zehn Stellen:

$$(1)\qquad u = 0, \infty, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, i, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, -1, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, -i, \frac{1-i}{\sqrt{2}}, 1$$

Verzweigungspunkte auftreten können; eben diese Werte u sind es nämlich, welche von den Spitzen des zugehörigen Fundamentalpolygons der ω-Halbebene geliefert werden. Die in Rede stehende Fläche F_{q+1}

hat weiter die wichtige Eigenschaft, *durch sechzehn eindeutige Transformationen in sich überzugehen*, die wir ja vorhin durch die sechzehn simultanen u-v-Substitutionen darstellten*). Als besonderes Ergebnis entspringt daraus: Die Verzweigung von F_{q+1} ist bei $u = \infty$ gerade so beschaffen, wie an der Stelle $u = 0$, und desgleichen in den acht Punkten $u = 1, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \ldots$ gerade so wie im ersten unter ihnen, $u = 1$. Indem wir die nähere Besprechung demnach auf die Stellen $u = 0, 1$ einschränken können, merken wir noch an, dass diese Werte den Spitzen $\omega = i\infty$ und $\omega = 0$ angehören. Als Wurzeln der von uns stets bevorzugten Modulargleichung des Schemas $\begin{pmatrix} q, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ schreiben wir uns jetzt für gegenwärtigen Fall $n = q$ aus (3) p. 120 die folgenden ab:

$$(2) \quad \begin{cases} q = 8h \pm 1, \quad v_\infty = u(q\omega), \quad v_s = u\left(\frac{\omega + 16s}{q}\right), \\ q = 8h \pm 3, \quad v_\infty = u(q\omega), \quad v_s = u\left(\frac{\omega + 8q + 16s}{8\omega + 65q + 128s}\right), \end{cases}$$
$$(s = 0, 1, \ldots, q-1).$$

Durch bekannte Rechnungen findet man von hier aus leicht das Resultat: *In allen zehn Verzweigungspunkten ist die Verzweigung eine solche, dass stets ein Blatt isoliert verläuft, während die q anderen im Cyclus zusammenhängen.* Wir setzen hinzu, dass bei $u = 1$ das dortselbst isoliert verlaufende Blatt den Zweig v_0 unserer algebraischen Function $v(u)$ trägt.

Weiter kann man fragen, welche Werte von v an den einzelnen Verzweigungsstellen eintreten. Die beiden Pole unserer diedrisch geteilten Kugel haben wir in diesem Betracht schon früher erledigt, indem wir nämlich fanden, dass $u = 0, \infty$ stets auch $v = 0$ bez. ∞ nach sich zog. Von den übrigen Verzweigungsstellen berücksichtigen wir nur noch $u = 1$. In dem dort liegenden Windungspunkte findet der Wert:

$$(3) \qquad v_\infty(0) = u(0) = 1$$

statt, im isoliert verlaufenden Blatte dagegen

$$(4) \qquad v_0(0) = \begin{cases} u(0) = 1 & \text{für } q = 8h \pm 1, \\ u\left(\frac{8}{65}\right) = -1 & \text{für } q = 8h \pm 3. \end{cases}\text{**)}$$

---

*) Hierzu tritt natürlich auch noch diejenige Substitution der Periode zwei bez. vier, welche durch $u' = v$, $v' = \left(\frac{2}{n}\right)u$ gegeben ist.

**) Man gelangt zu diesen Resultaten einfach dadurch, dass man in den betreffenden Formeln (2) den Wert $\omega = 0$ einsetzt und bei der Auswertung des zugehörigen u von der Tabelle (5) in I p. 670 Gebrauch macht.

Man kann dieses Resultat auch in die Gestalt kleiden: *Setzt man in der homogen geschriebenen linken Seite der Modulargleichung (cf. Formeln (1) p. 141)* $u_1 = u_2 = 1$, *so entspringen folgende Identitäten:*

$$(5) \quad \begin{cases} q = 8h \pm 1, & f(v_1, v_2;\, 1, 1) = (v_1 - v_2)^{q+1}, \\ q = 8h \pm 3, & f(v_1, v_2;\, 1, 1) = (v_1 + v_2)(v_1 - v_2)^q. \end{cases} \text{—}$$

Bevor wir alle nun zur Verfügung stehenden Hülfsmittel zur wirklichen Herstellung einiger Modulargleichungen in Anwendung bringen, ist hier der geeignete Ort, mit ein paar Worten auf die älteren Untersuchungen über unseren Gegenstand hinzudeuten.

Die oft genannten Modulargleichungen für $\varphi(\omega) = u(\omega)$ mögen wir fortan als die Jacobi'schen bezeichnen, da in der That Jacobi zuerst zu ihnen geführt wurde*), und zwar bei der algebraischen Transformation des Legendre'schen Normaldifferentials erster Gattung. Aus Jacobi's ursprünglichen Entwicklungen ergaben sich die Modulargleichungen für die Grade $n = 3$ und 5 in fertiger Gestalt; weiterhin aber gelang die Herstellung dieser Gleichungen direct noch nicht, und hier ist es die durch Abel und Jacobi geschaffene und durchgebildete transcendente Theorie der elliptischen Functionen, welche zur Überwindung der sich entgegenstellenden Schwierigkeiten herangezogen werden musste. Dieses geschah in den auf Jacobi's Anregung einige Jahre nach Erscheinen der „Fundamenta" ausgeführten Untersuchungen Sohnke's**). Es sind dort aus den Reihenentwicklungen der ursprünglichen und transformierten Moduln $\sqrt[4]{k}$ nach Potenzen der Entwicklungsgrösse q (die in der von uns gebrauchten Bezeichnungsweise mit $r^{\frac{1}{2}}$ identisch ist) Eigenschaften der Modulargleichung entwickelt worden, welche sich sowohl auf Vertauschbarkeit der Argumente, als auf die simultanen Substitutionen der Modulargleichung in sich, wie endlich auf die Gestalt der Modulargleichung für den speciellen Wert $u = 1$ beziehen. Daraufhin gelangt Sohnke zu Ansätzen für die linke Seite der Modulargleichungen, in denen die noch bleibenden unbestimmten Coefficienten hernach durch die im Anfang des gegenwärtigen Paragraphen geschilderte Methode der Reihenentwicklungen bestimmt werden. Solcherweise sind von Sohnke die Modulargleichungen für die Transformationsgrade 7, 11, 13, 17, 19 wirklich berechnet worden.

Wie man sieht, gebietet Sohnke bereits über alle diejenigen Ge-

*) Man vgl. die ersten Artikel der *Fundamenta nova* (Königsberg 1829).

**) Vgl. dessen Abhandlung: *Aequationes modulares pro transformatione functionum ellipticarum,* Crelle's Journal Bd. 16 (1836).

sichtspunkte, welche wir im Laufe der letzten Paragraphen für die Aufstellung der Jacobi'schen Modulargleichungen in Bereitschaft gestellt haben. Es liegt demnach hier ein ganz besonders günstiges Beispiel für die Erörterung der Frage vor, inwieweit die überkommene Theorie durch diejenigen Principien eine Förderung erfahren hat, deren Gebrauch im Laufe unserer Untersuchungen überall befürwortet wurde. Man hat bemerkt, wie in Sohnke's Sätzen über $u = 1$ der Keim zur Untersuchung der Verzweigung der Modulargleichung enthalten ist. Was aber thatsächlich der zielbewusste Gebrauch Riemann'scher Vorstellungsweisen für die Probleme der Transformationstheorie bedeutet, brauchen wir nach den Erörterungen der voraufgehenden Kapitel nicht noch besonders zu erklären*). Indem wir hieran nur im Vorbeigehen erinnern, verweilen wir etwas ausführlicher bei dem anderen Gesichtspunkte, der hier zu nennen ist: *Es handelt sich um den consequenten Gebrauch der aus Galois' Ideen entsprungenen gruppentheoretischen Betrachtungsweise.* Dass im Falle der Jacobi'schen Modulargleichungen die Sätze über Transformation derselben in sich von der G_{16} aus und zugleich unter Gebrauch der homogenen Schreibweise vollständiger und glatter herauskommen, als bei Sohnke, ist freilich für das nächste Ziel der Untersuchung, nämlich für die Aufstellung der Modulargleichungen, von geringerer Bedeutung, und in der That wird man auch über die von Sohnke berechneten Gleichungen hinaus weitere nicht mehr berechnen wollen. Aber man möge doch bemerken, dass im Verlauf der letzten Kapitel nur durch steten Gebrauch der Modulgruppe und ihrer Untergruppen alle die Fragen in einer erschöpfenden Weise beantwortet werden konnten, welche sich auf die Existenz der Transformationsgleichungen, auf ihre Reducibilität, auf den Umfang des Begriffs der Modulargleichungen u. s. w. bezogen. Vom Standpunkt der überlieferten Lehre wird man sagen dürfen: Der Gebrauch Galois'scher und Riemann'scher Gesichtspunkte hat im Gebiete der elliptischen Functionen nicht erst eine Theorie zu erschaffen brauchen; aber für die überlieferte Transformations- und Teilungstheorie giebt er uns die Mittel an die Hand, sowohl die natürliche Begrenzung dieser Theorie zu überblicken (die sich denn als sehr viel weiter reichend erwies als man bis dahin angenommen hatte), als auch innerhalb dieser Begrenzung

*) Übrigens darf nicht unerwähnt bleiben, dass auch bereits vor der planmässigen Verwertung Riemann'scher Methoden die Verzweigung der Jacobi'schen Modulargleichungen gelegentlich der Betrachtung unterzogen worden ist. Wir finden in dieser Beziehung besonders bemerkenswert die Darstellung in Briot-Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques,* Buch 8, Kap. 2 (Paris 1875).

eine nach Principien geordnete und erschöpfende Darstellung zu ermöglichen.

Indem wir die geschichtlichen Bemerkungen fortsetzen, bemerken wir, dass es, wie wir oben bewiesen haben, für alle Congruenz-Hauptmoduln (unter gewissen Beschränkungen für den Transformationsgrad) Modulargleichungen giebt. Im Gegensatze dazu hatte man früher ausser den Modulargleichungen für φ nur noch solche für das Product $\varphi\psi$ beziehungsweise $\sqrt[3]{\varphi\psi}$ betrachtet. Auf die Gleichungen für die $\varphi\psi$ ist wohl zuerst Joubert aufmerksam geworden*), und es hat dann Königsberger dieselben einer näheren Untersuchung unterworfen**); die Gleichungen für $\sqrt[3]{\varphi\psi}$ treten zuerst bei Schläfli auf***). Wir haben, wie wir schon andeuteten, eine ausführliche Untersuchung dieser Gleichungen um so eher unterlassen können, als dieselben in dem bereits p. 2 genannten Werke von Hrn. H. Weber ausgedehnte Berücksichtigung gefunden haben.

Die Modulargleichungen der Galois'schen Hauptmoduln können wir aus naheliegendem Grunde auch als die *Modulargleichungen der regulären Körper* bezeichnen und also insbesondere die ζ-Modulargleichungen als diejenigen des Ikosaeders. Über die Existenz und Aufstellung dieser Gleichungen entwickelte Hr. Klein zuerst in den Math. Ann. Bd. 14 (1878) die grundlegenden Sätze; der ausführlichen Durchbildung des invariantentheoretischen Ansatzes für die Modulargleichungen der regulären Körper hat sich dann in den Jahren 1884/85 auf Anregung von Klein Hr. G. Friedrich unterzogen. Die Resultate sind in der Leipziger Dissertation desselben „*Die Modulargleichungen der Galois'schen Moduln der* 2ten *bis* 5ten *Stufe*" zusammengestellt †), und wir teilen aus derselben im folgenden Paragraphen insbesondere einige Modulargleichungen des Ikosaeders mit. Die bei der zweiten Stufe eintretenden Modulargleichungen waren bereits früher von Cayley ††) durch zweckmässige Zusammenfügung coordinierter Jacobi-

---

*) *Sur diverses équations analogues aux équations modulaires.* Comptes Rendus 47, 1858.

**) *Algebraische Untersuchungen aus der Theorie der elliptischen Functionen*, Crelle's Journ. Bd. 72, 1869.

***) Im Verlauf der Abhandlung: *Beweis der Hermite'schen Verwandlungstafeln für die elliptischen Modularfunctionen,* Crelle's Journal Bd. 72 (1870).

†) Vergl. auch Grunert's Archiv, zweite Reihe Bd. 3 (1886).

††) Philosophical Transactions Bd. 164 p. 450 (1874). Wir verweisen bei dieser Gelegenheit auf die bemerkenswerten *geometrischen* Untersuchungen, welche Stephen Smith über die in Rede stehenden Modulargleichungen angestellt hat (*On the Singularities of the Modular Equations and Curves*, Proc. of the London Math. Soc. vol. 9, 1878).

scher Modulargleichungen gewonnen (vergl. oben p. 120). Endlich finden wir noch für die Oktaedermodulargleichungen zu bemerken, dass dieselben infolge der Relation (3) p. 110 durchaus mit den zur achten Stufe gehörenden Modulargleichungen von φ^2, ψ^2, χ^2 übereinstimmen müssen.

§ 9. Zusammenstellung einiger Modulargleichungen 5ter und 16ter Stufe. Bemerkung über Nichtcongruenzmoduln.

Reihenentwicklungen nach Potenzen von r für die letzthin durch ζ_1, ζ_2 bezeichneten Modulformen fünfter Stufe können wir aus der Darstellung dieser Moduln durch die zu $n=5$ gehörenden Teilwerte $\sigma_{\lambda,\mu}$ entnehmen (cf. Formel (4) p. 32), wenn wir für die letzteren Teilwerte ihre Potenzreihen nach r heranziehen. Unter $\eta_i(\omega_1, \omega_2)$ wird man dann zweckmässig $\zeta_i\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right)$ verstehen, worauf die Reihenentwicklungen für die η_i unmittelbar aus denen der ζ_i gebildet werden können. Jedenfalls kann man sich auf diesem Wege einige Anfangsglieder der bezüglichen Entwicklungen für die in § 6 zusammengestellten vollen Formensysteme der η_i, ζ_i verschaffen*). Mit Hülfe dieser Reihenentwicklungen lassen sich dann nach der im Anfang des vorigen Paragraphen entwickelten Regel die numerischen Coefficienten bestimmen, welche im Ausdruck der linken Seite der Modulargleichung zunächst noch unbekannt sind.

Es ist hier natürlich keineswegs der Ort, Rechnungen dieser Art ausführlich zu entwickeln; möge es vielmehr genügen, wenn wir für einige niedere Transformationsgrade die fertig berechneten Gleichungen in den Bezeichnungen des § 6 gleich mitteilen. Besonders einfach gestalten sich die Ikosaedermodulargleichungen für die Fälle der Digredienz; wir haben hier z. B.

$$(1)\qquad \begin{cases} n = 2: & \mathsf{A}_3 = 0, \\ n = 3: & \mathsf{B}_4 = 0, \\ n = 7: & \mathsf{A}_4^2 - \mathsf{A}_3\mathsf{A}_5 = 0, \\ n = 8: & \mathsf{B}_3^4 + \mathsf{B}_4^3 - \mathsf{B}_3\mathsf{B}_4\mathsf{B}_5 = 0, \\ n = 13: & \mathsf{B}_3^3\mathsf{B}_5 - \mathsf{B}_3^2\mathsf{B}_4^2 - \mathsf{B}_4\mathsf{B}_5^2 = 0. \end{cases}$$

Daran reihen wir in den Fällen der Cogredienz noch folgende Beispiele:

---

*) Wir bemerken übrigens, dass im folgenden Abschnitt Potenzreihen für ζ_1, ζ_2 explicite mitgeteilt werden.

$$(2)\quad\begin{cases} n = \ \ 4: & \mathsf{B}_1^6 - \mathsf{B}_6 = 0, \\ n = \ \ 6: & 11 \cdot 17\mathsf{A}_6^2 - 18 \cdot 49\mathsf{A}_1^2\mathsf{A}_{10} + 16 \cdot 121\mathsf{A}_1^6\mathsf{A}_6 \\ & \qquad - 17 \cdot 73\mathsf{A}_1^{12} = 0, \\ n = \ \ 9: & 11 \cdot 17\mathsf{B}_6^2 + 6 \cdot 49\mathsf{B}_1^2\mathsf{B}_{10} + 11 \cdot 16 \cdot 53\mathsf{B}_1^6\mathsf{B}_6 \\ & \qquad - 17 \cdot 577\mathsf{B}_1^{12} = 0, \\ n = 11: & 11 \cdot 17\mathsf{A}_6^2 - 18 \cdot 49\mathsf{A}_1^2\mathsf{A}_{10} - 8 \cdot 11 \cdot 335\mathsf{A}_1^6\mathsf{A}_6 \\ & \qquad - 17 \cdot 75841\mathsf{A}_1^{12} = 0. - \end{cases}$$

Um für die Jacobi'schen Modulargleichungen etwa erstlich den niedersten Falle $n = 3$ zu erledigen, so haben wir aus dem Formensystem (10) p. 144 solche Verbindungen herzustellen, welche in den v_i (und u_i) von vierter Dimension sind und zugleich bei Ausübung der Operation s das Zeichen wechseln. Die einzigen Verbindungen dieser Art sind B_4 und $\mathsf{B}_2\mathsf{B}_2'$, und da B_4 jedenfalls als besonderes Glied in der linken Seite der Modulargleichung enthalten sein wird (zufolge (1) p. 141), so lautet der Ansatz:

$$f(v_1, v_2; u_1, u_2) = \mathsf{B}_4 + a\mathsf{B}_2\mathsf{B}_2'.$$

Die Formel (5) des vorigen Paragraphen liefert jetzt:

$$(3)\quad f(v_1, v_2; 1, 1) = v_1^4 - v_2^4 + av_1v_2(v_1^2 - v_2^2) = (v_1 + v_2)(v_1 - v_2)^3,$$

woraus sich $a = -2$ ergiebt. Für $n = 5$ gelangen wir in analoger Weise durch Benutzung der Sätze von § 7 zum Ansatze:

$$f(v_1, v_2; u_1, u_2) = \mathsf{A}_2'^3 + a\mathsf{A}_2\mathsf{A}_4 + b\mathsf{A}_2^2\mathsf{A}_2',$$

woraus wir durch Benutzung der Identität (5) p. 147 mühelos $a = -4$, $b = 8$ bestimmen. In entsprechender Weise verfahre man auch in den nächstfolgenden Fällen. Wir stellen etwa die fertigen Formeln für $n = 3, 5, 7$ hier zusammen:

$$(4)\quad\begin{cases} n = 3: & \mathsf{B}_4 - 2\mathsf{B}_2\mathsf{B}_2' = 0, \\ n = 5: & \mathsf{A}_2'^3 - 4\mathsf{A}_2\mathsf{A}_4 + 8\mathsf{A}_2^2\mathsf{A}_2' = 0, \\ n = 7: & \mathsf{B}_8 - 2\mathsf{B}_2(\mathsf{B}_2^3 + 8\mathsf{B}_2^2\mathsf{B}_1^2 + 10\mathsf{B}_2\mathsf{B}_1^4 + 4\mathsf{B}_1^6) = 0, \end{cases}$$

oder in ausführlicher Gestalt, und zwar nicht homogen:

$$(5)\quad\begin{cases} n = 3: & v^4 - u^4 - 2vu(v^2u^2 - 1) = 0, \\ n = 5: & (v^2 - u^2)^3 - 4vu(v^4u^4 - 1) + 8v^2u^2(v^2 - u^2) = 0, \\ n = 7: & v^8 + u^8 - 2v^4u^4 - 16v^3u^3(vu - 1)^2 - 20v^2u^2(vu - 1)^4 \\ & \qquad - 8vu(vu - 1)^6 = 0. \end{cases}$$

Die für $n = 3$ und $n = 5$ mitgeteilten Formeln gehen in die sonst bekannten Gestalten dieser Modulargleichungen erst durch Zeichenwechsel des u über. Dies muss aber auch so sein; denn man hat

sonst immer die transformierten $u = \tau_i$, wie wir sie in der ersten Reihe (2) p. 146 definierten, ohne weiteres auch in den Fällen $n = 8h \pm 3$ gebraucht. Es würde das für uns, wie man leicht berechnen wird, darauf hinauskommen, dass wir den Fällen $n = 8h \pm 3$ das Transformations-Schema $\begin{pmatrix} n, & 8 \\ 8, & 1 \end{pmatrix}$ zu Grunde legen. —

Wir knüpfen hieran noch eine ergänzende Bemerkung betreffs unserer früheren Behauptung über die Transformation von Nichtcongruenzmoduln. Der Transformation dritter Ordnung der Function zweiter Stufe φ^8 gehört eine Modulargleichung vierten Grades zu, die wir uns durch eine vierblättrige Riemann'sche Fläche versinnlichen. Zur Trägerin der complexen Werte φ^8 wählen wir wieder eine Kugel, deren Pole die Punkte 0, ∞ tragen, während sich auf dem Aequator die Werte vom absoluten Betrage 1 vorfinden. Die fragliche Riemann-sche Fläche ist bei $\varphi^8 = 0, 1, \infty$ derart verzweigt, dass stets ein Blatt isoliert verläuft, während die drei anderen cyclisch zusammenhängen. Für diese Fläche aber ist φ^8 und φ'^8 ein volles Functionensystem. Jetzt bilde man unsere Fläche auf die Kugel der complexen Werte von $\varphi^4 = \sqrt{\varphi^8}$ ab; es wird über jener Kugel eine ganz ähnliche Fläche F_4 entspringen, die nur einen Verzweigungspunkt beschriebener Art mehr aufweist, nämlich bei $\varphi^4 = -1$. Für diese Fläche ist φ^4, φ'^8 ein volles Functionssystem, verbunden durch eine irreducibele Relation, in der φ'^8 auf den vierten, φ^4 aber auf den achten Grad steigt. Auf der neuen F_4 ist $\varphi'^4 = \sqrt{\varphi'^8}$ jedenfalls unverzweigt, ob aber auch eindeutig, ist die Frage. Ist letzteres der Fall, so wird die eben gemeinte Relation im Bereiche φ^4, φ'^4 reducibel, und nun wissen wir aus dem Congruenzcharakter der Function φ^4, dass die Reducibilität in der That eintritt. Den gekennzeichneten Schritt können wir nun noch zweimal in völlig analoger Weise mit demselben Erfolge wiederholen, um derart zur ersten Gleichung (5) zu gelangen. Wollen wir nun aber weiter $u = x^2$, $v = y^2$ setzen, *so muss die entspringende Relation:*

$$(6) \qquad y^8 - 2y^6x^6 + 2y^2x^2 - x^8 = 0$$

im Bereiche x, y irreducibel sein, wenn anders unsere Behauptung gegründet ist, dass für Nichtcongruenzmoduln Modulargleichungen allgemein nicht existieren. Die Irreducibilität von (6) lässt sich nun aber wirklich leicht aufweisen, wie wir im folgenden zeigen:

Jedenfalls ist nämlich die linke Seite von (6) irreducibel im Rationalitätsbereiche y^2, x, und also auch in y, x^2. Man kann sich dies etwa functionentheoretisch deutlich machen, indem man davon ausgeht,

dass z. B. bei der Substitution S^{16} die Function $\sqrt{v}(\omega) = \sqrt{u}(3\omega)$ bei unverändertem $u(\omega)$ das Zeichen wechselt, und dass sich also bei gegebenem u *acht* zugehörige Werte von $\sqrt{v}$ durch Monodromie des u erreichen lassen. Sollte unsere Gleichung also im Bereiche x, y in zwei Factoren zerfallen, so muss der einzelne derselben ungerade Potenzen sowohl von y, wie x aufweisen. Daraufhin schreiben wir den ersten Factor in der Gestalt:

$$(7) \qquad f = y - \frac{ax + b}{cx + d},$$

wo a, b, c, d ganze Functionen von x und y sind, die nur noch gerade Potenzen dieser Grössen enthalten. Da aber im Product beider Factoren y nur noch in gerader Potenz enthalten ist, so wird der zweite Factor aus (7) einfach durch Zeichenwechsel des zweiten Gliedes entspringen. Der Ausdruck der linken Seite von (6) würde damit:

$$(8) \qquad c^2x^2y^2 + d^2y^2 - a^2x^2 - b^2 + 2cdxy^2 - 2abx,$$

und da ungerade Potenzen von x doch nicht mehr auftreten dürfen, so trifft einer der folgenden vier Fälle zu:

$$1)\ a = c = 0, \qquad 3)\ b = c = 0,$$
$$2)\ a = d = 0, \qquad 4)\ b = d = 0.$$

Der erste und letzte Fall sind hier sofort auszuschalten; träfe einer von ihnen zu, so würde f nur noch gerade Potenzen von x enthalten. Auch $b = c = 0$ kann nicht zutreffen; hier würde nämlich (8) in $(d^2y^2 - a^2x^2)$ übergehen, und das Glied y^6 müsste von d^2y^2 geliefert werden, entgegen dem Umstande, dass y in d doch nur in zweiter Potenz enthalten sein kann. Es bleibt der Fall (2), der die Identität mit sich bringt:

$$y^8 - x^8 - 2y^6x^6 + 2y^2x^2 = b^2 - c^2x^2y^2.$$

Da in c die x, y nur auf den zweiten Grad steigen, so setze man $c = \alpha x^2y^2 + \beta x^2 + \gamma y^2 + \delta$, und es müsste hierauf

$$(\alpha x^2y^2 + \beta x^2 + \gamma y^2 + \delta)^2x^2y^2 + y^8 - x^8 - 2y^6x^6 + 2y^2x^2$$

mit dem Quadrat einer ganzen Function von x^2, y^2 identisch werden. Man berechnet leicht ins einzelne, dass dies durch keine Wahl der numerischen Grössen α, β, γ, δ erreichbar ist. Die linke Seite von (6) ist demnach thatsächlich irreducibel.

§ 16. Von den irrationalen Gestalten der Jacobi'schen Modulargleichungen, den Modularcorrespondenzen und den Relationen zwischen transformierten ϑ-Nullwerten.

Es ist eine seit lange bekannte Thatsache, dass die Jacobi'schen Modulargleichungen für einige Transformationsgrade eine überraschend einfache Gleichungsform annehmen, wenn man in deren Ausdruck neben den Wurzeln aus dem Legendre'schen Integralmodul immer auch noch die Wurzeln aus dem complementären Modul $k'^2 = 1 - k^2$ zulässt. Wir wollen diese irrationalen Gestalten der Modulargleichung für die Transformationsgrade 3 und 7 wirklich ableiten, wo wir zu besonders einfachen Formeln geführt werden; wir verstehen hierbei unter l^2 und l'^2 die entsprechenden transformierten Moduln.

Bei dem Transformationsgrade $n = 3$ ist es nicht direct die Jacobi'sche Modulargleichung (5) § 9, welche man in die irrationale Gestalt umsetzt, sondern vielmehr die entsprechende Modulargleichung achter Stufe. Nach früheren Regeln werden wir diese gewinnen, wenn wir in der ersten Gleichung (5) p. 151 bei unverändertem v das Vorzeichen von u wechseln und die so entspringende Gleichung mit der ursprünglichen multiplicieren. Es folgt solcherweise:

$$(v^4 - u^4)^2 = 4 v^2 u^2 (v^2 u^2 - 1)^2,$$

was man sofort in die Gestalt umsetzt:

$$(1 - u^8)(1 - v^8) = (1 - u^2 v^2)^4.$$

Setzt man hier $u^8 = k^2$, $1 - u^8 = k'^2$, $v^8 = l^2$, $1 - v^8 = l'^2$, so kommt:

$$k'^2 l'^2 = (1 - \sqrt{k}\sqrt{l})^4$$

und durch Ausziehen der vierten Wurzel endlich die gewünschte Gleichung:

$$(1) \qquad \sqrt{k}\sqrt{l} + \sqrt{k'}\sqrt{l'} = 1^{*)}.$$

Für die Transformation siebenten Grades bleiben wir direct bei der dritten Gleichung (5) p. 151, die wir explicite

$$(2) \quad v^8 + u^8 - 8 v^7 u^7 + 28 v^6 u^6 - 56 v^5 u^5 + 70 v^4 u^4 - 56 v^3 u^3 + 28 v^2 u^2 - 8 v u = 0$$

schreiben. Man sieht, dass sich (2) sofort in die einfache Gestalt:

$$(1 - u^8)(1 - v^8) = (1 - uv)^8$$

*) Diese Entwicklung ist von Jacobi in Art. 30 der Fundamenta nova gegeben worden; Gleichung (1) ist übrigens bereits Legendre bekannt gewesen und führt nach ihm den Namen der Legendre'schen Modulargleichung.

zusammenziehen lässt, welche nach Ausziehen der achten Wurzel und Einführung der k, k', l, l' die beabsichtigte Relation ergiebt:

$$(3) \qquad \sqrt[4]{k}\sqrt[4]{l} + \sqrt[4]{k'}\sqrt[4]{l'} = 1\,^{*}).$$

Indem wir hier unterlassen, auch noch für $n = 5$ eine entsprechende Relation zu entwickeln (die übrigens etwas weniger einfach ausfallen würde**)), wollen wir vielmehr die interessanten Aufschlüsse andeuten, welche unsere in Bd. I entwickelte Theorie vom Wesen dieser merkwürdigen Relationen an die Hand giebt. Wir sagen gleich ganz allgemein so: Es sei Γ_μ eine Congruenzgruppe m^{ter} Stufe und z, J ein volles Modulsystem derselben; es sei ferner der Transformationsgrad n relativ prim zu m, und Γ_μ werde, modulo m genommen, durch $\omega' = n\omega$ in sich selbst transformiert. Dann lehren die Principien des vorigen Kapitels, dass $z' = z(n\omega)$ einer irreducibelen Gleichung ψ^{ten} Grades genügt, deren Coefficienten rational in z und J sind. Man denke sich nun das Polygon F_μ zu einer im Raume geschlossenen Fläche F_μ umgestaltet; auf dieser werden dann dem einzelnen Punkte immer ψ Werte z' zugewiesen sein, und es sind das ersichtlich die Werte $z(R_i(\omega))$, wo die R_i ein zum Schema $\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ gehörendes Repräsentantensystem durchlaufen. Jetzt liegt aller Nachdruck darauf, dass wir jedem dieser ψ Zahlwerte $z(R_i(\omega))$ jeweils auch noch den zugehörigen Wert $J(R_i(\omega))$ hinzugesellen können. Solcherweise entspringen als dem ursprünglichen Wertsystem z, J zugewiesen ψ Wertsysteme z', J', und durch diese letzteren kann man offenbar ψ Punkte der Fläche F_μ als definiert ansehen. *Der Transformation n^{ter} Ordnung von bestimmtem Schema entspricht in diesem Sinne eine gewisse Punktcorrespondenz****) *auf der Riemann'schen Fläche F_μ, bei welcher jedem Punkte der F_μ bestimmte ψ Punkte derselben zugewiesen sind, eine Correspondenz, die als solche natürlich vom gerade gewählten Modulsystem z, J unabhängig ist* †).

---

*) Diese Gleichung ist von Gützlaff entwickelt in der Abhandlung: *Aequatio modularis pro transformatione functionum ellipticarum septimi ordinis,* Crelle's Journal, Bd. 12 (1832).

**) Cf. *Fundamenta nova* Artikel 30.

***) Diese zuerst in der Geometrie gebrauchte Benennung (man sehe die gleich folgende Entwicklung) rührt von Chasles her.

†) In der That lässt sich das nämliche Resultat aufs leichteste mit Hülfe der Sätze des vorigen Kapitels unter directem Gebrauch der Repräsentanten $R_i(\omega)$ und der Fundamentalpolygone der ω-Halbebene zur Ableitung bringen, ohne dass dabei irgend wie von bestimmt gewählten zum Polygon gehörigen Modulfunctionen die Rede wäre. Auf die hiermit gemeinte Auffassung werden wir weiter unten (im letzten Abschnitt) noch ausführlicher zurückkommen.

Die so gewonnene Auffassung der Transformation ist ganz unabhängig davon, ob das Geschlecht der Fläche F_n $p = 0$ oder $p > 0$ ist. Trifft ersteres zu, so sei z ein zugehöriger Hauptmodul; wir werden in diesem Falle die fragliche Correspondenz durch eine algebraische Gleichung $f(z', z) = 0$ in Bezug auf z' vom Grade ψ ausdrücken, welche offenbar die zugehörige Modulargleichung ist. Ist aber $p > 0$, so kann eine einzelne Grösse z zum Ausdruck der Correspondenz nicht mehr hinreichen; da würde die Relation $f(z', z) = 0$, wie wir wissen den ψ^{ten} Grad überschreiten. *Vielmehr werden wir hier die Moduln $z_0, z_1, \ldots, z_{\nu-1}$ eines vollen Systems immer zugleich der einzelnen Transformation n^{ter} Ordnung unterwerfen müssen; wie wir aber diese Moduln z übrigens wählen, ist durchaus gleichgültig.* Wenn wir jetzt vermöge der z die Fläche F_n nach den in I p. 557 u. f. auseinandergesetzten Anschauungsweisen auf eine Curve C des Raumes R_ν von ν Dimensionen abbilden, so werden wir den vorhin ausgesprochenen Grundsatz auch folgendermassen formulieren können: *Auf der Curve C des Geschlechtes p begründet die Transformation n^{ter} Ordnung von bestimmtem Schema eine gewisse, übrigens algebraische, Correspondenz, bei der jedem Punkte der C bestimmte ψ weitere Punkte derselben zugeordnet sind.* Diese Correspondenz, die wir hinfort als eine *Modularcorrespondenz* bezeichnen wollen, wird durch die algebraischen Relationen zwischen den ursprünglichen und transformierten Moduln $z_0, z_1, \ldots, z_{\nu-1}$ zum Ausdruck gebracht.

So hat sich, indem wir der Transformation der Hauptmoduln diejenige der Modulsysteme anreihen, die Lehre von den Modulargleichungen als erstes Glied in *der allgemeinen Theorie der Modularcorrespondenzen* erwiesen, welch' letztere in allen wesentlichen Punkten die Einfachheit der Modulargleichungen teilen, in Anbetracht des Grades ψ, der Vertauschbarkeit der Argumente und der Galois'schen Gruppe*). An die ausführliche Betrachtung der Modularcorrespondenzen wollen wir mit allen Mitteln der modernen Functionentheorie herantreten; um dieselben aber herbeizuschaffen, müssen wir diese Untersuchung bis in den übernächsten Abschnitt verschieben. Hier nur noch die Deutung, welche die Gleichungen (1) und (3) mit Hülfe der jetzt gewonnenen Gesichtspunkte erlangen.

Die beiden Modulfunctionen $\sqrt[8]{\lambda}$, $\sqrt[8]{1-\lambda}$ oder, wie wir hier zweckmässiger sagen, $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$ bilden das volle Modulsystem einer zur

*) Diese zu den Modularcorrespondenzen führende Gedankenentwicklung wurde von Hrn. Klein zum ersten Male in der zu Anfang des Kapitels genannten Arbeit skizziert; auf die hierher gehörigen Arbeiten der Herren Hurwitz und E. Fiedler kommen wir unten ausführlich zurück.

16ten Stufe gehörenden ausgezeichneten Γ_{384}, welche man in Bd. I p. 679 (oben) definiert findet. Das Polygon derselben wird vermöge dieses Modulsystems eindeutig auf die Curve achter Ordnung:

$$(\sqrt[4]{k})^8 + (\sqrt[4]{k'})^8 = 1 \tag{4}$$

bezogen, welche wir unter Aufnahme der homogenen Coordinaten

$$x_1 : x_2 : x_3 = \sqrt[4]{k} : \sqrt[4]{k'} : 1 \tag{5}$$

in der homogenen Gleichungsform anschreiben:

$$x_1{}^8 + x_2{}^8 - x_3{}^8 = 0. \tag{6}$$

Ist nun der Transformationsgrad n eine beliebige ungerade Zahl, so wird ganz offenbar die Γ_{384}, modulo 16 reduciert, durch $\omega' = n\omega$ in sich transformiert, so dass z. B. für $n = 7$ auf der durch (6) dargestellten C_8 eine algebraische Correspondenz entspringt, die jedem Punkte der C_8 acht weitere Punkte zuweist. Hier werden wir nun die Gleichung (3) dahin interpretieren, *dass die in Rede stehende Correspondenz in einfachster Weise durch gerade Linien zum Ausschnitt gebracht wird.* Führen wir nämlich der Gleichung (5) entsprechend für die transformierten Moduln die Bezeichnung ein:

$$y_1 : y_2 : y_3 = \sqrt[4]{l} : \sqrt[4]{l'} : 1,$$

so schreibt sich Gleichung (3) in die neue Gestalt um:

$$y_1 x_1 + y_2 x_2 - y_3 x_3 = 0. \tag{7}$$

Jedem festen Punkte (x_1, x_2, x_3) der C_8 entsprechen solcherweise bei unserer Correspondenz diejenigen acht weiteren Punkte, welche durch die Gerade (7) ausgeschnitten werden; natürlich sind dabei die y_i als die laufenden Coordinaten der C_8 anzusehen. In ganz analoger Weise wird man die Interpretation der Legendre'schen Modulargleichung (1) an die ausgezeichnete Γ_{96} der achten Stufe resp. an die zugehörige Curve vierter Ordnung anknüpfen.

Gehen wir beiläufig durch Adjunction von $\sqrt[3]{kk'}$ zu den Stufen 12 bez. 24 und 48, so sind z. B. auch die folgenden Relationen:

$$\left\{\begin{aligned} kl + k'l' + 2\,\sqrt[3]{klk'l'} &= 1, \\ \sqrt{kl} + \sqrt{k'l'} + 2\,\sqrt[6]{klk'l'} &= 1, \\ \sqrt[4]{kl} + \sqrt[4]{k'l'} + \sqrt{2}\,\sqrt[12]{klk'l'} &= 1, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

die der Reihe nach den Transformationsgraden $n = 5, 11, 23$ entsprechen, auf Grund der skizzierten Theorie der Modularcorrespondenzen unmittelbar verständlich; es handelt sich dabei um Correspondenzen 6ten, 12ten und 24ten Grades auf den zugehörigen Raumcurven. Wir

kommen, wie schon gesagt, auf diese Gegenstände im letzten Abschnitt noch ausführlich zurück, wo wir dann auch die näheren litterarischen Angaben über die Gleichungen (8) zu machen haben.

Die hiermit gekennzeichnete functionentheoretische Auffassung der irrationalen Modulargleichungen ist, wie wir bemerkten, durchaus neueren Datums; die früheren Untersuchungen anderer Mathematiker zielten mehr auf directe Herstellung einzelner für besondere Fälle geltender eleganter Formeln ab. Dies ist beispielsweise die Tendenz, welche die Dissertation von Hrn. *Schröter**) beherrscht. Was die dort verwandte Methode angeht, so bemerke man, dass die soeben mitgeteilten irrationalen Modulargleichungen vermöge der auf p. 30 angegebenen Formeln (5) in Relationen zwischen den ursprünglichen und transformierten ϑ-Nullwerten ϑ_0, ϑ_2, ϑ_3 übergehen. Das Problem war also, entsprechende Relationen zwischen ϑ-Teilwerten für die einzelnen Transformationsgrade direct herzustellen, und die Operationsbasis lieferten hierfür die Reihen- und Productentwicklungen der ϑ.

Die Betrachtung derartiger ϑ-Relationen gewann dadurch ein historisches Interesse, dass man im Gauss'schen Nachlass hierher gehörige Entwicklungen vorfand**). Gauss' „neue Transcendenten" $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ sind geradezu mit den Nullwerten ϑ_0, ϑ_2, ϑ_3 identisch, und die Gauss'schen Entwicklungen ergeben bei dieser Sachlage ϑ-Relationen für die Transformationsgrade 3 und 5. Untersuchungen über derartige Relationen für $n = 3, 5, 7 \dots$ sind sehr zahlreich angestellt worden und setzen sich bis in die neueste Zeit fort***). Man hat sich dabei im allgemeinen keineswegs nur auf eine einzelne Relation für jeden Transformationsgrad beschränkt, welche geeignet wäre, die betreffende Jacobi'sche Modulargleichung zu ersetzen. Vielmehr ergaben die Methoden zumeist gleich eine grosse Menge ver-

---

*) *De aequationibus modularibus,* Regiomonti 1854; vergl. auch die Mitteilung in Bd. V der Acta Mathematica, p. 208 (1884).

**) Man sehe die Abhandlungen *„Zur Theorie der neuen Transcendenten"* im dritten Bande der gesammelten Werke p. 465.

***) Wir machen etwa die folgenden Abhandlungen namhaft: Schering, *Mitteilungen über den dritten Band von* Gauss' *Werken* (Math. Ann. Bd. 1, 1868); Göring, *Untersuchung über die Teilwerte der Jacobi'schen Thetafunctionen und die im Gauss'schen Nachlasse mitgeteilten Beziehungen derselben* (Math. Ann. Bd. 7, 1874); Herstowski, *Zur Theorie der Jacobi'schen Thetafunctionen* (Math. Ann., Bd. 11, 1876); Krause, *Sur la transformation des fonctions elliptiques* (Acta Math. Bd. 3, 1883); F. Müller, *Zur Transformation der ϑ-Functionen* (Grunert's Archiv, 2te Reihe Bd. 1, 1884); Rohde, *Zur Transformation der ϑ-Functionen* (ebenda Bd. 3, 1885); Russel, *On $kl - k'l'$ modular equations,* (Lond. Math. Soc. Proc. Bd. 19, 1888).

schiedener Relationen, von denen man die eleganteren fertig berechnete, ohne indessen des genaueren die zwischen ihnen bestehenden algebraischen Beziehungen zu verfolgen. Wie diese Beziehungen aus der Theorie der Modulfunctionen entspringen, und wie daraufhin die Gesamtheit der beim einzelnen Transformationsgrad eintretenden ϑ-Relationen auf Grund einheitlicher algebraischer Principien leicht überblickt werden kann, ist vom Herausgeber gelegentlich erörtert und für die Transformationsgrade $n = 3, 5$ vollständig durchgeführt worden*).

---

*) Vgl. die Leipziger Dissertation: *Über Systeme elliptischer Modulfunctionen* (Braunschweig, 1886) sowie die Abhandlung: *Die Congruenzgruppen der sechsten Stufe* (Math. Ann. Bd. 28, 1886).

Fünftes Kapitel.

Anwendung der Modulargleichungen erster Stufe auf die Theorie der ganzzahligen binären quadratischen Formen.

Im Abschnitt II Kap. 3 (Bd. I p. 243 u. f.) ist die Anwendung auseinandergesetzt, welche die Modulteilung der ω-Halbebene auf die Lehre von den ganzzahligen binären quadratischen Formen der elementaren Zahlentheorie zulässt. Vermöge zweckmässiger geometrischer Repräsentation der Formen gelang es, die Aequivalenz und Reduction der Formen mit den rein anschaulichen Mitteln der Modulteilung zur Darstellung zu bringen, und zugleich wurde die Endlichkeit der Classenanzahl bei gegebener positiver wie negativer Determinante D durch ein paar hinzukommende arithmetische Schlüsse festgestellt. Man weiss, dass die Bestimmung dieser Classenanzahl bei gegebener Determinante D den Hauptgegenstand in der eingehenderen Theorie jener quadratischen Formen ausmacht; und hier ist es nun, wo uns die in den voraufgehenden Kapiteln entworfene Transformationstheorie und insbesondere die Theorie der Modulargleichungen eine Reihe schöner Anwendungen zu Gebote stellt. Die Arbeiten von Kronecker und Stephen Smith, an die wir dabei anzuknüpfen haben (die genaueren Citate folgen weiterhin im Text) gehen von den Modulargleichungen zweiter Stufe, bez. den Jacobi'schen Modulargleichungen aus. Wollen wir indes die allgemein verbreitete Gestalt der Theorie der quadratischen Formen benutzen und so der Überlegung die ganze bei ihr erreichbare Einfachheit und Übersichtlichkeit erteilen, so müssen wir zunächst die Transformation *erster* Stufe und also die Modulargleichungen *erster* Stufe zu Grunde legen; und in der That finden wir hier einen neuen Beleg für die Richtigkeit der überall von uns festgehaltenen Anschauungsweise, dass man die erste Stufe *vor* den übrigen in Betracht ziehen soll. Selbstverständlich ist hiermit gemeint, dass die höheren Stufen späterhin in entsprechender Weise untersucht werden sollen, wie dies im folgenden Kapitel und in dem sechsten weiter unten folgenden Abschnitt noch geschehen wird. — Über die sich

unmittelbar an die Auseinandersetzungen des gegenwärtigen Kapitels anschliessende Theorie der complexen Multiplication der elliptischen Functionen können wir leider nur einen kurzen Bericht anfügen und müssen im übrigen auf die sonstigen Bearbeitungen dieses Gegenstandes verweisen.

§ 1. Ergänzende Sätze über die binären quadratischen Formen und ihre geometrische Repräsentation.

Bevor wir zum eigentlichen Gegenstande unserer neuen Untersuchung übergehen, müssen wir vorab eine Reihe von allgemeinen Sätzen über die ganzzahligen binären quadratischen Formen zusammenstellen, welche die in Bd. I l. c. entworfene Theorie dieser Formen in verschiedenen Punkten ergänzen.

Eine vorliegende Form (a, b, c) geht durch die ganzzahlige Substitution $x' = -x$, $y' = y$ der Determinante -1 in $(a, -b, c)$ über. Hat sie die negative Determinante $D = -\Delta$, so geht dabei der repräsentierende Punkt $\frac{b + i\sqrt{\Delta}}{a}$ der neuen Form aus dem der ursprünglichen, $\frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{a}$, durch Ausübung der Modulsubstitution *zweiter* Art A hervor. Das Gleiche gilt im Falle einer positiven Determinante D von den beiden repräsentierenden Halbkreisen der fraglichen Formen:

$$a(x^2 + y^2) \pm 2bx + c = 0.$$

Nun ist jede mit (a, b, c) im Sinne des zahlentheoretischen Sprachgebrauchs „uneigentlich" äquivalente Form mit $(a, -b, c)$ eigentlich äquivalent, und also folgt ohne weiteres der Satz: *Sind zwei Formen* (a, b, c), (a', b', c') *uneigentlich äquivalent, so gehen die repräsentierenden Punkte bez. Halbkreise durch Modulsubstitutionen zweiter Art auseinander hervor, und umgekehrt* *).

Vor allem mögen nun hier unter Berücksichtigung der uneigentlichen Äquivalenz und also der Substitutionen zweiter Art die Sätze über die Transformationen der einzelnen Form in sich eine umfassende Zusammenstellung finden, und zwar erstlich für *negative* Determinanten. Wir nehmen bei $D < 0$ übrigens die Formen sogleich in der Gestalt (P, Q, R) d. i. $Px^2 + Qxy + Ry^2$ an, die wir in I p. 250 unter dem Texte einführten. Als Determinante haben wir dann

$$D = -\Delta = Q^2 - 4PR, \tag{1}$$

*) Man vergl. die vorläufige Mitteilung unter dem Texte von I p. 249.

und der repräsentierende Punkt wird:

$$(2) \qquad \omega = \frac{-Q + i\sqrt{\Delta}}{2P}.$$

Es liegt dieser Formel offenbar die Annahme zu Grunde, dass wir hier nur mit positiven Formen (P, Q, R) arbeiten wollen, da anderenfalls der in (2) gegebene Punkt ω der negativen Halbebene angehören würde.

Liegt der repräsentierende Punkt (2) im Innern seines Elementardreiecks, so wissen wir, dass (P, Q, R) *nur* durch die Identität in sich übergeführt wird.

Die nächste Besonderheit, welche nunmehr eintreten kann, ist diejenige, dass der Punkt (2) auf einem Symmetriekreise, jedoch nicht gerade in einer Ecke der Modulteilung liegt. Alsdann geht (P, Q, R) ausser durch 1 noch durch die zu jenem Symmetriekreise gehörende Spiegelung, insgesamt also durch die Operationen einer in der erweiterten $\overline{\Gamma}$ enthaltenen $\overline{G}_2$ in sich über und ist also sich selbst zugleich eigentlich und uneigentlich äquivalent. Trifft dies zu, so können wir sofort zu (P, Q, R) äquivalente Formen in unendlicher Zahl angeben, deren repräsentierende Punkte auf den verticalen Geraden der Modulteilung liegen. Formen (P, Q, R) der letzteren Art sind durch die Eigenschaft charakterisiert, dass ihr mittlerer Coefficient Q durch den ersten P teilbar ist. Das sind aber die ambigen Formen*), und wir formulieren sofort den Satz: *Ist eine Form sich selbst uneigentlich äquivalent, so gehört sie einer ambigen Formclasse an.* Wir könnten drei Arten von ambigen Formclassen unterscheiden, je nach der Seite des schraffierten Ausgangsdreiecks, auf der der repräsentierende Punkt gelegen ist; die reducierten Formen dieser drei Arten von Formclassen haben bez. die Gestalt $(P, 0, R)$, (P, Q, P) und (P, P, R).

Der Fall, dass der repräsentierende Punkt (2) einer vorgelegten Form in einer mit $\omega = i$ oder ϱ äquivalenten Ecke der Modulteilung gelegen ist, wurde bereits I p. 247 ausführlich betrachtet. Wir können hinzusetzen, dass die hierher gehörenden Formen stets ambig sind und als reducierte Formen die Gestalt $(P, 0, P)$ bez. (P, P, P) haben. Die gesamten Substitutionen, welche eine Form (P, Q, R) fraglicher Art in sich überführen, bilden eine $\overline{G}_4$ bez. eine $\overline{G}_6$.

Sei jetzt (a, b, c) in der gewohnten Bezeichnung für eine Form der *positiven* Determinante D gebraucht, so wissen wir zuvörderst, dass zu dieser Form eine cyclische Gruppe G_∞ von hyperbolischen

---

*) Cf. Dirichlet-Dedekind, *Zahlentheorie* p. 138.

Substitutionen gehört, welche (a, b, c) in sich transformieren; die erzeugende Substitution dieser G_∞ war

$$(3) \qquad v = \begin{pmatrix} \frac{T - bU}{\sigma}, & -\frac{cU}{\sigma} \\ \frac{aU}{\sigma}, & \frac{T + bU}{\sigma} \end{pmatrix},$$

wo T, U die kleinste positive Lösung der Pell'schen Gleichung $t^2 - Du^2 = \sigma^2$ darstellte und σ der Teiler der Form (a, b, c) war.

Als Specialfall betrachten wir zunächst wieder den, dass (a, b, c) sich selbst uneigentlich äquivalent ist. Es muss alsdann der repräsentierende Halbkreis von (a, b, c) durch die betreffende Modulsubstitution zweiter Art in sich übergeführt werden. Hierbei aber ist sogleich noch eine wichtige Bemerkung einzuschalten: Sind (a, b, c) und (a', b', c') äquivalent, so geht durch die betreffende Modulsubstitution erster Art die erste Wurzel von $a\omega^2 + 2b\omega + c = 0$ wieder in die *erste* von $a'\omega^2 + 2b'\omega + c' = 0$ über (cf. I p. 251); gehen wir aber durch die Substitution $\omega' = -\omega$ von (a, b, c) zur uneigentlich äquivalenten Form $(a, -b, c)$, so wird aus der ersten Wurzel der einen Form die zweite der andern. Nun wollten wir die Operation $\omega' = -\omega$ (um in der positiven ω-Halbebene zu bleiben) durch die Modulsubstitution A ersetzen. Da ist denn also (was geometrisch sofort evident ist) der Pfeil, mit dem wir in I p. 251 den Halbkreis von (a, b, c) ausgestattet dachten, bei Ausübung von A gerade umzukehren, damit er die richtige Lage des zu $(a, -b, c)$ gehörenden Pfeiles auf dem zugehörigen Halbkreise angiebt. Das ist natürlich, wie man sofort bemerken wird, eine allgemeine Regel für uneigentlich äquivalente Formen (da doch bei eigentlicher Äquivalenz die erste Wurzel der einen Form immer wieder die erste der anderen Form ergiebt, und somit Umkehrung des Pfeiles hier nicht eintritt). Wenn wir also jetzt zur obigen Form (a, b, c) zurückkehren, die durch $\overline{V}$ in sich selbst übergeführt wird, so werden wir gleich des genaueren sagen: der zugehörige Halbkreis wird durch $\overline{V}$ derart in sich transformiert, dass dabei seine beiden auf der reellen Axe stehenden Fusspunkte permutiert werden. $\overline{V}$ hat demzufolge auf dem Halbkreise, und zwar im Innern der Halbebene, einen Fixpunkt und ist somit nach I p. 226 eine Spiegelung; also das Resultat: *Ist* (a, b, c) *sich selbst uneigentlich äquivalent, so schneidet der repräsentierende Halbkreis einen und damit unendlich viele Symmetriekreise der Modulteilung orthogonal; die zugehörigen Spiegelungen erweitern die aus* (3) *zu erzeugende* G_∞ *auf eine* $\overline{G}_{2\infty}$, *welche nun die gesamten,* (a, b, c) *in sich überführenden Substitutionen giebt.* — Indem man einen

an einen der orthogonal getroffenen Symmetriekreise der Modulteilung in eine senkrechte Gerade derselben transformiert, geht (a, b, c) in eine solche äquivalente Form (a', b', c') über, deren doppelter mittlerer Coefficient $2b'$ durch a' teilbar ist. *Die mit sich selbst uneigentlich äquivalenten Formen liefern uns also auch bei $D > 0$ wieder die ambigen Classen der Determinante D.* Unter den zugehörigen reducierten Formen lassen sich solche auffinden, die eine der drei Gestalten $(a, 0, c)$, (a, b, a), $(2b, b, c)$ besitzen.

Soll zweitens (a, b, c) ausser durch die Operationen der G_∞ noch durch eine weitere Modulsubstitution *erster* Art in sich übergehen, so könnte dies nur eine V_2 sein, deren Fixpunkt auf dem Halbkreise von (a, b, c) liegt. Inzwischen wird (a, b, c) durch V_2 doch nicht in sich, sondern vielmehr, wie man aus der obigen Betrachtung über die Pfeilrichtungen der Halbkreise ersieht, in $(-a, -b, -c)$ transformiert, welch' letztere Form wir als zu (a, b, c) *invers* bezeichnen mögen. Wir merken demnach als ersten Satz an: *Eine Formclasse ist stets und nur dann sich selbst invers, wenn auf dem Halbkreise einer in ihr enthaltenen Form ein und damit gleich unendlich viele mit $\omega = i$ äquivalente Punkte liegen.* Die unendlich vielen zu den durchzogenen Ecken der Modulteilung gehörenden elliptischen V_2 ergänzen die aus (3) entspringende G_∞ zu einer $G_{2\infty}$, deren Structur den endlichen Gruppen des Diedertypus analog ist (vgl. die Note in I p. 269).

Im letzteren Falle einer sich selbst inversen Classe erfährt die in I p. 257 gegebene Erörterung eine wesentliche Ergänzung*). Man hatte dort den repräsentierenden Kreis von (a, b, c) in eine geschlossene Kette von das Ausgangsdreieck durchsetzenden Kreissegmenten transformiert, die (in gewisser Richtung durchlaufen) ein Bild für die Periode der reducierten Formen abgaben (cf. Fig. 64, I p. 257). Gelangen wir nun beim Durchlaufen der Kette zu $\omega = i$, so wird uns die demnächst anzuwendende Operation T zu dem gerade voraufgehenden Segment zurückführen, das wir jetzt nur in entgegengesetzter Richtung durchlaufen. *So wird sich also die ganze Kette in diesem Specialfalle aus zwei coincidierenden Hälften zusammensetzen, deren einzelne wir erst in der einen, hernach sogleich in umgekehrter Richtung durchlaufen.*

Nun aber folgende, für unsere weiteren Entwicklungen wichtige Massnahme: Wir durchlaufen von $\omega = i$ beginnend nur die Hälfte unserer Kette und kommen so zu $\omega = i$ zurück. Das letzte dabei durch-

*) Dies ist zugleich die einzige hier nötige Ergänzung; insbesondere wird man leicht bemerken, dass der Punkt $\omega = \varrho$ keineswegs eine ähnliche Ausnahmerolle spielt, wie $\omega = i$.

laufene Kreissegment repräsentiert eine Form $(a, b, -a)$, und nun beschreibe man das zu diesem Segment im Punkte $\omega = i$ orthogonale; letzteres repräsentiert die Form $(-b, a, b)$ der Determinante D, welche aus $(a, b, -a)$ vermöge der irrationalen Substitution der Determinante 1:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y, \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y$$

hervorgeht. Es schliesst sich solcherweise an die erste Kette eine zweite, welche wir jedoch wieder nur zur Hälfte durchlaufen, um jetzt in gleicher Weise eine dritte Kette anzureihen. Es ist selbstverständlich, dass dieses System an einander gereihter Ketten sich nach einer endlichen Anzahl von Schritten schliesst. Ob aber dabei alle bei der Determinante D eintretenden, sich selbst inversen Classen in *ein* geschlossenes System aufgereiht sind oder nicht, wollen wir hier allgemein nicht mehr entscheiden.

Endlich noch die erläuternden Zusätze: *Nicht jede ambige Classe ist sich selbst invers;* so z. B. wird die Hauptform $(1, 0, -D)$ der Determinante D, welche ja stets ambig ist, höchstens dann mit ihrer inversen äquivalent sein können, wenn D nur Primteiler der Form $(4h + 1)$ besitzt. *Nicht jede sich selbst inverse Classe ist ambig;* solches zeigt z. B. die Form $(14, -5, -14)$ der Determinante $D = 221$, auf deren repräsentierendem Kreise $\omega = i$ und $\omega = \frac{7+i}{5}$ zwei consecutive Ecken der Modulteilung sind. Man liest aus Fig. 36 (I p. 113) ohne weiteres ab, dass die Hälfte der zugehörigen Formenperiode fünf Reducierte hat, dass aber zwischen den beiden Punkten $\omega = i$, $\frac{7+i}{5}$ kein Modulkreis orthogonal zum repräsentierenden Kreise von $(14, -5, -14)$ verläuft. Natürlich giebt es auch Classen, *die gleichzeitig ambig und sich selbst invers sind* (vgl. z. B. die unten zu betrachtenden Formclassen der Determinante $D = 5$); eine hierher gehörende Form wird, vom Zeichenwechsel ihrer Coefficienten abgesehen, insgesamt durch die Operationen einer in der erweiterten Modulgruppe enthaltenen $\overline{G}_{4\infty}$ in sich übergeführt.

§ 2. Beziehung der Modulargleichungen erster Stufe zu den quadratischen Formen positiver Determinante. Die Smith'sche Curve.

Für die eigentliche Transformation n^{ter} Ordnung hatten wir oben (p. 54 u. f.) eine Modulargleichung erster Stufe $f(J', J) = 0$ als existierend nachgewiesen und der näheren Untersuchung unterworfen. Ihre linke Seite war eine ganze rationale und symmetrische Function

der beiden Argumente J' und J, und zwar stiegen beide bis auf den Grad $\psi(n)$ in derselben an; die numerischen Coefficienten in $f(J', J)$ waren durchgehends reell und rational. — Man zerlege nun J in seinen reellen und imaginären Bestandteil: $J = X + iY$ und suche nach denjenigen Punkten J der XY-Ebene, für welche mindestens einer von den $\psi(n)$ zugehörigen Werten J' den zu J conjugiert complexen Wert $J' = X - iY$ annimmt. Zu dem Ende wird man $J' = X - iY$, $J = X + iY$ in die linke Seite der Modulargleichung substituieren, welche daraufhin in eine ganze rationale Function der beiden reellen Variabelen X, Y übergeht; dieselbe wird offenbar wieder durchgehends reelle rationale Coefficienten besitzen und von Y ausschliesslich Potenzen mit geraden Exponenten aufweisen. Indem wir die so gewonnene Function mit Null identisch setzen:

$$f(X - iY,\ X + iY) = h(X,\ Y) = 0, \tag{1}$$

entspringt die Gleichung einer in der J-Ebene gelegenen algebraischen Curve, von der uns vorab einzig die *reellen* Punkte interessieren; in der That liefern uns diese gerade alle hier gesuchten Werte J (für welche wenigstens eines der zugehörigen J' mit J conjugiert complex ist). Man bemerke übrigens sogleich, dass die Curve $h = 0$ Symmetrie in Bezug auf die X-Axe aufweisen wird.

Die fragliche algebraische Curve $h = 0$ steht nun in innigster Beziehung zu den quadratischen Formen der *positiven* Determinante $D = n$. Um dies klar zu legen, möge man nachsehen, wie sich $h = 0$ vermöge der Function $\omega(J)$ auf das Ausgangsdreieck der Modulteilung überträgt. Damit wir hier gleich vollen Anschluss an die übliche Bezeichnungsweise der quadratischen Formen erreichen, schreiben wir eine Transformation n^{ter} Ordnung:

$$R(\omega) = \frac{b\omega + c}{a\omega + d}, \quad bd - ac = n, \tag{2}$$

so dass gegenüber der sonst gebräuchlichen Bezeichnung die Buchstaben a, b, c für den Augenblick cyclisch permutiert sind. Ist jetzt ω im Ausgangsdreieck gelegen, und ist $J(nV(\omega))$ zu $J(\omega)$ conjugiert, so sind offenbar $nV(\omega)$ und $-\bar{\omega}$ äquivalente Punkte: $V'nV(\omega) = -\bar{\omega}$. Da aber $V'nV$ in der Gestalt (2) enthalten ist, so werden wir schreiben

$$\frac{b\omega + c}{a\omega + d} + \bar{\omega} = 0.$$

Substituiert man hier ausführlicher für ω den Wert $(x + iy)$, so folgt:

$$a(x^2 + y^2) + (b + d)x + (b - d)iy + c = 0.$$

Offenbar kann diese Gleichung nur bestehen, wenn $b = d$ ist, wo sie

dann für den fraglichen Punkt des Ausgangsdreiecks die Bedingung liefert:

$$a(x^2 + y^2) + 2bx + c = 0, \tag{3}$$

während zugleich die zweite Gleichung (2) übergeht in:

$$b^2 - ac = n. \tag{4}$$

So oft andrerseits für einen Punkt ω des Ausgangsdreiecks eine Gleichung (3) erfüllt ist, in welcher a, b, c drei ganze, der Bedingung $b^2 - ac = n$ genügende Zahlen ohne einen allen gemeinsamen Factor sind, ebenso oft finden wir umgekehrt in $J'(\omega) = J\left(\frac{b\omega + c}{a\omega + b}\right)$ eine zu $J(\omega)$ conjugiert complexe Zahl.

Die dem Ausgangsdreieck angehörenden Kreissegmente (3) liefern uns nun gerade die gesamten reducierten Formen (a, b, c) der Determinante $D = n$, sofern wir uns hier auf ursprüngliche Formen der ersten und zweiten Art, d. i. Formen vom Teiler $\tau = 1$ beschränken*). Aufs leichteste wird man dabei erkennen, *dass sich die Segmente der einzelnen geschlossenen Kette beim Übergang zur J-Ebene in einen allenthalben stetig gekrümmten, geschlossenen, reellen Zug der Curve $h = 0$ übertragen.* Dabei *erschöpfen* sie diesen Zug, so dass wir letzteren als Repräsentanten der zugehörigen Classe ansehen können. Nur machen hier wieder die sich selbst inversen Classen eine leicht erkennbare Ausnahme: Da nämlich die von $\omega = i$ ausstrahlenden Winkel beim Fortgang zur J-Ebene verdoppelt erscheinen, so wird sich offenbar der von $(a, b, -a)$ herrührende Teil der Curve $h = 0$ über $J = 1$ weg stetig gekrümmt in den zu $(-b, a, b)$ gehörenden Teil fortsetzen. *Bei den sich selbst inversen Classen werden demnach nur erst alle diejenigen Ketten einen geschlossenen reellen Zug von $h = 0$ liefern, die wir im vorigen Paragraphen in ein geschlossenes System angereiht haben.*

Die hiermit zu Tage getretene merkwürdige Beziehung der Modulargleichungen zu den Formclassen positiver Determinante wurde zuerst von Stephen Smith aufgewiesen**); wir benennen dieserhalb

---

*) Cf. Dirichlet-Dedekind, *Zahlentheorie*, 3. Aufl. p. 148.

**) In der I p. 251 genannten Arbeit „*Sur les équations modulaires*" (1873, bez. 1877), welche die Modulargleichung zwischen λ und λ' zu Grunde legt. Die im Texte entwickelte Theorie „erster Stufe", sowie die Untersuchung des voraufgehenden Paragraphen wurden vom Herausgeber durchgeführt. Übrigens ist interessant, die Angaben zu vergleichen, welche Stephen Smith selbst über die Entstehung seiner bezüglichen Untersuchungen gemacht hat (Proceedings of the London Math. Soc., vol. 9, 1878, p. 245); ihnen zufolge war Stephen Smith frühzeitig darauf aufmerksam geworden, dass sich für die erste Stufe manche Verhältnisse einfacher gestalten als für die zweite, hat sich dann aber doch nicht entschliessen können, von der herkömmlichen Benutzung des Moduls λ abzugehen.

die Curve $h = 0$ fortan als die Smith'sche Curve, und zwar des genaueren als diejenige *erster Stufe der Determinante D.* Unter Vorbehalt sogleich hinzuzusetzender Ergänzungen haben wir den Satz auszusprechen: *Die Smith'sche Curve erster Stufe der Determinante D hat gerade so viele reelle Züge, als es Classen ursprünglicher Formen der Determinante D giebt.* Die Zusätze aber sind: *Kommen unter den reellen Zügen der Smith'schen Curve auch solche vor, die durch $J = 1$ ziehen, so wird der einzelne unter ihnen gleich soviel sich selbst inverse Classen ergeben, als die Anzahl der Teile beträgt, in die der fragliche Curvenzug durch den Punkt $J = 1$ zerlegt wird.* Und ferner: *Unter zwei inversen Classen ist in den ausgesprochenen Sätzen immer nur die eine gerechnet, so dass insbesondere von den Formenperioden der sich selbst inversen Classen immer nur die Hälfte zur Geltung kommt.* Es müsste nämlich andernfalls die Smith'sche Curve doppelt zählende Curvenzüge aufweisen, und dies erweist sich im Anschluss an Formel (1) auf Grund der Irreducibilität der Modulargleichung $f(J', J) = 0$ als unmöglich.

Zerschneiden wir die reelle J-Axe von $J = 1$ über 0 bis $-\infty$, so wird der einzelne reelle Zug der Smith'schen Curve in eine Anzahl von Curvenstücken zerschnitten, welche den Formen der zugehörigen Formenperiode eindeutig zugeordnet sind. Was die Gestalt dieser einzelnen Curvenstücke angeht, so können wir mehrere Typen unterscheiden, die in Fig. 4 schematisch zu Anschauung gebracht sind (vgl. übrigens Fig. 65 in I p. 258). Im ersten Falle, wo wir einen Umgang um das Punktepaar $J = 0, 1$ haben, ist die zugehörige Form eine Nebenreducierte. Liegt eine Hauptreducierte vor, so wird auch die nach der einen oder andern Seite benachbarte Form eine solche sein. Da tritt die Fallunterscheidung ein, ob von den beiden zugehörigen Kreisbogen des Ausgangsdreiecks keiner oder einer die imaginäre ω-Axe überkreuzt; ersteren Fall stellt Fig. 4_2 vor, letzteren, wo ein Wendepunkt der Smith'schen Curve eintritt, Fig. 4_3. Es ist natürlich keineswegs ausgeschlossen, dass Hauptreducierte auch in grösserer Anzahl auf einander folgen. — Übrigens gehören den ambigen Classen offenbar solche reelle Züge von $h = 0$ zu, die bezüglich der reellen J-Axe sich selbst symmetrisch sind. Ein einzelner solcher Curvenzug wird, wo er auch die reelle J-Axe trifft, dieselbe entweder orthogonal schneiden oder dortselbst einen Doppelpunkt aufweisen.

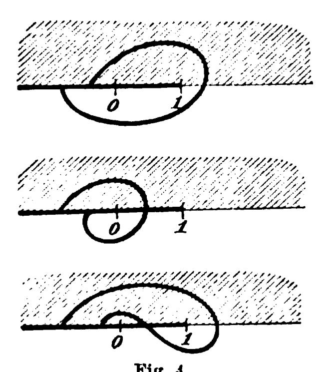


Fig. 4.

Endlich haben wir in dem hier vorliegenden Zusammenhange noch der erweiterten Transformation n^{ter} Ordnung zu gedenken. Dieselbe kann, wie wir wissen, nur dann eintreten, wenn $n = D$ quadratische Teiler τ^2 enthält und besteht aus dem Inbegriff aller eigentlichen Transformationen der Grade $\frac{n}{\tau^2}$. Wir bemerken aber sofort: *Indem wir erweiterte Transformation n^{ter} Ordnung zu Grunde legen, wird die Gesamtheit der ursprünglichen und abgeleiteten*) Formen der Determinante D gerade in der Art zur Geltung kommen, wie in unseren voraufgehenden Erörterungen allein die ursprünglichen Formen.* Weiter unten wird übrigens diese erweiterte Auffassung noch sehr wichtig werden.

§ 3. Übertragung der Smith'schen Curve auf das n^{te} Transformationspolygon**).

Betrachten wir J' und J als Cartesische Coordinaten (ohne darum complexe Werte dieser Grössen auszuschliessen), so bedeutet $f(J', J) = 0$ eine ebene algebraische Curve, die man gelegentlich als Modularcurve bezeichnet hat. Ist insbesondere J' die Wurzel $J' = J(n\omega)$, so ist die Modularcurve wechselweise eindeutig auf dasjenige Transformationspolygon $F_{\psi(n)}$ bezogen, welches wir oben (p. 40 u. f.) ausführlich untersuchten. Führen wir jetzt wieder:

$$(1) \qquad X = \frac{J + J'}{2}, \quad Y = \frac{J - J'}{2i}$$

ein und denken dementsprechend für den Augenblick auch X und Y als complexer Werte fähig, so entspringt aus der Modularcurve durch die einfache Collineation (1) die Smith'sche Curve $h = 0$. Letztere ist also nicht nur irreducibel, sondern besitzt auch denselben Grad und dasselbe Geschlecht, wie die Modularcurve, welches letztere übrigens in Formel (12) p. 51 allgemein bestimmt ist. Nun aber zeigte sich früher, dass es überall nicht das zweckmässigste ist, das Transformationspolygon auf das Modulsystem J', J zu beziehen; immer gab es vielmehr einfachere Moduln, in denen wir dann sowohl J wie J' rational darstellten. Die Frage, die sich hier von selbst aufdrängt, ist diese: Wie werden sich unsere auf die reellen Teile der Curve $h = 0$ bezüglichen Betrachtungen ausgestalten, wofern wir statt J, J' anderweitige Modulfunctionen des Transformationspolygons zum Gebrauche heranziehen? Indem wir aber unsere Betrachtung dement-

*) Cf. Dirichlet-Dedekind, *Zahlentheorie*. l. c.

**) [Neuere Untersuchung des Herausgebers.]

sprechend vom Ausgangsdreieck der ω-Halbebene in das Transformationspolygon verlegen und dabei vorab von speciellen Moduln desselben ganz absehen, werden wir über die Bedeutung und die Gestalt der Smith'schen Curve mehrere neue und elegante Gesichtspunkte gewinnen.

Vorhin hatten wir die oft genannten Kreissegmente des Ausgangsdreiecks dadurch erzielt, dass wir nach einander alle $\psi(n)$ Wurzeln $J(n\,V(\omega))$ neben $J(\omega)$ stellten und für jedes Paar diejenigen Punkte ω des Doppeldreiecks 1 aufsuchten, welche conjugiert complexe $J(n\,V(\omega))$, $J(\omega)$ lieferten; dass dabei jedes Kreissegment nur von *einem* bestimmten Paare geliefert wird, entnimmt man leicht aus der Eigenart der Modulargleichung. Offenbar werden wir ebensowohl zur Kenntnis aller Kreissegmente gelangen, wenn wir nur das Functionenpaar $J(n\omega)$, $J(\omega)$ nebeneinander stellen, selbige nun aber durch alle Punkte ω der $\psi(n)$ Doppeldreiecke V von $F_{\psi(n)}$ der in Rede stehenden Vergleichung unterwerfen. Hiermit ist eine merkwürdige Vereinfachung erzielt: Die Kreissegmente sind nicht mehr alle über dem einen Ausgangsdreieck gelagert; sie sind vielmehr verteilt, und zwar jedes auf ein ganz bestimmtes der $\psi(n)$ Doppeldreiecke V, wobei sie sich offenbar zu grösseren, das Transformationspolygon $F_{\psi(n)}$ durchsetzenden Kreisbogen zusammenfügen. Wir können das System dieser Kreisbogen als *die auf das Polygon F_ψ übertragene Smith'sche Curve* bezeichnen und werden sogleich in demselben Sinne von einer *auf die geschlossene Fläche F_ψ übertragenen* Smith'schen Curve sprechen.

Hier bietet sich uns eine schöne Verwendung jener doppelt überlagerten Dreiecksfiguren dar, welche wir schon oben (p. 42 u. f.) ausführlich beschrieben haben. Das Transformationspolygon wurde durch die Substitution der Periode zwei:

$$W(\omega) = \frac{-1}{n\omega} \tag{2}$$

in sich transformiert (cf. (5) p. 42), und nun dachten wir uns das Polygon F_ψ in seiner ursprünglichen Gestalt, sowie in der neuen $W(F_\psi)$ zur Coincidenz gebracht; die Dreiecke der einen Art (entweder die von ω oder von $\omega' = W(\omega)$) erschienen dabei freilich im allgemeinen an der Berandung von F_ψ zerstückt. Die solcherweise entspringende Einteilung von F_ψ weist im allgemeinen Kreisbogenvierecke auf; es können aber auch Dreiecke oder Fünfecke oder endlich Sechsecke auftreten, was wir hier des näheren nicht untersuchen wollen (vgl. übrigens Fig. 1, 2 p. 42). Dabei sind dann die in Rede stehenden Bereiche des doppeltgeteilten Polygons F_ψ entweder frei oder einfach oder endlich doppelt schraffiert. In dieser Figur treten nun jene oben besprochenen, zur

reellen Axe orthogonalen Kreisbogen unmittelbar in Evidenz. In der That wird der einzelne solche Kreis stets nur einfach schraffierte Bereiche von F_ψ durchziehen; wo er einen Kreis der ω-Teilung überschreitet, wird er immer zugleich einen Kreis der ω'-Teilung kreuzen; jener Kreisbogen wird also stets die Rolle einer Diagonale des einzelnen, von ihm durchsetzten, einfach schraffierten Bereichs spielen, sofern er nicht zwei coincidierende Kreise der ω- und ω'-Teilung kreuzt, die vereinzelt immer auftreten*).

In einem ganz neuen Lichte erscheinen aber die soeben im Transformationspolygon gezeichneten Kreisbogen, wenn wir dasselbe zur geschlossenen Fläche F_ψ zusammenlegen. Wie wir schon p. 44 bemerkten, kommt dieser Fläche insgesamt eine $\overline{G}_4$ von Transformationen in sich zu, die aus den Operationen $1, A, W, WA$ besteht. Diese letztere WA ist eine Operation zweiter Art der Fläche in sich und findet unter Zugrundelegung des Functionssystems J, J' bekanntlich ihren analytischen Ausdruck im Übergang von J, J' bez. zu $\overline{J'}, \overline{J}$. Eben als symmetrische Umformung der Fläche in sich besitzt nun WA auf derselben eine gewisse Anzahl von Symmetrielinien, und offenbar werden dieselben von denjenigen Punkten der Fläche geliefert, in welchen $J' = \overline{J}$ und also auch $J = \overline{J'}$ ist. Letzteres aber war gerade die Definition der Smith'schen Curve: *die auf die Fläche F_ψ übertragene Smith'sche Curve ist also schlechtweg das Aggregat der in Rede stehenden Symmetrielinien***). Wollen wir dementsprechend das Resultat des vorigen Paragraphen in prägnanter Weise aussprechen, so werden wir sagen: *Die Anzahl der Symmetrielinien, welche der Transformation WA der Fläche F_ψ in sich zukommen, ist gleich der Classenanzahl der ursprünglichen Formen positiver Determinante n.* Natürlich ist auch hier wieder ein ergänzender Zusatz betreffs der sich selbst inversen Classen nötig: *Eine Symmetrielinie, die durch Ecken $J = 1$ der auf F_ψ gezeichneten ω-Teilung geht, ergiebt mehrere sich selbst inverse Classen; und zwar ist die Zahl dieser Formclassen gleich der Anzahl der Teile, in*

---

*) Man vgl. die weiter unten für $n = 5$ gezeichnete Figur; auch wird man leicht in der zum Falle $n = 6$ gehörenden Fig. 1 p. 42 die Lage des einen hier die Smith'sche Curve wiedergebenden Kreises wahrnehmen.

**) Man könnte hierbei den Einwurf machen, dass ja auch zwei *verschiedene* durch WA einander zugewiesene Punkte von F_ψ ein und dasselbe Wertsystem J, J' tragen möchten. Punkte dieser Art kommen aber (wenn überhaupt) auf der Fläche nur vereinzelt vor. Die Schlussweise des Textes führt also sicher nicht zu ihnen, da wir doch durch Identischsetzen von J' und $\overline{J}$ ganze Linienzüge der F_ψ gewinnen.

welche die Symmetrielinie durch die auf ihr gelegenen Ecken bezeichneter Art zerlegt wird.

Übrigens wird man sogleich sehen: Wo auch immer die auf die Fläche F_ψ übertragene Smith'sche Curve eine Ecke a, b der ω-Teilung trifft, wird sie durch eine gleichartige Ecke der ω'-Teilung durchziehen. Verlegen wir einen solchen Punkt in die ω-Halbebene zurück, so wird $J(\omega)$, $J'(\omega)$ in dessen Umgebung ein zwei- bez. dreideutiges Functionssystem sein. Der fragliche Punkt wird also auf dem Rande des Polygons F_ψ liegen, und ihm wird eine in der Γ_ψ enthaltene elliptische Substitution der Periode zwei bez. drei zugehören. Indem man leicht auch die Umkehrung dieses Satzes beweisen wird, entspringt unter Rücksicht auf p. 50 z. B. das bemerkenswerte Resultat: *Die Anzahl sich selbst inverser Classen ursprünglicher Formen der Determinante n ist identisch mit der Anzahl incongruenter Lösungen der Congruenz $x^2 \equiv -1$, (mod. n).* Auch über die Gestalt der auf F_ψ übertragenen Smith'schen Curve gewinnen wir aus ihrer erkannten Beziehung zur Operation WA einige Angaben. So z. B. folgt, *dass keine zwei Züge dieser Curve einander überkreuzen oder berühren können**).

Ist nunmehr $z(\omega)$ eine möglichst einfache Function der Γ_ψ, die jedoch auf der imaginären ω-Axe reell sein soll, und die überdies nicht durch die Operation W in sich transformiert werden darf. Die „in der z-Ebene gelegene Smith'sche Curve“ entspringt dann einfach durch Abbildung der Fläche F_ψ auf die z-Ebene, wobei natürlich im allgemeinen dem einzelnen Punkte der letzteren immer mehrere Punkte von F_ψ zugehören. Indem wir jetzt $z(\omega)$ und $z'(\omega) = z\left(\frac{-1}{n\omega}\right)$ als volles Modulsystem der Γ_ψ einführen, gelingt es ganz wie früher, den analytischen Ausdruck für die in der $z = (\xi + i\eta)$-Ebene gelegene Smith'sche Curve zu gewinnen. Ist nämlich $g(z', z) = 0$ die zwischen z' und z bestehende algebraische Relation (mit reellen Coefficienten), so ist die fragliche Curve einfach durch:

$$g(\xi - i\eta,\ \ \xi + i\eta) = h(\xi, \eta) = 0 \tag{3}$$

gegeben, da sich doch die Operation WA wieder als Übergang von z, z' zu $\bar{z}'$, $\bar{z}$ darstellt.

---

*) Übrigens wolle man noch beachten, dass sich von hier aus der Rückgang zur ursprünglichen Smith'schen Curve der J-Ebene äussert einfach gestaltet. Wir brauchen nur die im Raume gelegene Fläche F_ψ mit der auf ihr gelegenen Curve zur ψ-blättrigen Riemann'schen Fläche über der J-Ebene zusammenzufalten, worauf dann die Smith'sche Curve durch die verschiedenen Blätter dieser Fläche hindurchziehen wird. Hernach lasse man alle Blätter mit ihren verschiedenen Zügen der Curve auf das unterste unter ihnen zurücksinken und kommt so offenbar zur anfänglichen Figur zurück.

Die eindeutige Beziehung der Curven $k(\xi, \eta) = 0$ und $h(X, Y) = 0$ auf einander stellt man übrigens leicht durch explicite Formeln dar. In der That ist:

$$z = R(J', J), \quad z' = R(J, J') \tag{4}$$

und umgekehrt

$$J = R'(z', z), \quad J' = R'(z, z'). \tag{5}$$

Spalten wir also überall für die Punkte der Smith'schen Curve reelle und imaginäre Bestandteile aus einander:

$$z = \xi + i\eta = R(X - iY, X + iY) = R_1(X, Y) + iR_2(X, Y) \text{ etc.},$$

so kommen einerseits die Formeln:

$$\xi = R_1(X, Y), \quad \eta = R_2(X, Y), \tag{6}$$

sowie aus (5) als Umkehrungen von (6):

$$X = R_1'(\xi, \eta), \quad Y = R_2'(\xi, \eta). \text{ —} \tag{7}$$

Besonders einfach gestalten sich natürlich diese Verhältnisse in den 14 Fällen des Geschlechtes $p = 0$, die wir oben (p. 52) zusammenstellten. Da nehmen wir z jeweils als Hauptmodul, und es wird alsdann (3) in einfachster Weise einen *Kreis* darstellen (indem doch zwischen z und z' eine lineare Gleichung besteht). Es folgt: *Bei den zum Geschlechte $p = 0$ gehörenden Determinanten $D = n$ giebt es entweder (falls nämlich $x^2 \equiv -1$ (mod. n) keine Lösungen besitzt) nur zwei einander inverse Classen, oder aber es giebt soviel sich selbst inverse Classen, als $x^2 \equiv -1$ incongruente Lösungen besitzt.* Zum letzteren Falle gehören die vier Determinanten $D = 5$, 10, 13, 25, wo wir immer *zwei* sich selbst inverse Classen haben; die übrigen zehn Determinanten gehören zum ersteren Falle.

Man überblickt, welch' reiche Ausbeute für die Formen positiver Determinante hier aus den Modulargleichungen erster Stufe gewonnen werden kann, und die wirkliche Ausführung dieser Entwicklungen in zahlreichen Einzelfällen dürfte sich um so müheloser gestalten, als namentlich in den Arbeiten von Hrn. Kiepert über die Transformation von $J(\omega)$ ein sehr reichhaltiges numerisches Material vorliegt, das wohl zum unmittelbaren Gebrauche geeignet ist. Wir werden jedoch aus diesem Gebiete nur einige wenige Beispiele betrachten können; bevor dies indessen geschieht, müssen wir aufweisen, wie sich die Formen negativer Determinante in unsere bisherige Theorie einordnen.

§ 4. Einführung der singulären Moduln erster Stufe n^{ter} Ordnung und der Modulfunction erster Stufe $H_n(\omega)$.

Um vieles schöner noch oder doch weitertragend ist die Anwendung, welche die Modulargleichungen auf die Theorie der quadratischen Formen *negativer* Determinante gestatten. Wir kommen hiermit zu denjenigen Untersuchungsgebieten, welche im Anschluss an einige Bemerkungen Abel's (cf. weiter unten § 8) allererst von Hrn. Kronecker, und zwar unter Benutzung der Modulargleichungen für den Modul k^2, aufgedeckt worden sind*). Indem wir aber, wie schon einleitend bemerkt wurde, unsere Problemstellungen hier zuerst auf die erste Stufe beziehen, wollen wir von einer schon gelegentlich (am Schlusse des vorigen Kapitels) gegebenen Deutung der Modulargleichung $f(J', J) = 0$ für Transformation n^{ter} Ordnung ausgehen. Wir interpretieren die complexen Werte von J sowie J' in einer und derselben Ebene; es sind dann offenbar jedem Punkte J insgesamt immer $\psi(n)$ Punkte J' der Ebene durch $f(J', J) = 0$ zugeordnet, wie auch umgekehrt jedem Punkte J' der Ebene ebenso viele J entsprechen. Was wir so in der J-Ebene erhalten, nannten wir a. a. O. eine Modularcorrespondenz; und zwar ist die hier vorliegende ψ-ψ-deutig, und das Entsprechen der Punkte J, J' ist ein vertauschbares. *Unser Problem sei nun, dass wir diejenigen Punkte J ausfindig machen, für welche wenigstens einer der zugehörigen Punkte J' mit J coincidiert, und dass wir die Bedeutung dieser Punkte aufweisen***).

Die fraglichen Punkte werden uns offenbar insgesamt gerade durch die volle Auflösung der algebraischen Gleichung:

$$(1) \qquad f(J, J) = 0$$

geliefert; wir finden also nicht mehr (wie oben bei der Smith'schen Curve) in der J-Ebene ganze Linienzüge, sondern wir gewinnen nur eine endliche Anzahl vereinzelt liegender Punkte. Die zugehörigen Werte J wollen wir unter Aufnahme der von Kronecker eingeführten Bezeichnungsweise als *singuläre Moduln* benennen, des genaueren

---

*) Die ersten bezüglichen Arbeiten von Hrn. Kronecker sind: „*Über elliptische Functionen, für welche complexe Multiplication stattfindet*" Berliner Monatsberichte von 1857, „*Über die Anzahl der verschiedenen Classen quadratischer Formen von negativer Determinante*" Crelle's Journal Bd. 57 (1860). Es reiht sich daran eine Anzahl weiterer Arbeiten Kronecker's, die zumeist in den Monatsberichten der Berliner Academie veröffentlicht wurden; z. T. werden wir dieselben noch weiter unten namhaft zu machen haben.

**) Offenbar könnten wir auch sagen, dass es sich um den Durchschnitt der Modularcurve $f(J', J) = 0$ mit der Geraden $J' - J = 0$ handeln solle.

aber als *singuläre Moduln erster Stufe* n^{ter} *Ordnung*. Die algebraische Gleichung (1) heisse die Gleichung der singulären Moduln erster Stufe n^{ter} Ordnung; ihr Grad ist $\geqq \psi(n)$, und sie weist durchgehends reelle, rationale numerische Coefficienten auf. Die Wurzeln von (1) mögen zum Teil conjugiert complex ausfallen; was aber die reellen Wurzeln angeht, so werden dieselben, wie man sofort sieht, als Coordinaten X vom Durchschnitt der X-Axe mit den reellen Zügen der Smith'schen Curve $h(X, Y) = 0$ geliefert, und es kommt dabei jeder dieser Werte $J = X$ als Wurzel von (1) in der nämlichen Multiplicität zur Geltung, wie beim Schnitt von $h = 0$ mit $Y = 0$.

Die linke Seite von (1), in Abhängigkeit von ω betrachtet, ist eine sehr merkwürdige Modulfunction erster Stufe, die wir durch $G(\omega)$ oder genauer $G_n(\omega)$ bezeichnen wollen. Dieselbe ist eine ganze rationale Function von J und wird also im Ausgangsdreieck nur bei $\omega = i\infty$ in gewisser Multiplicität unendlich, während die in jenem Dreieck zerstreut liegenden Nullpunkte von $G(\omega)$ diejenigen Stellen markieren, deren zugehörige J die singulären Moduln sind. Wir sagen aber infolge der conformen Beziehung des Ausgangsdreiecks auf die J-Ebene sogleich genauer: *Ist* $J_0 = J(\omega_0)$ *eine* ν*-fache Wurzel von* (1), *so verschwindet* $G(\omega)$ *in* ω_0 *gerade* ν*-fach, gemessen im Ausgangsdreieck* (cf. I p. 586 u. f.). Dieser letztere Zusatz wird für etwaige Punkte $\omega_0 = i, \varrho$ von Wichtigkeit: messen wir für sie das Verschwinden von $G(\omega)$ direct in der ω-Halbebene, so wird der Grad desselben gleich der doppelten resp. dreifachen Multiplicität der bezüglichen Wurzel von (1) sein.

Bilden die ψ Substitutionen $\omega' = R_i(\omega)$ ein Repräsentantensystem eigentlicher Transformation n^{ter} Ordnung, so können wir die linke Seite der Modulargleichung offenbar in der Gestalt schreiben:

$$f(J', J) = \prod_{i=0}^{\psi-1} \{J' - J(R_i(\omega))\}. \tag{2}$$

Für die Modulfunction erster Stufe $G(\omega)$ ergiebt sich daraufhin die Darstellung:

$$G(\omega) = \prod_{i=0}^{\psi-1} \{J(\omega) - J(R_i(\omega))\}. \tag{3}$$

Hieran knüpft sich sofort folgende wichtige Überlegung: Soll G im Punkte ω_0 verschwinden, so wird ω_0 mit einer der ψ Zahlen $R_i(\omega_0)$ äquivalent sein: $\omega_0 = VR_i(\omega_0)$. Fassen wir VR_i in die Substitution

$$R(\omega) = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}, \quad ad - bc = n \tag{4}$$

zusammen und gebrauchen zugleich für die hier in Rede stehenden ω_0 eine naheliegende besondere Benennung, so können wir sagen: *Ein einzelnes zur n^{ten} Ordnung gehörendes singuläres ω_0 ist stets Fixpunkt einer in der Gestalt* (4) *enthaltenen elliptischen ω-Substitution.* Dabei kann dieser Punkt ω_0 natürlich stets im Ausgangsdreieck angenommen werden.

In der nächsten Umgebung des Fixpunktes ω_0 gestattet die Substitution $\omega' = R(\omega)$ die Darstellung (cf. I p. 164):

$$\omega' - \omega_0 = k(\omega - \omega_0), \quad \sqrt{k} = \frac{a + d - \sqrt{(a+d)^2 - 4n}}{2\sqrt{n}}, \tag{5}$$

und hier ist unter allen Umständen k von 1, für $\omega_0 = i$ oder ϱ aber auch von -1 bez. $\varrho^{\pm 1}$ verschieden, weil wir nämlich letzten Falls in R die Modulsubstitution T bez. U hätten. Daraufhin lässt sich leicht bestimmen, in welchem Grade der hier in Rede stehende Factor von (3):

$$J(\omega) - J(\omega') = J(\omega) - J(R(\omega)) \tag{6}$$

bei ω_0 verschwindet. Es ist nämlich für die Umgebung von ω_0 (nach I p. 586) $J(\omega) - J_0 = \alpha(\omega - \omega_0)^\nu$ annähernd gültig, wobei α eine von Null verschiedene Constante, ν aber die ganze Zahl 3, 2 oder 1 bedeutet, je nachdem $\omega_0 = \varrho$, i oder endlich ein anderer Punkt des Ausgangsdreiecks ist. Ein Blick auf (5) und (6) ergiebt hierauf mit der gleichen Annäherung:

$$J(\omega) - J(R(\omega)) = \alpha(1 - k^\nu)(\omega - \omega_0)^\nu = \alpha'(\omega - \omega_0)^\nu,$$

wo offenbar wieder α' endlich und von Null verschieden ist. Wir haben das Resultat: *An der singulären Stelle ω_0 verschwindet $G(\omega)$, im Ausgangsdreieck gemessen, im Grade μ, wenn dortselbst μ Factoren der rechten Seite von* (3) *Null werden, während die übrigen endlich bleiben.*

Bevor wir diese Resultate für die arithmetische Betrachtung der zur Ordnung n gehörenden singulären Stellen ω_0 verwenden, müssen wir noch eine Bemerkung vorausschicken. Im Verfolg eines Teils unserer Untersuchung erweist es sich nämlich als zweckmässig, bei Ordnungen n mit quadratischen Teilern τ^2 immer gleich alle zu den gesamten Ordnungen $\frac{n}{\tau^2}$ eigentlich gehörenden singulären Moduln zusammen zu betrachten. Alle diese Moduln bezeichnen wir dann schlechtweg als zur Ordnung n gehörig, so oft der Zusammenhang der Darstellung eine schärfere Fassung des Ausdrucks nicht erfordert. Natürlich kommt dies darauf hinaus, dass wir erweiterte Transformation n^{ter} Ordnung zu Grunde legen, wo wir dann an Stelle der bis-

herigen Modulargleichung $f_n(J', J) = 0$ die im allgemeinen reducibele Gleichung treten lassen:

$$\prod_{\tau}{}' f_{\frac{n}{\tau^2}}(J', J) = 0. \tag{7}$$

Doch wollen wir dabei, sofern n ein reines Quadrat ist, von $\tau = \sqrt{n}$ d. i. von Transformation erster Ordnung absehen, weil die zugehörige Modulargleichung $J' - J = 0$ für $J' = J$ identisch verschwindet; wir deuten diesen Ausfall von $\tau = \sqrt{n}$ im gekennzeichneten Falle hier und in der Folge durch einen oberen Index am Productzeichen an, von welchem wir in Formel (7) bereits Gebrauch machten. Durch die Substitution $J' = J$ gehe (7) in die algebraische Gleichung

$$g_n(J) = 0 \tag{8}$$

über, welches nun die Gleichung der singulären Moduln n^{ter} Ordnung ist. In Abhängigkeit von ω werde die linke Seite von (8) als $H_n(\omega)$ bezeichnet, welche Modulfunction erster Stufe auch als Product aller Functionen $G_{\frac{n}{\tau^2}}$ definiert werden kann:

$$H_n(\omega) = \prod_{\tau}{}' G_{\frac{n}{\tau^2}}(\omega). \tag{9}$$

Durchläuft $R_i(\omega)$ ein System von $\Phi(n)$ Repräsentanten für erweiterte Transformation, so können wir auch $H_n(\omega)$ durch:

$$H_n(\omega) = \prod_{i=0}^{\Phi-1}{}' \{J(\omega) - J(R_i(\omega))\} \tag{10}$$

definieren, wo, wie schon angedeutet, für rein quadratische n der eine Repräsentant

$$R(\omega) = \frac{\sqrt{n}\,\omega}{\sqrt{n}} \tag{11}$$

auszulassen ist. Die oben entwickelten Sätze über die Beziehung der Wurzeln von $f_n(J, J) = 0$ zu den Nullstellen von $G_n(\omega)$, sowie über den Grad des Verschwindens dieser letztern Modulfunction übertragen sich jetzt ohne weiteres auf gleichlautende Sätze für $g_n(J) = 0$ und $H_n(\omega)$.

§ 5. Die Beziehung der singulären Moduln zu den quadratischen Formen negativer Determinante. Arithmetische Gradbestimmung der Gleichung $g_n(J) = 0$.

Ist R_i einer der $\Phi'(n)$ Repräsentanten, so wird derselbe stets dann eine der fraglichen singulären Stellen ω des Ausgangsdreiecks liefern, so oft ω und $R_i(\omega)$ äquivalente Zahlen sind. Tritt dies ein,

so giebt es eine bez. zwei oder drei Modulsubstitutionen V, welche der Gleichung $VR_i(\omega) = \omega$ genügen, je nachdem ω ein beliebiger Punkt des Ausgangsdreiecks ist oder aber $\omega = i$ oder endlich $\omega = \varrho$ zutrifft. Schieben wir die Besprechung der beiden letzten speciellen Lagen von ω zunächst hinaus und schreiben nunmehr:

$$(1) \qquad VR_i = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}, \quad c\omega^2 + (d-a)\omega - b = 0.$$

Dabei sind durch Angabe der fraglichen singulären Stelle ω und des zugehörigen Repräsentanten R_i die vier ganzen Zahlen a, b, c, d der Determinante n und des Teilers τ bis aufs Vorzeichen fest bestimmt. Über letzteres verfügen wir so, dass c positiv wird.

Im Anschluss an Gleichung (1) schreiben wir jetzt:

$$(2) \qquad c = P, \quad d - a = Q, \quad d + a = \varkappa, \quad -b = R$$

und finden unter Gebrauch der hiermit eingeführten Bezeichnungen die fragliche singuläre Stelle des Ausgangsdreiecks bestimmt durch die quadratische Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten:

$$(3) \qquad P\omega^2 + Q\omega + R = 0.$$

Hier haben wir nun in (P, Q, R) eine reducierte quadratische Form, deren Teiler σ ein Multiplum von τ ist, und deren negative Determinante:

$$D = -\Delta = Q^2 - 4PR$$

sich sofort aus

$$(4) \qquad \Delta = -4bc - (a-d)^2 = 4n - \varkappa^2$$

bestimmt; der absolute Wert $|\varkappa|$ der Zahl $\varkappa$ genügt hiernach der Ungleichung $|\varkappa| < 2\sqrt{n}$.*) Als fragliches ω_0 und zugehörigen singulären Modul finden wir:

$$(5) \qquad \omega_0 = \frac{-Q + i\sqrt{\Delta}}{2P}, \quad J\left(\frac{-Q + i\sqrt{\Delta}}{2P}\right);$$

wir benennen letzteren jetzt auch wohl als *einen zur Determinante* $-\Delta$ *gehörenden singulären Modul* n^{ter} *Ordnung*. Inzwischen ist, was man namentlich für später festhalten wolle, bei dieser Art der Benennung der singulären Moduln gar nicht ausgeschlossen, dass eine

*) Für die im vorigen Paragraphen unter (5) mit k bezeichnete Zahl finden wir hier $\sqrt{k} = \frac{\varkappa - i\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{n}}$. Dreht also jene elliptische Substitution, wie wir kurz sagen, um den Winkel ϑ, so ist derselbe durch die Gleichungen bestimmt:

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = \frac{\varkappa}{2\sqrt{n}}, \quad \sin\frac{\vartheta}{2} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{n}}.$$

und dieselbe Zahl als singulärer Modul n^{ter} Ordnung ausser zu $-\Delta$ noch zu einer Determinante $-t^2\Delta$ gehört. Solches wird für den Modul (5) eintreten, falls zwei ganze Zahlen t, $\varkappa'$ aus

$$t^2(4n-\varkappa^2)=4n-\varkappa'^2$$

bestimmbar sind. Bei dieser Sachlage müssen wir genauer sagen: *Dem einzelnen (durch Mitangabe des zugehörigen Repräsentanten R_i) wohlcharakterisierten Nullpunkte von $H_n(\omega)$ im Ausgangsdreieck finden wir, sofern derselbe nicht gerade $\omega=i$ oder ϱ ist, eindeutig eine gewisse positive reducierte Form (P, Q, R) einer Determinante $-\Delta=-(4n-\varkappa^2)$ zugeordnet, und es ist zugleich das Vorzeichen der Zahl $\varkappa$ aus den vorliegenden Verhältnissen, nämlich durch R_i, eindeutig bestimmt; die fragliche Nullstelle ist der repräsentierende Punkt von (P, Q, R) und der singuläre Modul der dort stattfindende Wert von J.*

Liegt jetzt zweitens der fragliche Nullpunkt von $H_n(\omega)$ bei $\omega=i$, so können wir an Stelle der in (1) gebrauchten Substitution V ausserdem noch TV gebrauchen. Wir erhalten an Stelle des einzelnen Paars von Gleichungen (1) jetzt die zwei Gleichungssysteme:

$$(6)\qquad \begin{cases} R=\begin{pmatrix} a, & -c\\ c, & a\end{pmatrix}, & c\omega^2+c=0,\\ R'=\begin{pmatrix} c, & a\\ -a, & c\end{pmatrix}, & -a\omega^2-a=0,\end{cases}$$

und demnach die beiden Formen:

$$(7)\qquad \begin{cases}(P,\,0,\,P), & P=c, & \varkappa=2a,\\ (P',\,0,\,P'), & P'=-a=-\frac{\varkappa}{2}, & \varkappa'=2c=2P,\end{cases}$$

wobei wir nur im zweiten Falle P' und $\varkappa'$ zugleich im Zeichen wechseln wollen, falls a und c dasselbe Vorzeichen haben. Sollen die beiden Formen (7) identisch werden, so muss $c=\mp a$ und also $n=2a^2$ sein; aber es unterscheiden sich dann offenbar $\varkappa$ und $\varkappa'$ zufolge der gerade getroffenen Verabredung im Zeichen. Also das Resultat: *Dem einzelnen bei $\omega=i$ gelegenen Nullpunkte von $H_n(\omega)$ sind stets zwei im allgemeinen von einander verschiedene Formen $(P, 0, P)$, $(P', 0, P')$ mit bestimmten zwei zugehörigen Zahlen $\varkappa$, $\varkappa'$ eindeutig zugeordnet; nur falls n das Doppelte eines Quadrates ist, werden für den (eigentliche Transformation zweiter Ordnung darstellenden) Repräsentanten*

$$(8)\qquad R=\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{n}{2}}, & -\sqrt{\frac{n}{2}}\\ \sqrt{\frac{n}{2}}, & \sqrt{\frac{n}{2}}\end{pmatrix}$$

beide Formen identisch, während $\varkappa$, $\varkappa'$ zwei von Null verschiedene entgegengesetzte Zahlen sind.

Soll endlich der von $R(\omega)$ gelieferte Nullpunkt der Function $H_n(\omega)$ nach $\omega = \varrho$ fallen, so gelten für R die Bedingungen:

$$(9) \qquad c = -b = d - a, \quad n = a^2 + ac + c^2,$$

und an Stelle des einen Gleichungspaars (1) treten die drei Paare:

$$(10)\begin{cases} R = \begin{pmatrix} a, & -c \\ c, & a+c \end{pmatrix}, & c\omega^2 + c\omega + c = 0, \\ UR = \begin{pmatrix} a+c, & a \\ -a & c \end{pmatrix}, & -a\omega^2 - a\omega - a = 0, \\ U^2R = \begin{pmatrix} c, & a+c \\ -a-c, & -a \end{pmatrix}, & -(a+c)\omega^2 - (a+c)\omega - (a+c) = 0, \end{cases}$$

während wir als entsprechende Formen und Zahlen $\varkappa$:

$$(11)\begin{cases} (P, P, P), & P = c, & \varkappa = 2a + c, \\ (P', P', P'), & \pm P' = -a, & \pm \varkappa' = a + 2c, \\ (P'', P'', P''), & \pm P'' = -(a+c), & \pm \varkappa'' = -a + c \end{cases}$$

haben; in der zweiten Reihe gelten entweder die obern oder untern Zeichen und ebenso in der dritten Reihe; die Entscheidung hierüber werden wir so treffen, dass P' und P'' positiv werden. Die Discussion, wann zwei oder alle drei Formen (11) identisch werden, ist wieder leicht zu Ende geführt. Soll $P = P'$ sein, so erfordert dies $c = a$, da für $c = -a$ in R eine Transformation *erster* Ordnung vorläge; $a = c$ liefert aber:

$$(12) \quad n = 3a^2, \quad R = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{n}{3}}, & -\sqrt{\frac{n}{3}} \\ \sqrt{\frac{n}{3}}, & \sqrt{\frac{n}{3}} \end{pmatrix}, \quad \varkappa = -\varkappa' = \sqrt{3n},$$

wo nun in R eine eigentliche Transformation *dritter* Ordnung vorliegt. Man zeigt weiter, dass $P = P''$ sowie $P' = P''$ auf die nämliche Transformation zurückführt. Wir haben also zusammenfassend: *Jedem wohlbestimmten, nach $\omega = \varrho$ entfallenden Nullpunkte von $H_n(\omega)$ sind drei gewisse reducierte Formen der Gestalt (P, P, P) nebst eindeutig zugehörigen Zahlen $\varkappa$ zugeordnet. Diese Formen sind im allgemeinen von einander verschieden; nur falls n ein dreifaches Quadrat ist, werden für die eine unter (12) geschriebene Transformation zwei unter den Formen (11) identisch, aber von der dritten verschieden; die zu den gleichen Formen gehörenden Zahlen $\varkappa$ sind $\gtrless 0$ und einander entgegengesetzt.*

Jetzt ist wesentlich, dass wir die hiermit gegebene Entwicklung umkehren können: wir wählen irgend eine ganze Zahl $\varkappa$ aus dem Bereich $-2\sqrt{n} < \varkappa < 2\sqrt{n}$, schreiben $\Delta = 4n - \varkappa^2$ und greifen eine beliebige *reducierte* Form (P, Q, R) der Determinante $-\Delta$ auf. Durch Auflösung der Gleichungen (2) nach a, b, c, d folgt alsdann:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{-Q+\varkappa}{2}, & -R \\ P, & \frac{Q+\varkappa}{2} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

welches eine ganzzahlige Substitution der Determinante n ist. Gehört nun R nicht gerade zum Repräsentanten $\begin{pmatrix} \sqrt{n}, & 0 \\ 0, & \sqrt{n} \end{pmatrix}$, der bei rein quadratischem n doch fortgelassen werden sollte, so giebt (13) eine ganz bestimmte, unter den Factoren von (10) § 4 auftretende Transformation. Indem wir jenen speciellen Fall sogleich noch besonders betrachten wollen, haben wir das Resultat: *Jedes „System“ $(P, Q, R, \varkappa)$ liefert einen Nullpunkt von H_n; zwei verschiedene Systeme liefern im allgemeinen zwei verschiedene Nullpunkte, die aber sehr wohl coincidieren können; nur liefern die Systeme $(P, 0, P, \varkappa)$ zu je zwei, endlich die Systeme $(P, P, P, \varkappa)$ zu je drei denselben Nullpunkt.*

Nennen wir die Anzahl aller reducierten Formen, d. i. die *Classenanzahl* für die negative Determinante $D = -\Delta$ kurz $\mathsf{H}(\Delta)$ und entschliessen uns, diejenigen Classen, welche reducierte Formen der Gestalten $(P, 0, P)$, (P, P, P) haben, $\frac{1}{2}$-fach bez. $\frac{1}{3}$-fach zu rechnen, *so haben wir als Gesamtzahl ν der Nullstellen von $H_n(\omega)$ im Ausgangsdreieck und damit als Grad ν der Gleichung $g_n(J) = 0$ der singulären Moduln n^{ter} Ordnung:*

$$\nu = \sum_{\varkappa = 0, \pm 1, \ldots} \mathsf{H}(4n - \varkappa^2), \quad -2\sqrt{n} < \varkappa < 2\sqrt{n}, \tag{14}$$

die Summe ausgedehnt über alle positiven und negativen ganzen Zahlen $\varkappa$ des bezeichneten Intervalls.

Nun die Ergänzung, welche die Formel (14) im Falle eines rein quadratischen n erfordert: Soll in diesem Falle (13) eine eigentliche Transformation erster Ordnung vorstellen, so müssen offenbar alle vier Zahlen $P, Q, R, \varkappa$ durch $\sqrt{n}$ teilbar sein:

$$P = P'\sqrt{n}, \quad Q = Q'\sqrt{n}, \quad R = R'\sqrt{n}, \quad \varkappa = 0, \pm\sqrt{n}. \tag{15}$$

Für $\varkappa = 0$ ist $\Delta = 4n$ und also (P', Q', R') eine reducierte Form der Determinante -4. Da Q' gerade sein muss, so haben wir nach

I p. 250 (Anmerkung) nur die eine Möglichkeit $Q' = 0$, was $P' = R' = 1$ zur Folge hat. Ist $\varkappa = \pm \sqrt{n}$, so wird (P', Q', R') eine reducierte Form der Determinante -3; als solche findet sich einzig $(1, 1, 1)$. Wollte man also (14) ohne weiteres auf quadratisches n ausdehnen, so wären die drei Systeme

$$(16) \qquad \begin{cases} (\sqrt{n},\ 0,\ \sqrt{n}), & \varkappa = 0, \\ (\sqrt{n},\ \sqrt{n},\ \sqrt{n}), & \varkappa = \pm\sqrt{n}, \end{cases}$$

welche insgesamt den Betrag $\frac{7}{6}$ für die rechte Seite von (14) liefern, zu viel gezählt. Man kann nun Formel (14) einer leichten Modification unterwerfen, durch welche diese Beschränkung ihrer Gültigkeit aufgehoben wird. Wir dehnen nämlich das Intervall für $\varkappa$ auf $-2\sqrt{n} \leq \varkappa < 2\sqrt{n}$ aus (was natürlich nur für quadratische n eine Neuerung ergiebt) und verstehen zugleich unter $\mathsf{H}(0)$ den Bruch $-\frac{1}{12}$. Es entspringt dann als allgemein gültiger Satz: *Der Grad ν der Gleichung $g_n(J) = 0$ ist:*

$$(17) \qquad \nu = \sum_{\varkappa = 0, \pm 1, \ldots} \mathsf{H}(4n - \varkappa^2) - \varepsilon^n, \quad -2\sqrt{n} \leq \varkappa \leq 2\sqrt{n},$$

wobei ε_n für quadratische n die Einheit, sonst immer die Null bedeutet.

§ 6. Functionentheoretische Gradbestimmung der Gleichung $g_n(J) = 0$. Die Classenzahlrelationen erster Stufe.

Wir können nun aber den Grad ν der algebraischen Gleichung $g_n(J) = 0$ noch in einer anderen Art bestimmen, und diese Gradbestimmung wollen wir als eine functionentheoretische bezeichnen, insofern der Überlegung eine functionentheoretische Schlussweise zu Grunde zu legen ist. Jener Grad ν war gleich der Anzahl einfacher Nullpunkte der Modulfunction erster Stufe $H_n(\omega)$ im Ausgangsdreieck. Im letzteren wird aber $H_n(\omega)$ ebenso oft unendlich als Null, und es liegen die Unendlichkeitspunkte, wie wir wissen, insgesamt bei $\omega = i\infty$ vereint. Wir haben also annähernd

$$(1) \qquad \lim_{\omega = i\infty} H_n(\omega) = c \cdot r^{-\nu},$$

wo c eine von Null verschiedene Constante ist. Den hier auftretenden Exponenten $-\nu$ können wir nun aber durch directe Rechnung bestimmen, wie wir jetzt zeigen wollen.

Indem wir die früher (p. 45) für die Repräsentanten R_i zu Grunde gelegte Gestalt gebrauchen, haben wir für $H_n(\omega)$ die Darstellung:

$$(2)\quad H_n(\omega) = \prod{}' \left\{J(\omega) - J\left(\frac{A\omega + B}{D}\right)\right\},\ AD = n,\ 0 \leqq B < D.$$

Die Zahlen A, B, D haben hier alle $\Phi(n)$ den angegebenen Bedingungen genügenden Systeme zu durchlaufen mit der bereits in (2) angedeuteten Ausnahme, dass für rein quadratisches n das System $A = D = \sqrt{n}$, $B = 0$ fortbleiben soll. Für den einzelnen Factor der rechten Seite von (2) gilt bei $\omega = i\infty$ die angenäherte Darstellung:

$$(3)\quad 12^3 \left\{J(\omega) - J\left(\frac{A\omega + B}{D}\right)\right\} = r^{-1} + \cdots - e^{-\frac{2\pi i B}{D}} \cdot r^{-\frac{A}{D}} \cdots.$$

Derselbe wird also im Ausgangsdreieck bei $\omega = i\infty$ *einfach* unendlich, so oft $A \leqq D$ ist (denn im Falle der Gleichheit $A = D = \sqrt{n}$ ist ja $e^{-\frac{2\pi i B}{D}}$ stets von 1 verschieden); für $A > D$ wird dagegen der Factor (3) an bezeichneter Stelle unendlich im Grade $\frac{A}{D}$. Für stehendes A, D haben wir, den D zugehörigen Werten B entsprechend, jedesmal D Factoren (3) zu berücksichtigen, von denen nur im Falle $A = D = \sqrt{n}$ ein einzelner auszulassen ist.

Aus diesen Angaben lässt sich ν jetzt in der That leicht berechnen. Um eine bequeme Ausdrucksweise zu haben, verstehen wir unter δ einen beliebigen Teiler von n, und zwar zunächst $\delta \leqq \sqrt{n}$; man setze dann $A = \delta$, $D = \frac{n}{\delta}$. Die auf diese Combination bezüglichen Factoren (3) werden insgesamt im Grade $D = \frac{n}{\delta}$ unendlich, bez. im Grade $\left(\frac{n}{\delta} - 1\right)$ für $\delta = \sqrt{n}$. Im ganzen werden also die Factoren (2) mit $A \leqq D$ unendlich im Grade:

$$-\varepsilon_n + \sum_{\delta \leqq \sqrt{n}} \frac{n}{\delta},$$

wo die Summe über alle der angegebenen Bedingung genügenden Divisoren δ von n zu führen ist und ε_n genau die nämliche Bedeutung hat wie am Schluss des vorigen Paragraphen. Ist zweitens $\delta > \sqrt{n}$, so schreibe man wieder $A = \delta$, $D = \frac{n}{\delta}$; da jetzt jeder Factor (3) im Grade $\frac{A}{D}$ unendlich wird, so kommt den Factoren der einzelnen Combination A, D insgesamt der Grad δ zu. *Mithin gestattet die gesuchte Zahl ν die Darstellung:*

$$(4)\qquad \nu = \sum_{\delta \leqq \sqrt{n}} \left(\frac{n}{\delta}\right) + \sum_{\delta < \sqrt{n}} \delta - \varepsilon_n.$$

Mit der rechten Seite von (4) nehmen wir nun noch eine kleine Modification vor. Selbstverständlich ist:

$$\sum_{\delta > \sqrt{n}} \frac{n}{\delta} = \sum_{\delta < \sqrt{n}} \delta, \tag{5}$$

und andererseits:

$$\sum_{\delta \leq \sqrt{n}} \frac{n}{\delta} + \sum_{\delta > \sqrt{n}} \frac{n}{\delta} = \sum \delta = \Phi(n), \tag{6}$$

wo unter $\Phi(n)$, wie bisher, die Summe aller Teiler der Zahl n verstanden ist. Die Formel (4) können wir also in die neuen Gestalten setzen:

$$\nu = \sum_{\delta \leq \sqrt{n}} \frac{n}{\delta} + \sum_{\delta > \sqrt{n}} \frac{n}{\delta} + \sum_{\delta > \sqrt{n}} \delta - \sum_{\delta < \sqrt{n}} \delta - \varepsilon_n,$$

$$\nu = \Phi(n) + \left(\sum_{\delta > \sqrt{n}} \delta - \sum_{\delta < \sqrt{n}} \delta \right) - \varepsilon_n .$$

Die in der Klammer eingeschlossene Zahl bedeutet den Überschuss der Summe derjenigen Divisoren von n, die $> \sqrt{n}$ sind, über die Summe aller derjenigen, die $< \sqrt{n}$ sind; wir bezeichnen diesen Überschuss hinfort durch das Symbol $\Psi(n)$:

$$\Psi(n) = \sum_{\delta > \sqrt{n}} \delta - \sum_{\delta < \sqrt{n}} \delta. \tag{7}$$

Als Grad ν der Gleichung $g_n(J) = 0$ finden wir so endlich:

$$\nu = \Phi(n) + \Psi(n) - \varepsilon_n . \tag{8}$$

Die ganze Zahl ν erscheint in dieser Formel aus wesentlich anderen Elementen zusammengesetzt als am Schlusse des vorigen Paragraphen; dort war ν eine Summe von Classenzahlen quadratischer Formen, hier ist ν durch Teilersummen dargestellt. Daher bietet sich jetzt der Gedanke dar, *durch Elimination von ν aus beiden Formeln eine Zahlenrelation herstellen, welche die Classenzahlen an die Teilersummen knüpft.* Die entspringende Gleichung lautet:

$$\sum_{x = 0, \pm 1, \ldots} \mathrm{H}(4n - x^2) = \Phi(n) + \Psi(n), \quad -2\sqrt{n} \leq x \leq 2\sqrt{n}; \tag{9}$$

wir bezeichnen sie als *Classenzahlrelation erster Stufe n^{ter} Ordnung.* Mit ihr haben wir eines derjenigen Resultate gewonnen, welche Herr Kronecker, wie wir andeuteten, durch Betrachtung der Jacobi'schen Modulargleichungen abgeleitet hat. Das Ausführlichere hierüber werden wir erst im folgenden Kapitel auseinandersetzen, wo allgemein von Classenzahlrelationen höherer Stufe die Rede sein soll.

§. 7. Die bei eigentlicher Transformation n^{ter} Ordnung auftretenden singulären Moduln. Betrachtung derselben im Transformationspolygon $F_{\psi(n)}$.

Wir kehren zur eigentlichen Transformation n^{ter} Ordnung und damit zur Gleichung $f_n(J, J) = 0$ zurück, deren Wurzeln die eigentlich zur n^{ten} Ordnung gehörenden singulären Moduln sind. Für das Studium derselben können wir gerade wie oben bei der Smith'schen Curve mit besonderem Vorteil das Transformationspolygon n^{ter} Ordnung verwenden. Ehe wir indessen hierauf eingehen, sind ein paar Vorfragen zu entscheiden.

Fürs erste werden wir die Frage zu untersuchen haben, welche unter den gesamten soeben bei der n^{ten} Ordnung betrachteten singulären Moduln dieser Ordnung im genaueren Sinne „eigentlich" zuzurechnen sind. Die Formeln des vorletzten Paragraphen geben uns darüber leicht Aufschluss. Ist für ein einzelnes System $(P, Q, R, \varkappa)$ der grösste gemeinsame Teiler der vier Zahlen $P, Q, R, \varkappa$ durch σ_0 bezeichnet, so wird σ_0 zufolge (13) p. 181 die vier Zahlen $2a, 2d, b, c$ zugleich teilen. Wir haben demnach nur die beiden Möglichkeiten $\sigma_0 = 1$, $\sigma_0 = 2$. Da im Falle $\sigma_0 = 2$ sowohl Q und $\varkappa$, wie andrerseits b und c gerade sind, so sind notwendig a und d ungerade Zahlen, und eben deshalb dürfen Q und $\varkappa$ nicht modulo 4 einander congruent sein. Weitere Bedingungen sind aber nicht zu erfüllen, und also haben wir die Regel: *Unter allen im vorletzten Paragraphen angegebenen Systemen $(P, Q, R, \varkappa)$ haben wir, sofern wir uns auf eigentliche Transformation beschränken wollen, nur diejenigen mit $\sigma_0 = 1$ und $\sigma_0 = 2$ heranzuziehen, dabei aber unter denen mit $\sigma_0 = 2$ nur solche, für welche $Q \equiv \varkappa + 2$, (mod. 4) ist.*

Eine zweite Untersuchung beantwortet die Frage nach der Multiplicität der einzelnen Wurzeln von $f_n(J, J) = 0$. Hierbei wolle man bedenken, dass zwei Systeme $(P, Q, R, \varkappa)$ und $(P, Q, R, -\varkappa)$ mit nicht verschwindenden $\varkappa$ zwei mit einander coincidierende Nullpunkte von $H_n(\omega)$ liefern, und dass die beiden zugehörigen Repräsentanten gleichen Teiler τ haben. Solche zwei Systeme liefern also, wofern sie überhaupt für $f_n(J, J) = 0$ in Betracht kommen, stets eine Doppelwurzel dieser Gleichung. Indessen sind hierbei die beiden Repräsentanten (8) und (12) § 5 auszuschliessen, bei denen der Zeichenwechsel von $\varkappa$ allein nicht immer auf einen neuen Nullpunkt von H_n führte. Sollen aber diese Repräsentanten „eigentliche" Transformationen n^{ter} Ordnung vorstellen, so ist offenbar $n = 2$ bez. $n = 3$. Diese Fälle aber können wir leicht direct erledigen und schliessen sie

als particulär von gegenwärtiger allgemeiner Besprechung aus. Einfache Wurzeln werden wir demnach nur von den Systemen mit $\varkappa = 0$ erhalten können, und da in diesem Falle die vorhin mit σ_0 bezeichnete Zahl direct den Teiler σ der Form (P, Q, R) darstellt, so entspringt der Satz: *Die einfachen Wurzeln von $f_n(J, J) = 0$ können höchstens von den ursprünglichen Formen der Determinante $-\Delta = -4n$ und von den Formen des Teilers 2 dieser Determinante geliefert werden.*

Aber die letzteren Formen geben, durch 2 gehoben, ursprüngliche Formen der Determinante $-n$. Sie werden also im weiteren Verfolg der Zahlen $\Delta = 4n-1, = 4n-4, \ldots$ (vom Factor 2 abgesehen) dann nochmals auftreten, wenn $n = 4n - \varkappa^2$ durch *ganze* Zahlen $\varkappa$ gelöst werden kann. Dies ist der Fall, wenn n ein dreifaches Quadrat ist, und wir haben dann $\varkappa = \pm \sqrt{3n}$. Sollen aber überhaupt Formen vom Teiler 2 bei $\Delta = 4n$ für $f_n(J, J) = 0$ zur Geltung kommen, so muss, wie wir sahen, Q bei denselben das Doppelte einer ungeraden Zahl sein. Es ist also:

$$\Delta = 4n = 4PR - Q^2 \equiv -4, \text{ (mod. 16) d. i. } n \equiv -1, \text{ (mod. 4)}$$

überhaupt eine notwendige Bedingung für das Auftreten der in Rede stehenden Formen des Teilers $\sigma = 2$. Zusammenfassend wollen wir diese Resultate so aussprechen: *Die einfachen Wurzeln von $f_n(J, J) = 0$ werden im allgemeinen nur von den ursprünglichen Formen der Determinante $-4n$ geliefert. Für $n \equiv -1$ (mod. 4) liefern auch noch die ursprünglichen Formen der Determinante $-n$ einfache Wurzeln; ist jedoch n das Dreifache eines reinen Quadrats, so sind die zu diesen letzteren Formen gehörenden singulären Moduln dreifache Wurzeln der Gleichung $f_n(J, J) = 0$.*

Indem wir jetzt die voraufgehenden arithmetischen Entwicklungen mit unseren anschaulichen Hülfsmitteln in Beziehung setzen, verweilen wir zuvörderst einen Augenblick bei der in der J-Ebene gelegenen Smith'schen Curve $h_n(X, Y) = 0$, bez. bei der mit jener collinearen Modularcurve $f_n(J', J) = 0$*). Wir recapitulieren hier den Satz: *Die zu den ambigen Classen gehörenden singulären Moduln J, und nur diese, haben reelle Werte; die im Bereiche eigentlicher Transformation n^{ter} Ordnung eintretenden singulären J dieser Art werden von den reellen Zügen der Curve $h_n = 0$ ausgeschnitten.* Hierbei ist das Auftreten von Doppelwurzeln der Gleichung $h_n(X, 0) = 0$, d. i. $f_n(J, J) = 0$ aus der Gestalt der Curve $h_n = 0$ sofort verständlich. In der That

*) [Der Abschluss dieses Paragraphen bringt eine neuere Untersuchung des Herausgebers.]

wurde letztere ja von der reellen J-Axe im allgemeinen in Doppelpunkten geschnitten, und nur da in einfachen, wo die Curve gegen die reelle Axe orthogonal verlief; diese letzteren Punkte liefern uns offenbar die ambigen Classen vom Teiler $\sigma = 1$ bez. 2 und der Determinante $D = -4n$.

Der Übergang zum Transformationspolygon $F_{\psi(n)}$ findet hier durch genau dieselbe Überlegung statt, wie vorhin in § 3 bei den Formen positiver Determinante. Statt nämlich im Ausgangsdreieck nach einander alle $\psi(n)$ Repräsentanten J' in Bezug auf ihr Identischwerden mit J zu untersuchen, betrachten wir einzig den Repräsentanten $J'(\omega) = J(n\omega)$, diesen aber im gesamten Transformationspolygon F_ψ. Ist an einer Stelle von F_ψ die Differenz $(J(\omega) - Jn(\omega))$ Null, so verschwindet sie „im Polygon F_ψ gemessen" dortselbst gerade einfach; denn wäre der fragliche Nullpunkt eine mit $\omega = i$ äquivalente Ecke, so wäre doch ersichtlich die betreffende Stelle der geschlossenen Fläche F_ψ nur von *zwei* Elementardreiecken umlagert. *Die Nullstellen von $f_n(J, J')$ haben sich solcherweise im Polygon F_ψ oder auf der Fläche F_ψ dermassen verteilt, dass dortselbst keine zwei einfachen Nullstellen mehr zur Coincidenz kommen.*

Dieses Resultat ist für die ambigen Classen in Übereinstimmung mit unseren früheren Sätzen über die auf F_ψ übertragene Smith'sche Curve; die reellen Züge derselben wiesen in der That auf F_ψ keine Doppelpunkte mehr auf (cf. p. 172). Überhaupt aber werden wir die ambigen Classen jetzt aus den doppelt eingeteilten Polygonen F_ψ des § 3 für jedes n sofort ablesen; ihre singulären ω sind ja offenbar die Kreuzpunkte, in welchen die Halbkreise der Formen positiver Determinante n die Kreisbogen der beiderlei Einteilungen von F_ψ durchsetzen.

Die zu nicht-ambigen Classen gehörenden singulären ω kommen im doppelt-geteilten Polygon F_ψ nicht mit derselben Leichtigkeit zur Evidenz. Solche Punkte werden im Innern freier oder doppeltschraffierter Bereiche liegen und müssen natürlich immer zu vieren aus einander vermöge der Substitutionen $1, A, W, AW$ hervorgehen. Um aber diese Stellen unmittelbar aus den Figuren abzulesen, muss man sich in etwas ausgiebigerer Weise die Werteverteilung von J und J' auf F_ψ veranschaulichen, was wir hier indessen nicht ausführen können.

Jetzt sei $z(\omega)$ eine ganz beliebige zur $\Gamma_{\psi(n)}$ gehörende Modulfunction, die jedoch nicht bei Ausübung der Substitution W in sich übergehen soll. Dieselbe wird rational, und zwar unsymmetrisch, durch J', J darstellbar sein:

$$(1)\qquad z = R(J', J) = \frac{G_1(J', J)}{G_2(J', J)},$$

wobei wir rechts die rationale Function R in zwei durch einander dividierte ganze Functionen gespalten denken. Nach bekannten Grundsätzen der Theorie der algebraischen Functionen verschwinden in allen mehrfachen Punkten der Modularcurve $f(J', J) = 0$ die beiden ganzen Functionen G_1, G_2 zugleich. Wir können die G_1, G_2 aber immer so gewählt denken, dass sie in einer gewissen endlichen Reihe *einfacher* Punkte der Curve $f(J', J) = 0$ nicht zugleich verschwinden. Man richte es hiernach insbesondere so ein, dass gleichzeitiges Verschwinden von G_1 und G_2 jedenfalls nicht in jenen Punkten der Modularcurve oder des auf dieselbe eindeutig bezogenen Polygons F_ψ eintritt, die von den oben charakterisierten einfachen Nullpunkten von $f(J, J) = 0$ herrühren. Indem wir gleich noch aus (1):

$$(2)\qquad z'(\omega) = z\left(\frac{-1}{n\omega}\right) = R(J, J')$$

ableiten, ziehen wir die im Polygon F_ψ verteilten, zur n^{ten} Ordnung gehörenden singulären ω heran. In allen solchen ω, deren zugehörige J mehrfache Wurzeln von $f(J, J) = 0$ sind, muss $R(J', J)$ unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen, so dass wir über die zugehörigen Werte z, z' aus (1) und (2) noch nichts weiter aussagen können. In allen solchen ω, deren singuläre Moduln J *einfache* Wurzeln von $f(J, J) = 0$ sind, haben zufolge (1) und (2) die beiden Modulfunctionen $z(\omega)$ und $z'(\omega)$ einen und denselben Wert, und zwar ganz unabhängig davon, wie wir $z(\omega)$ gewählt denken mögen. Ist ω_0 ein specieller unter diesen letzteren Punkten, und sind ω_0 und $W(\omega_0)$ auf der geschlossenen F_ψ *verschiedene* Stellen, so können wir doch offenbar $z(\omega)$ derart gewählt denken, dass diese Function in den fraglichen beiden Stellen verschiedene Werte aufweist. Das widerspricht aber direct unserem soeben erhaltenen Resultat, dass stets $z'(\omega_0) = z(W(\omega_0)) = z(\omega_0)$ sein soll, und also folgt der Satz: *Diejenigen singulären ω_0, welche zu den einfachen Wurzeln von $f(J, J) = 0$ gehören, sind, auf die geschlossene Fläche F_ψ in beschriebener Weise übertragen, dortselbst Fixpunkte für die durch W dargestellte Transformation der Fläche F_ψ in sich.*

Diese Überlegung lässt sich nun auch leicht umkehren. Ist ω_0 einer jener Fixpunkte, so ist $W(\omega_0)$ bezüglich Γ_ψ mit ω_0 äquivalent:

$$-\frac{1}{n\omega_0} = \frac{\alpha\omega_0 + \beta}{n\gamma_0\omega_0 + \delta}.$$

Der Zahlwert ω_0 berechnet sich also aus der Gleichung:

$$n\alpha \cdot \omega_0^2 + n(\beta + \gamma_0) \cdot \omega_0 + \delta = 0,$$

und die zugehörigen Werte von Δ und $\varkappa$ sind:

$$\Delta = 4n - n^2(\beta - \gamma_0)^2, \quad \varkappa = \pm n(\beta - \gamma_0).$$

Schliessen wir wieder die particulären Fälle $n = 2, 3$ aus, so folgt aus der Bedingung $-2\sqrt{n} < \varkappa < 2\sqrt{n}$ notwendig $\beta = \gamma_0$ und also $\Delta = 4n$. Damit ist der Satz bewiesen: *Ist* $n \equiv 0, 1, 2$ (mod. 4), (*mit Ausnahme der particulären Fälle* $n = 1, 2$), *so ist die Classenanzahl der ursprünglichen Formen der Determinante* $D = -4n$ *gleich der Anzahl der Fixpunkte, welche die Transformation* W *der Fläche* F_ψ *in sich aufweist. Ist* $n \equiv 3$, (mod. 4), *wo wir jedoch der Kürze halber vom Falle absehen, dass* n *ein dreifaches Quadrat ist, so ist die Anzahl jener Fixpunkte identisch mit der Classenanzahl ursprünglicher Formen der Determinante* $D = -4n$, *vermehrt um die Classenanzahl ursprünglicher Formen der Determinante* $D = -n$. Dieser Satz schliesst sich augenscheinlich aufs directeste dem p. 171 für die positive Determinante $D = n$ gewonnenen Ergebnis an*).

Die Anzahl der zu W gehörenden Fixpunkte auf F_ψ ist übrigens in niederen Fällen ohne weiteres angebbar. So oft das Geschlecht unserer Fläche $p = 0$ ist, haben wir *zwei* Fixpunkte; hierher gehörige Anwendungen unseres Satzes haben wir für

$$(3) \qquad n = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 16, 18, 25.$$

In den Fällen $p = 1$ haben wir stets *vier* Fixpunkte**); hierher gehören:

$$(4) \qquad n = 11, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 24, 32, 36, 49.$$

Übrigens mögen wir zum Schlusse noch betonen, dass wir für die praktische Berechnung der in Rede stehenden singulären Moduln natürlich stets auf eine möglichst einfache Function der $\Gamma_{\psi(n)}$ zurückgreifen. Nennen wir dieselbe gleich wieder $z(\omega)$, so ist

*) Indem solcherweise zwei unter den Transformationen W, A, WA der Fläche F_ψ in sich eine interessante zahlentheoretische Bedeutung gewonnen haben, könnte man sich nun auch versucht fühlen, für die symmetrische Umformung A der F_ψ in sich entsprechende Überlegungen durchzuführen. Die festbleibenden Elemente dieser letzteren Transformation lassen sich durch eine naheliegende geometrische Interpretation mit den reellen Zügen der Modularcurve $f(J', J) = 0$ in Beziehung setzen; inzwischen müssen wir unterlassen, auf die arithmetische Bedeutung der hiermit gemeinten Betrachtungen näher einzugehen.

**) Man stellt nämlich W unter Gebrauch des zugehörigen Integrals erster Gattung bei zweckmässiger Wahl desselben in der transcendenten Gestalt $u' = -u$ dar, so dass als Fixpunkte im Parallelogramm der Perioden die vier: $u = 0, \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ auftreten.

$$(5)\qquad J = R'(z', z) = \frac{G_1'(z', z)}{G_2'(z', z)}, \quad J' = R'(z, z') = \frac{G_1'(z, z')}{G_2'(z, z')},$$

und es liefert die Lösung der Gleichungen

$$(6)\qquad G_1'(z', z)G_2'(z, z') - G_1'(z, z')G_2'(z', z) = 0,$$

$$(7)\qquad f'(z', z) = 0,$$

von welchen die letztere die zwischen z' und z bestehende algebraische Relation ist, jedenfalls alle gewünschten Wertsysteme z', z. Dabei werden freilich im allgemeinen auch noch weitere, unserem Probleme fremde Lösungen z', z auftreten; jedoch ist in diesem Betracht das Nähere jeweils durch eine besondere Untersuchung festzustellen.

§ 8. Geschichtliches über die Gleichung der eigentlich zur Determinante $-\Delta$ gehörenden singulären Moduln. Die complexe Multiplication der elliptischen Functionen.

Bevor wir die Entwicklungen der voraufgehenden Paragraphen durch Beispiele illustrieren, möge an dieser Stelle noch ein kurzer Bericht erstattet werden über eine Reihe weiterer Fragen und Untersuchungen, die sich auf die singulären Moduln beziehen. Wir knüpfen etwa daran, dass für $n \equiv 0, 1, 2 \pmod{4}$ die einfachen Wurzeln von $f_n(J, J') = 0$ von den ursprünglichen Formen der Determinante $D = -\Delta = -4n$ geliefert werden, deren Classenanzahl wir durch $h(\Delta)$ bezeichnen mögen. Ist aber (P, Q, R) eine *ursprüngliche* Form einer beliebigen negativen Determinante $-\Delta$, so wollen wir den zugehörigen singulären Modul $J\left(\frac{-Q + i\sqrt{\Delta}}{2P}\right)$ als *„eigentlich" zur Determinante $-\Delta$ gehörig* benennen. Haben wir also eine Determinante $-\Delta$, welche einer der Bedingungen $\Delta \equiv 0, 4, 8 \pmod{16}$ genügt, so werden wir zufolge der gerade vorausgeschickten Bemerkung aus $f_{\frac{\Delta}{4}}(J, J)$ nach bekannten Regeln das Product der *einfachen* Linearfactoren absondern. Es wird eine ganze rationale Function $g_\Delta(J)$ vom Grade $h(\Delta)$ entspringen, die gleich Null gesetzt gerade die $h(\Delta)$ eigentlich zur Determinante Δ gehörenden singulären Moduln zu Wurzeln hat. Die Zahl Δ ist nun weiter infolge ihrer Gestalt $(4PR - Q^2)$ entweder durch 4 teilbar oder $\equiv 1, \pmod{4}$. In allen diesen Fällen mögen wir $g_\Delta(J)$ in derselben Bedeutung brauchen, wie soeben in den Fällen $\Delta \equiv 0, 4, 8, \pmod{16}$, *dass nämlich die Gleichung $g_\Delta = 0$ die eigentlich zur Determinante $-\Delta$ gehörenden singulären Moduln liefert.* Für die Gewinnung von $g_\Delta(J)$ in den noch nicht erledigten Fällen gelten alsdann folgende Regeln:

Im Falle $\Delta \equiv 12$, (mod. 16) liefert die Absonderung der einfachen Linearfactoren aus $f_{\frac{\Delta}{4}}(J, J)$ zunächst $g'_{\Delta}(J) \cdot g'_{\frac{\Delta}{4}}(J)$; aber die Function $f_{\frac{\Delta+4}{16}}(J, J)$ enthält offenbar $g'_{\frac{\Delta}{4}}(J)$ und ist teilerfremd gegen $g'_{\Delta}(J)$. Durch Abscheidung des gemeinsamen Bestandteils aus jenen beiden Functionen erhalten wir also $g'_{\Delta}(J)$ und $g'_{\frac{\Delta}{4}}(J)$ jedes für sich. — Ist $\Delta \equiv -1$ (mod. 4), so brauchen wir nur in den letzten Zeilen für das dort gemeinte Δ jetzt $\Delta' = 4\Delta$ einzusetzen, und finden in jenem $g'_{\frac{\Delta'}{4}}$ das jetzt gesuchte $g'_{\Delta}(J)$. — Eine Ausnahme dieser letzten Regeln findet nur statt, sobald Δ das Dreifache eines reinen Quadrats ist: Da ist erstlich für $\Delta \equiv 12$, (mod. 16) $g'_{\Delta}(J)$ direct das Product der einfachen Linearfactoren von $f_{\frac{\Delta}{4}}(J, J)$; ist aber $\Delta \equiv -1$, (mod. 4), so ist offenbar $g'_{\Delta}(J)$ das Product der *dreifach* in $f_{\Delta}(J, J)$ enthaltenen Linearfactoren. —

Fassen wir zusammen, so sind es in allen Fällen *rationale* Rechnungen gewesen, welche zur Kenntnis von $g'_{\Delta}(J)$ führen, und also schliessen wir: *Die Gleichung* $g'_{\Delta}(J) = 0$ *des Grades* $\eta(\Delta)$ *weist durchgehends rationale numerische Coefficienten auf.*

Die hiermit begründete Anordnung der singulären Moduln nach den Zahlen Δ ist wohl die am meisten naturgemässe; und es ist darum auch die Gleichung $g'_{\Delta}(J) = 0$ (bez. die entsprechend für den Jacobischen Integralmodul k^2 gebildete Gleichung), welche das Interesse der Mathematiker seit lange im hohen Grade in Anspruch genommen hat. Um dies im vollen Umfange würdigen zu können, wollen wir noch kurz historisch skizzieren, in welch' interessanter Beziehung einerseits die singulären Moduln zur *Multiplication der doppeltperiodischen Functionen*, andrerseits aber im speciellen die Gleichung $g'_{\Delta}(J) = 0$ zur *Composition der quadratischen Formen* steht.

Ist n eine rationale ganze Zahl, so besitzt $\wp(nu|\omega_1, \omega_2)$ als Function von u jedenfalls die Perioden ω_1, ω_2 und stellt sich deshalb als rationale Function von $\wp(u|\omega_1, \omega_2)$ und $\wp'(u|\omega_1, \omega_2)$ dar. Man nennt den Übergang von $\wp(u)$ zu $\wp(nu)$ *Multiplication* von $\wp(u)$ und bezeichnet n als den zugehörigen Multiplicator. Daran schliesst sich die Frage: Giebt es ausser den ganzen rationalen Zahlen n vielleicht noch weitere Zahlen μ, die gleichfalls in dem Sinne als Multiplicatoren fungieren können, dass $\wp(\mu u)$ eine rationale Function von $\wp(u)$ und und $\wp'(u)$ ist? Offenbar wird dies stets und nur dann der Fall sein, wenn sowohl $\mu\omega_1$ wie $\mu\omega_2$ eine ganzzahlige Verbindung von ω_1, ω_2 darstellt:

$$\mu\omega_1 = a\omega_1 + b\omega_2, \quad \mu\omega_2 = c\omega_1 + d\omega_2; \tag{1}$$

diese Gleichungen haben wir also zu discutieren, und zwar unter der Voraussetzung, dass a, b, c, d in denselben ganze rationale Zahlen sind. Schreiben wir (1) in der Form

$$\begin{cases}(a-\mu)\omega_1 + b\omega_2 = 0, \\ c\omega_1 + (d-\mu)\omega_2 = 0,\end{cases} \tag{2}$$

so ist zunächst evident, dass bei *beliebig* veränderlichen ω_1, ω_2 notwendig $b = c = 0$, $a = d = \mu$ sein muss; hier also werden wir zum elementaren, soeben erledigten Fall $\mu = n$ zurückgeführt. Dies schliesst aber nicht aus, dass für specificierte ω auch noch andere Lösungen von (2) eintreten können. Man mag geradezu die vier ganzen Zahlen a, b, c, d willkürlich auswählen (wo sie dann eine Determinante $(ad - bc)$ bilden, die wir gleich wieder n nennen wollen) und es wird immer möglich sein, zwei specielle μ nebst zugehörigen $\omega_1 : \omega_2$ anzugeben, welche (2) befriedigen. Wir haben offenbar μ aus

$$\begin{vmatrix} a-\mu, & b \\ c\quad, & d-\mu \end{vmatrix} = 0, \quad \mu^2 - \mu(a+d) + n = 0 \tag{3}$$

zu berechnen und finden dementsprechend unter Aufnahme unserer bisherigen Bezeichnungen $a + d = \varkappa$, $\Delta = 4n - \varkappa^2$ u. s. w. für μ die Werte:

$$\mu = \frac{\varkappa \pm i\sqrt{\Delta}}{2}, \tag{4}$$

während sich für den zugehörigen Periodenquotienten:

$$\omega = \frac{a - d \pm i\sqrt{\Delta}}{2c} = \frac{-Q \pm i\sqrt{\Delta}}{2P} \tag{5}$$

ergiebt. Damit ω in der positiven Halbebene liegt, müssen wir (c als positiv vorausgesetzt) $\sqrt{\Delta}$ positiv nehmen:

$$\mu = \frac{\varkappa + i\sqrt{\Delta}}{2}, \quad \omega = \frac{-Q + i\sqrt{\Delta}}{2P}; \tag{6}$$

vor allem aber sieht man, dass n eine positive Zahl sein muss, während für $\varkappa$ die Bedingung $-2\sqrt{n} < \varkappa < 2\sqrt{n}$ gültig ist. Hiermit ist voller Anschluss an die voraufgehenden Entwicklungen erreicht, und wir formulieren den Satz: *Neben der gewöhnlichen Multiplication der doppeltperiodischen Functionen giebt es noch eine sogenannte complexe Multiplication derselben, deren Multiplicatoren μ complexe Zahlen der Gestalt* (6) *sind; aber die Multiplication vermöge des einzelnen solchen μ tritt nicht für jeden beliebigen Wert der absoluten Invariante J ein, sie findet vielmehr einzig für die dem gerade vorliegenden μ zugehörigen singulären Moduln $J\left(\frac{-Q + i\sqrt{\Delta}}{2P}\right)$ statt.*

Die Existenz der complexen Multiplication ist von Abel entdeckt*), und was besonders bewunderungswürdig ist, Abel spricht in der genannten Abhandlung (l. c. p. 426) auch bereits die wichtigste arithmetische Eigenschaft der singulären Moduln aus, *nämlich dass ihre Zahlwerte durch Wurzelziehungen aus rationalen Zahlen berechnet werden können*. Nach Abel's Entdeckung haben Jacobi, Hermite, Eisenstein u. a. wiederholt das Problem der complexen Multiplication und der zugehörigen singulären Moduln berührt, inzwischen ist erst durch Hrn. Kronecker eine vollständige Theorie dieser Moduln durchgebildet worden. Die Resultate Kronecker's sind in einer längeren Reihe kleinerer Aufsätze in den Monatsberichten der Berliner Akademie (seit 1857) veröffentlicht worden. Da es sich hier aber mehr um kurze Mitteilungen als um ausführliche Darlegung der Theorie handelt, so machte sich das Bedürfnis nach einer solchen wiederholt geltend; überdies kam noch hinzu, dass sich auch Kronecker's Untersuchungen auf den Modul k^2 allein bezogen, so dass eine Umarbeitung derselben unter Zugrundelegung der absoluten rationalen Invariante J an Stelle des k^2 wünschenswert erschien. Diesen Bedürfnissen sind neuerdings etwa zu gleicher Zeit die auf den in Rede stehenden Gegenstand bezüglichen Arbeiten der Herren Pick**) und Weber***) gerecht geworden, etwas später auch die hierher gehörige Abhandlung von Hrn. Sylow†).

Trotzdem die in Rede stehenden Gegenstände zu den schönsten gehören, zu denen die Wechselbeziehung zwischen Modulfunctionen und Zahlentheorie bisher geführt hat, ist es doch ganz ausgeschlossen, dass wir dieselben hier in erschöpfender Weise behandeln; wir würden sonst zu weit auf rein zahlentheoretische Betrachtungen eingehen müssen. Übrigens liegt hierzu heutzutage auch um so weniger äusserer Anlass vor, als Hr. Weber in seinem wiederholt genannten Werke über *„Elliptische Functionen und algebraische Zahlen“* unter Heranziehung ausgedehnter Entwicklungen über Arithmetik und Algebra die fragliche Seite unseres Problems allgemein zugänglich dargestellt

---

*) Man vgl. die *„Recherches sur les fonctions elliptiques“* (§ 10), Crelle's Journal Bd. 2 und 3 (1827, 28) oder auch neue Auflage der *„Gesammelten Werke“* (Christiania 1881) p. 377.

**) *„Über die complexe Multiplication der elliptischen Functionen“*, Math. Ann. Bd. 25 (1885), sowie ebenda Bd. 26 (1886).

***) *„Zur Theorie der elliptischen Functionen“*, Acta Math. Bd. 6 (1885) und Bd. 11 (1888).

†) *„Sur la multiplication complexe des fonctions elliptiques“*, Liouville's Journal, 4te Reihe Bd. 3 (1887); in den Untersuchungen Sylow's ist indessen wieder einzig der Modul k^2 zu Grunde gelegt.

hat*). Mag es also hinreichen, wenn wir auf einige Hauptresultate aufmerksam machen:

Die $\eta(\Delta)$ eigentlich zur Determinante $-\Delta$ gehörenden singulären Moduln waren die Wurzeln einer algebraischen Gleichung $g'_\Delta(J) = 0$ des Grades $\eta(\Delta)$, deren Coefficienten durchgehends rationale Zahlen sind. *Diese Gleichung ist im Rationalitätsbereich der rationalen Zahlen irreducibel und bleibt irreducibel, wenn wir die Quadratwurzel aus der zugehörigen Determinante $\sqrt{-\Delta}$ als bekannt ansehen.* Indem wir aber diese Quadratwurzel adjungieren, bekommt die Gleichung $g'_\Delta(J) = 0$ eine Galois'sche Gruppe, die in wesentlich anderer Gestalt in der Zahlentheorie seit lange bekannt ist. Wir müssen, um dies deutlich zu machen, etwas weiter ausholen.

In der von Gauss begründeten *Composition der quadratischen Formen* wird vermöge eines einfachen Algorithmus aus zwei vorgelegten binären quadratischen Formen eine dritte durch „Composition jener beiden" erzeugt**). Nach den Grundsätzen dieser Operation entspringt aus der Composition zweier ursprünglichen Formen (P, Q, R), (P', Q', R') der Determinante $-\Delta$ wiederum eine ursprüngliche Form eben dieser Determinante, und (was besonders wichtig ist) sofern wir zwei *beliebige* Formen aus *bestimmten* zwei Classen componieren, erhalten wir stets eine Form aus einer *bestimmten* dritten Classe. Man kann demnach von der Composition der $\eta(\Delta)$ Classen reden; irgend zwei unter ihnen werden jedesmal durch Composition eine bestimmte dritte erzeugen,

---

*) Übrigens beziehen sich die Untersuchungen des Hrn. Weber l. c. keineswegs gleichmässig auf die erste Stufe, wo sich ihm bei der Berechnung der singulären Moduln J alsbald erhebliche Schwierigkeiten entgegenstellten. Das zur Überwindung derselben herangeholte Hülfsmittel ist aber nicht das oben von uns befürwortete (dass man nämlich an Stelle des Modulsystems J, J' des Polygons F_ψ das denkbar einfachste System desselben stellt); vielmehr berechnet Hr. Weber vielfach die singulären Werte der Wurzeln aus k, k', insbesondere aber des Moduls $\sqrt[12]{kk'}$ (indem er von den für diese Grösse geltenden Modulargleichungen ausgeht). Auf die complexe Multiplication in ihrer Bedeutung speciell für die Moduln erster Stufe geht übrigens in allerneuester Zeit Hr. Kiepert ein (Math. Ann. Bd. 39). — Selbstverständlich wird für uns eine *systematische Ausdehnung der Sätze des Textes auf die höheren Stufen* ein anzustrebendes Ziel sein; unter dies müssen sich dann alle jene particulären Entwicklungen über k^2, $\sqrt[12]{kk'}$ etc. unterbegreifen. Einen ersten Ansatz in dieser Richtung liefern die Entwicklungen des folgenden Kapitels über Classenzahlrelationen höherer Stufe.

**) *Disquisitiones arithmeticae*, Artikel 234 oder Dirichlet-Dedekind, *Zahlentheorie* (3te Aufl.) p. 387 u. f. Man bemerke übrigens, dass bei Gauss und Dirichlet die quadratischen Formen in der Gestalt (a, b, c) und nicht in der im Texte zu Grunde liegenden Gestalt (P, Q, R) zur Geltung kommen.

und es zeigt sich insbesondere, dass diese dritte Classe unabhängig von der Reihenfolge ist, in welcher wir jene beiden ersten componieren. Hier haben wir offenbar einen längst gewohnten Begriff wiedergewonnen: *Die $\eta(\Delta)$ Classen bilden gegenüber der Composition eine Gruppe, die wir kurz als „die Gruppe der Composition" bezeichnen; sie ist von der Ordnung $\eta(\Delta)$ und hat die besondere Eigenschaft, dass je zwei ihrer Operationen mit einander vertauschbar sind**).

Die Gruppe der Composition lässt sich jetzt leicht in eine Permutationsgruppe der Wurzeln von $g'_\Delta(J) = 0$ umsetzen. Man denke sich die $\eta(\Delta)$ Classen in eine erste Anordnung gebracht, dann aber nach einander die Elemente dieser Reihe mit den $\eta(\Delta)$ Classen componiert. So entspringen insgesamt $\eta(\Delta)$ Permutationen jener ersten Reihe der η Classen oder (was auf dasselbe hinauskommt) der $\eta(\Delta)$ Wurzeln von $g'_\Delta = 0$, und diese Permutationen bilden offenbar eine mit der Gruppe der Composition holoedrisch isomorphe Gruppe, die übrigens, wie man sieht, genau einfach transitiv ist.

Es lässt sich nun der Beweis führen, dass die Galois'sche Gruppe der Gleichung $g'_\Delta(J) = 0$ in der so gewonnenen Gruppe enthalten sein muss, sobald man $\sqrt{-\Delta}$ als bekannt ansieht. Da aber jede nicht mit der Gesamtheit zusammenfallende Untergruppe dieser Gruppe notwendig intransitiv ist, andrerseits jedoch $g'_\Delta = 0$ auch nach Adjunction von $\sqrt{-\Delta}$ irreducibel ist, so folgt aus bekannten Sätzen der Algebra: *Die Galois'sche Gruppe der Gleichung $g'_\Delta = 0$ wird nach Adjunction von $\sqrt{-\Delta}$ identisch mit der Gruppe der Composition.* Weiter aber hat sich so ergeben: Die Galois'sche Gruppe von $g'_\Delta = 0$ besteht aus lauter mit einander vertauschbaren Substitutionen; $g'_\Delta(J) = 0$ *gehört also zu derjenigen Classe von Gleichungen, die man als Abel'sche bezeichnet.* Von den letzteren aber weiss man, dass sie durch Wurzelziehungen lösbar sind, und also entspringt bei der Natur der Coefficienten von $g'_\Delta = 0$ der Satz: *Die Wurzeln von $g'_\Delta = 0$, d. i. die singulären Moduln der Determinante $-\Delta$ lassen sich durch Wurzelziehungen aus rationalen Zahlen berechnen.* Hiermit ist jener fundamentale Satz Abel's wieder gewonnen, den wir denn auch in den nachfolgenden Beispielen bestätigt finden werden. — Mögen die hiermit gegebenen Andeutungen die beziehungsreiche Theorie der Gleichung $g'_\Delta = 0$ für uns erledigen.

*) Für kleine Werte der Determinante ist übrigens die Gruppe der Composition schlechtweg von cyclischer Structur; die niederste Determinante, bei welcher die Gruppe complicierteren Charakter aufweist, ist $\Delta = 243$, vergl. die in Bd. II der Gauss'schen Werke p. 450 ff. mitgeteilte Tabelle.

§ 9. Specificierung der bisherigen Resultate für $n = 5$ und $n = 7$.

Die Gesamtentwicklungen des gegenwärtigen Kapitels sollen hier am Schlusse desselben durch ein paar ausgeführte Beispiele verdeutlicht werden. Wir betrachten etwa zunächst den Fall $n = 5$; die ganz einfachen Fälle $n = 2, 3, 4$, von denen die beiden ersten in den voraufgehenden Paragraphen wiederholt zum Ausschluss kamen, wird man nach dem Muster der zu gebenden Darstellung leicht direct erledigen können.

Das Transformationspolygon $F_{\psi(5)} = F_6$ ist in Fig. 96 (I p. 635) dargestellt, und das doppelt-geteilte Polygon F_6 findet man hierneben in Fig. 5. Es erscheint zweckmässig, die Variabele $\omega' = W(\omega)$ gleich wieder durch ω selbst zu bezeichnen d. h. als ω-Teilung der Figur 5

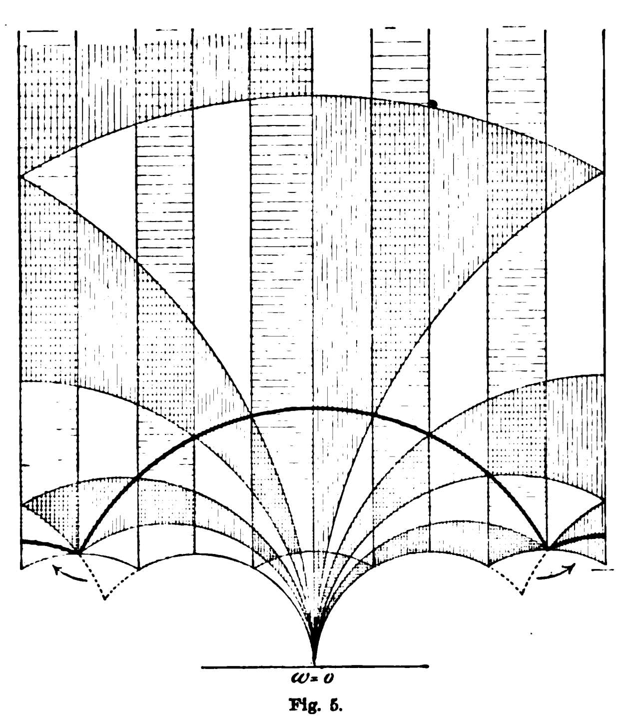


Fig. 5.

diejenige mit den Doppeldreiecken 1, $S^{\pm 1}$, $S^{\pm 2}$, T zu verstehen; eine wesentliche Modification wird hierdurch nicht herbeigeführt, und wir gewinnen den Vorteil, dass weiterhin die reducierten Formen immer durch blosse Anwendung der Operation S gewonnen werden können.

Wir fragen jetzt erstlich nach den Formen der *positiven* Determinante $D = 5$. In Fig. 5 erblickt man erstlich den zur Hauptclasse führenden Kreis:

(1) $$x^2 + y^2 - 5 = 0,$$

welcher links und rechts in den beiden mit $\omega = i$ äquivalenten Stellen $(\pm 2 + i)$ die Berandung des Polygons F_6 erreicht. Dort wird sich unter rechtem Winkel ein zweiter Kreisbogen ansetzen, der zur rechten und linken Seite der Figur in zwei Teile zerlegt erscheint. Als Gleichung des rechter Hand liegenden Kreisbogens ergiebt eine kurze Rechnung:

(2) $$x^2 + y^2 - 5x + 5 = 0.$$

Die bislang genannten Kreisbogen setzen sich zu einem geschlossenen System zusammen; weitere Kreisbogen aber kommen für unsere Figur nicht in Betracht, was nach den Regeln des § 3 (p. 173) aus dem Umstande folgt, dass das Polygon F_6 zum Geschlechte $p = 0$ gehört.

Es giebt hiernach für die positive Determinante $D = 5$ im ganzen *zwei* Classen von (ursprünglichen) Formen; die eine Classe umfasst *zehn* reducierte Formen, und darunter vier Hauptreducierte, die andere enthält *vier* reducierte Formen, die alle Hauptreducierte sind; beide Classen sind ambig und sich selbst invers. Durch Zurückwerfung der einzelnen Kreissegmente in das Ausgangsdreieck vermöge $S^{\pm 1}$ berechnen wir als die Hälfte der Formenperiode der Hauptclasse:

$$(1,\ 2,\ -1),\quad (1,\ 1,\ -4),\quad (1,\ 0,\ -5)$$
$$(1,\ -1,\ -4),\quad (1,\ -2,\ -1)$$

und entsprechend für die andere Classe:

$$(2,\ -1,\ -2),\quad (2,\ 1,\ -2);$$

dort haben wir ursprüngliche Formen der *ersten*, hier solche der *zweiten* Art.

Um die hierher gehörigen Formen *negativer* Determinanten zu erledigen, werden wir zuvörderst die Schnittpunkte der beiden Kreise (1), (2) mit den Kreisbogen der Figur 5 feststellen. In das Ausgangsdreieck zurückgeworfen liefern dieselben folgende sechs Punkte:

(3) $$\omega_0 = i\sqrt{5},\quad \omega_1 = \frac{-1 + i\sqrt{19}}{2},\quad \omega_2 = 2i,\quad \omega_3 = \frac{-1 + i\sqrt{11}}{2},$$
$$\omega_4 = i,\quad \omega_5 = \frac{-1 + i\sqrt{5}}{2}.$$

Hier haben wir die repräsentierenden Punkte für die sämtlichen reducierten ambigen Formen der Determinanten -20, -19, -16, -11, -4. Für $\Delta = 20$ können nur ω_0 und ω_5 in Betracht kommen und liefern ersichtlich die Formen:

(4) $$(1,\ 0,\ 5),\quad (2,\ 2,\ 3);$$

für $\Delta = 19$ liefert einzig der Punkt ω_1 eine Form nämlich:

$$(5)\qquad (1,\ 1,\ 5);$$

weiter kommen für $\Delta = 16$ die Punkte ω_2, ω_4, für $\Delta = 11$ der Punkt ω_3 und endlich für $\Delta = 4$ allein ω_4 in Betracht; wir finden dementsprechend die Formen:

$$(6)\qquad \begin{cases} (1,\ 0,\ 4), & (2,\ 0,\ 2), \\ (1,\ 1,\ 3), & \\ (1,\ 0,\ 1). & \end{cases}$$

Sollte es nun im Bereiche der in Rede stehenden Determinanten nur ambige Formen geben, so kämen für die Zahlen $\mathsf{H}(20 - x^2)$ die Werte:

$$(7)\qquad \mathsf{H}(20) = 2,\quad \mathsf{H}(19) = 1,\quad \mathsf{H}(16) = 1 + \tfrac{1}{2},$$
$$\mathsf{H}(11) = 1,\quad \mathsf{H}(4) = \tfrac{1}{2}.$$

Unter diesen Umständen hätten wir $\sum \mathsf{H}(20 - x^2) = 10$ für die linke Seite der Classenzahlrelation fünfter Ordnung. In der That aber ist auch $\Phi(5) + \Psi(5) = 10$, so dass wir voraufgehend bereits alle Formclassen der in Rede stehenden negativen Determinanten charakterisiert haben.

Endlich berechnen wir die *singulären Moduln*, welche zu den Classen (4), (5), (6) gehören; und zwar genügt es hier natürlich, die singulären Werte des Hauptmoduls $\tau(\omega)$ zu berechnen*), von wo aus die zugehörigen singulären J auf Grund von Formel (11) p. 61 hergestellt werden können. Setzen wir abgekürzt:

$$\Psi(\tau) = (\tau^2 + 22\tau + 125)(\tau^2 + 4\tau - 1)^2,$$

so ist nach der eben citierten Formel:

$$12^3 J = \frac{\Psi(\tau)}{\tau},\quad 12^3 J' = \frac{\tau}{125}\Psi\left(\frac{125}{\tau}\right).$$

Die fraglichen Werte von τ sind also die Wurzeln von

$$(8)\qquad 125\Psi(\tau) - \tau^2\Psi\left(\frac{125}{\tau}\right) = 0.$$

Hier spaltet sich der Factor $(\tau^2 + 22\tau + 125)$ ab, der gleich Null gesetzt die beiden Werte $\tau = -11 \pm 2i$ liefert; offenbar finden dieselben in den beiden Punkten $\omega = \pm 2 + i$ des Polygons F_6 statt. Der zurückbleibende Bestandteil von (8) ist:

$$(\tau^2 + 4\tau - 1)^2 = \left(\frac{5^6}{\tau^2} + \frac{4 \cdot 5^3}{\tau} - 1\right)^2.$$

---

*) Gemeint ist hier selbstverständlich der zum Polygon der Dreiecke 1, T, $S^{\pm 1}$, $S^{\pm 2}$ gehörende Hauptmodul $\tau(\omega)$.

Diese Gleichung spalten wir nunmehr unter Ausführung der Substitution $\tau = 5\sqrt{5}z$ in die beiden folgenden:

$$5\sqrt{5}\left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right) + 4\left(z - \frac{1}{z}\right) = 0,$$

$$125\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + 20\sqrt{5}\left(z + \frac{1}{z}\right) - 2 = 0,$$

welche uns die rückständigen acht Werte τ sogleich ergeben. Bei der Frage, wie sich diese Werte τ auf die Kreuzungspunkte der Kreise in Fig. 5 verteilen, wolle man bemerken, dass die beiden Kreise (1) und (2) in dem zur τ-Ebene zusammengebogenen Polygon F_6 den Kreis $\xi^2 + \eta^2 = 125$ liefern. Auf diesem Kreise hat man also alle fraglichen Punkte τ zu suchen, wobei eben aus den Zahlwerten dieser τ ihre Abfolge auf dem Kreise und damit ihre Reihenfolge auf den Kreisbogen der ω-Halbebene sofort evident wird. Wir stellen das Resultat gleich in Gestalt der nachfolgenden Tabelle zusammen:

$$(9)\quad \begin{cases} \tau(i\sqrt{5}) = 5\sqrt{5}, & \tau\left(\frac{5 + i\sqrt{5}}{2}\right) = -5\sqrt{5}, \\ \tau(\pm 1 + 2i) = -2 \mp 11i, & \tau(\pm 2 + i) = -11 \mp 2i, \\ \tau\left(\frac{\pm 1 + i\sqrt{19}}{2}\right) = 7 \mp 2i\sqrt{19}, & \tau\left(\frac{\pm 3 + i\sqrt{11}}{2}\right) = -9 \mp 2i\sqrt{11}. \end{cases}$$

Im Falle $n = 7$ haben wir die Gleichungen (12) p. 61 zu Grunde zu legen und benutzen übrigens wieder statt der gewohnten Gestalt des Polygons F_8 (cf. Fig. 104, I p. 742) diejenige, die aus ihr durch Anwendung der Modulsubstitution T hervorgeht. Ohne die doppeltgeteilte Figur hier explicite heranzuziehen, schliessen wir vielmehr wie folgt. Da auch $n = 7$ zum Geschlechte $p = 0$ gehört, so ist die in der Ebene des Hauptmoduls τ gelegene Smith'sche Curve wieder ein Kreis, der sich hier insbesondere (nach (12) p. 61) zu $\xi^2 + \eta^2 = 49$ berechnet. Da überdies (-1) quadratischer Nichtrest von 7 ist, so liefert dieser Kreis nur eine (sich selbst nicht inverse) Classe von Formen positiver Determinante (bez. zwei, wenn wir die inverse Classe besonders rechnen wollen), welche als Hauptclasse der Determinante $D = 7$ ambig sein wird. Das Polygon F_8 hat zwei mit $\omega = \varrho$ äquivalente Stellen, wo nur zwei Elementardreiecke zusammenhängen. Dort wird also der zur Hauptform $(1, 0, -7)$ gehörende Kreis die Berandung von F_8 erreichen, und es schliessen sich beiderseits unter dem Winkel $\frac{\pi}{3}$ zwei weitere Kreisbogen an, die durch die Gleichungen

$$(10)\qquad 2(x^2 + y^2) \pm 14x + 21 = 0$$

gegeben sind. Insgesamt liefern diese Kreisbogen für die allein

existierende Classe eine Periode von sieben reducierten Formen, als welche wir finden:

(11) $(1, 0, -7),\quad (1, \pm 1, -6),\quad (1, \pm 2, -3),\quad (2, \pm 1, -3).$

Die Schnittpunkte der gekennzeichneten Kreisbogen mit den Symmetriekreisen der Teilung von F_8 sind folgende vierzehn:

$$(12)\quad \begin{cases} \omega_0 = i\sqrt{7}, \quad \omega_\infty = \frac{7 + i\sqrt{7}}{2}, \quad \omega_{\pm 1} = \frac{\pm 1 + 3i\sqrt{3}}{2}, \\ \omega_{\pm 2} = \pm 1 + i\sqrt{6}, \quad \omega_{\pm 3} = \frac{\pm 3 + i\sqrt{19}}{2}, \quad \omega_{\pm 4} = \pm 2 + i\sqrt{3}, \\ \omega_{\pm 5} = \frac{\pm 5 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \omega_{\pm 6} = \frac{\pm 6 + i\sqrt{6}}{2}. \end{cases}$$

Auf Grund dieser Zahlwerte finden sich für die negativen Determinanten $-\Delta = -28 + x^2$ folgende reducierte ambige Formen:

$$(13)\quad \begin{cases} \Delta = 28; \quad \omega_0, \omega_\infty; \quad (1, 0, 7), \quad (2, 2, 4), \\ \Delta = 27; \quad \omega_1, \omega_5; \quad (1, 1, 7), \quad (3, 3, 3), \\ \Delta = 24; \quad \omega_2, \omega_6; \quad (1, 0, 6), \quad (2, 0, 3), \\ \Delta = 12; \quad \omega_4, \omega_5; \quad (1, 0, 3), \quad (2, 2, 2), \\ \Delta = 19; \quad \omega_3; \quad (1, 1, 5); \quad \Delta = 3; \quad \omega_5; \quad (1, 1, 1). \end{cases}$$

Auch hier giebt es nur ambige Classen, und wir lesen aus (13) ab:

$$(14)\quad \mathrm{H}(28) = 2, \quad \mathrm{H}(27) = 1 + \tfrac{1}{3}; \quad \mathrm{H}(24) = 2, \quad \mathrm{H}(19) = 1,$$
$$\mathrm{H}(12) = 1 + \tfrac{1}{3}, \quad \mathrm{H}(3) = \tfrac{1}{3};$$

in der That erhalten wir so für die linke Seite der Classenzahlrelation siebenter Ordnung 14, welches auch der Wert der rechten Seite ist.

Die zu den Argumenten (12) gehörenden singulären Moduln berechnet man genau in der nämlichen Weise, wie vorhin bei $n = 5$. Unter Rücksichtnahme auf die conforme Abbildung des Polygons F_8 auf die τ-Ebene ergiebt sich:

$$(15)\quad \begin{cases} \tau(\omega_0) = 7, \quad \tau(\omega_\infty) = -7, \quad \tau(\omega_{\pm 1}) = \frac{11 \mp 5i\sqrt{3}}{2}, \\ \tau(\omega_{\pm 2}) = \frac{-5 + 6\sqrt{2} \mp i\sqrt{3}(5 + 2\sqrt{2})}{2}, \quad \tau(\omega_{\pm 3}) = \frac{-5 \mp 3i\sqrt{19}}{2}, \\ \tau(\omega_{\pm 4}) = \frac{-11 \mp 5i\sqrt{3}}{2}, \quad \tau(\omega_{\pm 5}) = \frac{-13 \mp 3i\sqrt{3}}{2}, \\ \tau(\omega_{\pm 6}) = \frac{-5 - 6\sqrt{2} \mp i\sqrt{3}(5 - 2\sqrt{2})}{2}. \end{cases}$$

Hier, wie in (9), findet man die obigen Angaben über die arithmetische Natur der singulären Moduln bestätigt. —

Übrigens würde eine weitere Fortsetzung dieser Einzeluntersuchungen, die wir hier abbrechen, auch bei den nächsten Werten von n keinen besonderen Schwierigkeiten begegnen. Besonders leicht möchte sich vermöge der Fig. 1 p. 42, sowie der bezüglichen Entwicklungen von p. 61 der Fall $n = 6$ erledigen; wir überlassen indessen die Durchführung dieser Untersuchung dem Leser.

Sechstes Kapitel.

Anwendung der Ikosaedermodulargleichungen auf die Theorie der ganzzahligen binären quadratischen Formen.

Genau so, wie vorstehend die Modulargleichungen zwischen J und J', können wir jetzt irgendwelche Modulargleichungen höherer Stufe mit der Theorie der quadratischen binären Formen in Verbindung setzen, und insbesondere versuchen, aus ihnen *Classenzahlrelationen* nach Art der im vorigen Kapitel gewonnenen Relation erster Stufe abzuleiten. Einige historische Angaben über letzteren Gegenstand mögen nunmehr am Platze sein. Wir deuteten bereits an, dass Herr Kronecker bei seinen bezüglichen Untersuchungen die Jacobi'schen Modulargleichungen zu Grunde legte. Hierbei gewann er neben jener Relation, die wir als Relation erster Stufe bezeichneten, im Ganzen noch sieben weitere Classenzahlrelationen, welche eine entsprechende Bauart besassen, nämlich linker Hand eine Summe von Classenzahlen und rechter Hand ein Aggregat von Teilersummen aufwiesen*). Die Versuche, durch entsprechenden Ansatz noch weitere Classenzahlrelationen zu gewinnen, blieben zunächst erfolglos**), und es lag die

*) Vgl. die erste ausführliche Mitteilung in Crelle's Journ. Bd. 57 (1857), sowie Berliner Monatsberichte von 1857, 1862, 1875. Die ersten Mitteilungen enthalten nur Resultate, keine Beweise; wie man die letzteren zu führen hat, wurde wohl zuerst von Stephen Smith im Teil VI seines „*Report on the theory of Numbers*" in Bd. 35 der Reports of the Britisch Association (1865) entwickelt.

**) Indem wir $J' = J$ in $f(J', J) = 0$ setzen, bilden wir so zu sagen die Resultante der Modulargleichung $f = 0$ (die dem n^{ten} Transformationsgrad entspricht) und der zur Transformation erster Ordnung gehörigen Gleichung $J - J' = 0$. Man kann entsprechend die Resultante zweier Modulargleichungen $f = 0$, $f' = 0$ betrachten, die irgendwelchen Transformationsgraden n, n' zugehören; man kann auch die Discriminante der Gleichung $f = 0$ untersuchen. Letzteres ist insbesondere (für den Fall der Jacobi'schen Modulargleichungen) von Hermite geschehen (Comptes Rendus. Bd. 49, 1859: *Sur la Théorie de équations modulaires*). Inzwischen zeigte Hr. Kronecker 1875 in den Berliner Monatsberichten (l. c.), dass die betreffende, von Hermite gefundene Relation in der That eine lineare Verbindung seiner fundamentalen acht Relationen sei.

Auffassung nahe, dass mit den von Hrn. Kronecker gegebenen acht Gleichungen das hier zugängliche Gebiet zunächst überhaupt abgeschlossen sei*). Die allgemeine Theorie der elliptischen Modulfunctionen, wie wir sie hier vertreten, und die aus ihr fliessende Kenntnis zahlreicher neuer Formen der Modulargleichungen höherer Stufe hat diese Auffassung wesentlich erweitert. Es ist das grosse Verdienst von Hrn. Gierster, in dieser Hinsicht die bahnbrechenden Untersuchungen geführt zu haben. In einer ersten Mitteilung in den Göttinger Nachrichten von 1879**) behandelt derselbe unter den hier in Betracht kommenden Gesichtspunkten *die Modulargleichungen der regulären Körper* und erhält so neben der Classenzahlrelation erster Stufe (die hier zum ersten Male als solche explicit auftritt) je eine Reihe von Relationen zweiter, dritter, vierter, fünfter Stufe, die in arithmetischer Hinsicht durchaus coordiniert erscheinen. Bald darauf dehnte Hr. Gierster seine Untersuchungen auf beliebige Modulargleichungen von Primzahlstufe, wie auch auf Modularcorrespondenzen aus***). Bei letzteren aber zeigte sich eine Complication. Es war nicht schwer, die in den zugehörigen Classenzahlrelationen linker Hand auftretenden Summen von Classenzahlen allgemein hinzuschreiben, dagegen fehlten die Mittel, um die auf der rechten Seite auftretenden zahlentheoretischen Functionen zu definieren. Es hängt dies mit der Schwierigkeit der allgemeinen algebraischen Darstellung der Modularcorrespondenzen zusammen, auf die wir schon hinwiesen, und deren Erledigung durch Hrn. Hurwitz uns weiter unten im sechsten Abschnitt ausführlich beschäftigen wird. Hr. Hurwitz ist es denn auch gewesen, wie wir später noch ausführen werden, der die in Rede stehende arithmetische Schwierigkeit zuerst principiell überwunden hat und dadurch den Ausblick auf eine unendliche Reihe von Classenzahlrelationen geöffnet hat, deren rechte Seiten freilich zahlentheoretische Functionen von steigender Compliciertheit enthalten†). Hr. Kronecker hatte bereits 1875

*) Vergl. hierzu die arithmetischen Betrachtungen, welche Hr. Kronecker 1884 in seiner Arbeit „*Über bilineare Formen mit vier Variabelen*“ (Abhandlungen der Berliner Akademie) entwickelt.

**) *Über Relationen zwischen Classenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante* (später abgedruckt in Bd. 17 der Math. Annalen p. 71—73).

***) Vgl. die Mitteilung an die Münchener Akademie vom Febr. 1880 (abgedruckt in Math. Annalen 17), sowie die ausführlicheren Arbeiten in den Bänden 21 und 22 der Math. Annalen (1882, 83), die alle unter dem gleichen Titel (*Über Relationen zwischen Classenzahlen etc.*) erschienen sind.

†) Vgl. die Mitteilung in den Göttinger Nachrichten vom Nov. 1883 „*Zur Theorie der Modulargleichungen*“, die Arbeit „*Über Relationen zwischen Classenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante*“ in Bd. 25 der

auf anderem Wege ein specielles hierher gehöriges Resultat erhalten*), bei welchem rechter Hand eine Summe complexer Teiler von der Form $a + bi$ auftritt; dasselbe rubriciert sich jetzt unter die sechzehnte Stufe; ebenso findet eine Formel ihre Bestätigung, welche Hr. Gierster für $n = 7, 11$ auf inductivem Wege gewonnen hatte**), und in der complexe Teiler von der Form $a + b\sqrt{-7}$ resp. $a + b\sqrt{-11}$ auftreten. — Weitere hierher gehörige Arbeiten werden wir weiter unten anführen.

Von den ausgedehnten hiermit berührten Untersuchungen können uns hier selbstverständlich nur diejenigen beschäftigen, welche sich auf eigentliche Modulargleichungen beziehen. Und unter diesen werden wir der Kürze halber nur einen einzigen Fall herausgreifen, der uns besonders interessiert, *die Modulargleichungen des Ikosaeders.* Wir haben uns oben, beim algebraischen Studium dieser Gleichungen, auf den Fall eines zu 5 relativ primen Transformationsgrades beschränkt. Die gleiche Beschränkung soll hier eingehalten werden, trotzdem Herr Gierster bereits auch den Fall der durch 5 teilbaren Transformationsgrade erledigt hat; wir werden über seine bez. Resultate noch am Schlusse des Kapitels einige Angaben machen. Übrigens übertragen wir vorab die Theorie der Smith'schen Curve auf den vorliegenden Fall der Ikosaedermodulargleichungen.

§ 1. Beziehung der Modulargleichungen fünfter Stufe auf die binären quadratischen Formen positiver Determinante.

Wenn wir die complexe J-Ebene durch die algebraische Function sechzigsten Grades ζ auf die ikosaedrisch geteilte Kugel der Variabelen ζ conform abbilden, so wird die Curve $h(X, Y) = 0$ der J-Ebene (p. 166), um mit dieser hier wieder zu beginnen, sich in eine algebraische, auf der ζ-Kugel gelegene Curve übertragen. Jene erstere Curve war (sofern wir ihren imaginären Bestandteil mit in Betracht ziehen) collinear mit der Modularcurve, und die Modulargleichung erster Stufe für eigentliche Transformation n^{ter} Ordnung***) zerfällt beim gekenn-

Math. Ann. (1884), endlich den Aufsatz: „*Über die Classenzahlrelationen und Modularcorrespondenzen primzahliger Stufe*“ in den Sitzungsberichten der Sächsischen Ges. d. W. von 1885.

*) In den Berliner Monatsberichten.

**) In der bereits genannten Arbeit in Bd. 22 der Math. Annalen.

***) Wir setzen hier n sogleich relativ prim gegen 5 voraus; nichts würde hindern, auch für durch 5 teilbare n entsprechende Entwicklungen anzustellen, die nur noch weniger einförmig ausfallen würden, als die Untersuchungen des Textes; auf die bez. Resultate des Hrn. Gierster kommen wir unten zurück.

zeichneten Übergang in 60 irreducibele Gleichungen fünfter Stufe $f_0(\zeta', \zeta) = 0, \ldots, f_{59}(\zeta', \zeta) = 0$, welche alle aus einer unter ihnen dadurch entstehen, dass wir bei unverändertem ζ auf ζ' die Ikosaedersubstitutionen ausüben. Entsprechend muss also die auf der ζ-Kugel gewonnene algebraische Curve reducibel werden, indem sie in die sechzig irreducibelen Curven:

$$(1) \qquad f_0(\xi - i\eta,\ \ \xi + i\eta) = 0, \ldots, \ \ f_{59}(\xi - i\eta,\ \ \xi + i\eta) = 0$$

zerfällt.

Von diesen Curven kommen für die Formen positiver Determinante $D = n$ einzig die reellen Züge in Betracht; wir werden dieselben sehr leicht auf dem Ikosaeder (Fig. 30, I p. 105) angeben können. In der That brauchen wir nur die im Ausgangsdreieck der Modulteilung gelegenen Kreissegmente der ursprünglichen Formen der Determinante $D = n$ auf alle sechzig Doppeldreiecke des Ikosaeders abzubilden; dort werden sie sich zu lauter stetig gekrümmten Curvenzügen an einander reihen, welche die reellen Teile der Curve (1) abgeben.

Nicht jede Curve (1) weist reelle Züge auf; man möchte vielmehr sofort als Bedingung angeben, dass die linke Seite der zugehörigen Modulargleichung $f_i(\zeta, \zeta') = 0$ symmetrisch in ζ', ζ sein muss, und solches gilt, wie wir früher fanden, für $n \equiv \pm 1$ (mod. 5) von fünfzehn, für $n \equiv \pm 2$ nur von zehn unter den sechzig Modulargleichungen (cf. p. 123 u. f.). Dies ist wirklich in Übereinstimmung mit der arithmetischen Abzählung, die wir nun für die einzelnen Fälle $n \equiv \pm 1, \pm 2$ durchführen.

Soll überhaupt eine vorgelegte eigentliche Transformation n^{ter} Ordnung einen Beitrag liefern für einen reellen Teil einer Curve (1), so muss der erste Coefficient der Transformation mit dem vierten übereinstimmen. Nun sind die sechzig zu den Gleichungen (1) gehörenden Schemata der Transformation n^{ter} Ordnung

$$(2) \qquad R^{(i)} = \begin{pmatrix} n\alpha_i, & n\beta_i \\ \gamma_i, & \delta_i \end{pmatrix}, \quad \alpha_i\delta_i - \beta_i\gamma_i \equiv 1, \text{ (mod. 5)}.$$

Für $n \equiv 1$ haben wir in (2) die sechzig modulo 5 incongruenten Substitutionen, und unter denselben giebt es bekanntlich fünfzehn mit $\alpha_i \equiv \delta_i$, die den fünfzehn Symmetriekreisen der Ikosaederteilung eindeutig entsprechen. Für $n \equiv -1$ kommen die $R^{(i)}$ mit $\alpha_i + \delta_i \equiv 0$ in Betracht; das sind die fünfzehn Drehungen um die Kantenhalbierungspunkte des Ikosaeders, die ihrerseits wieder auf die fünfzehn Symmetriekreise durch die Gegenüberstellung der Substitutionen:

$$(3) \qquad \begin{pmatrix} \alpha_i, & \beta_i \\ \gamma_i, & -\alpha_i \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2\alpha_i, & -2\beta_i \\ 2\gamma_i, & 2\alpha_i \end{pmatrix}$$

in bekannter Weise eindeutig bezogen sind. Für $n \equiv \pm 2$ kommen die Operationen mit $\pm 2\alpha_i \equiv \delta_i$ in Betracht, und man bestimmt deren Zahl in beiden Fällen leicht zu zehn. Indessen stehen dieselben in keiner anschaulichen Beziehung zur Ikosaederteilung*).

Diese Sätze gestatten unmittelbare Anwendung, wenn wir jetzt die ursprünglichen Formen einer durch 5 nicht teilbaren positiven Determinante $D = n$ betreffs ihrer Äquivalenz bezüglich der Hauptcongruenzgruppe fünfter Stufe Γ_{60} untersuchen. Für zwei relativ äquivalente Formen (a, b, c), (a', b', c') ist dabei stets $a' \equiv a$, $b' \equiv b$, $c' \equiv c$ (mod. 5) und wir werden demzufolge nicht nur von modulo 5 congruenten Formen, sondern gleich von congruenten Formclassen sprechen können. Vereinen wir alle für das einzelne n congruente Classen in eine Abteilung, so giebt es deren offenbar zehn oder fünfzehn verschiedene, je nachdem n quadratischer Nichtrest bez. Rest von 5 ist.

Im letzteren Falle können wir natürlich wieder die Beziehung zu den 15 Ikosaederkreisen herausarbeiten: Die Kreise der Modulteilung mod. 5 reduciert geben fünfzehn Typen:

$$\gamma(x^2 + y^2) - 2\alpha x + \beta = 0,$$

und eben auf diese kommen auch die repräsentierenden Halbkreise der Formen (a, b, c) mod. 5 zurück, und zwar direct bei $n \equiv 1$, während wir bei $n \equiv -1$ die Coefficienten der letzten Gleichung erst noch mit dem Factor 2 versehen müssen.

Wir schliessen hier etwa für $n \equiv 1$ gleich noch folgende Besprechung an: Zeichnet man die reelle ζ-Axe, die in Fig. 30 (I p. 105) horizontal durch die Mitte zieht, vor den übrigen Symmetriekreisen aus, so ist dadurch eine unsymmetrische Anordnung aller Kreise in vier Systeme zu bez. 1, 2, 4, 8 bedingt. Das erste System besteht einzig aus der reellen ζ-Axe, und ihr gehört diejenige Abteilung von Formen zu, welche $a \equiv c \equiv 0$ haben. Weiter findet man in Fig. 30 zwei Kreise, welche die reelle ζ-Axe orthogonal kreuzen, und zu ihnen gehören die beiden Formabteilungen mit $b \equiv 0$. Es folgen vier Kreise, welche die reelle Axe unter den Winkeln $\pm \frac{\pi}{3}$ kreuzen,

*) In „Ikos." Kap. II, 2 finden übrigens beide Fälle $n \equiv \pm 1$, ± 2 eine im Raume entwickelte geometrische Interpretation. Um diese Verhältnisse für den im Texte ausgeschlossenen Fall $n \equiv \pm 2$ noch etwas näher anzudeuten, so werden die fünf in (7) p. 140 gegebenen Grössen $z_0, z_1, \ldots, z_4$ zu Pentaedercoordinaten des gewöhnlichen Raumes R_3 gesetzt; dies ist deshalb zulässig, weil die Summe der z_ν identisch Null ist. Man findet alsdann die zehn für $n \equiv \pm 2$ im Texte charakterisierten Fälle durch eine Überlegung, die wir hier nicht näher ausführen können, *den zehn Kanten des Coordinatenpentaeders* zugeordnet.

und ihnen zugehörig vier Formabteilungen mit $\left(\frac{b}{5}\right) = -1$. Den Schluss bilden acht Kreise, welche die reelle Axe unter den Winkeln $\pm\frac{\pi}{5}$, $\pm\frac{2\pi}{5}$ schneiden, und denen die acht Formabteilungen mit $\left(\frac{b}{5}\right) = +1$ entsprechen. Es hat deshalb Interesse, auf diese Verhältnisse hingewiesen zu haben, weil wir später für $n \equiv 1$ (sowie auch für $n \equiv -1$) insgesamt vier verschiedene Classenzahlrelationen fünfter Stufe kennen lernen werden, welche den gekennzeichneten vier Systemen von Ikosaederkreisen genau parallel gehen*).

Jeder Formabteilung werden wir jetzt beim einzelnen n eine der 10 bez. 15 Curven $f_k(\xi - i\eta, \xi + i\eta) = 0$ zuweisen und übrigens die Formen der Abteilung in Classen teilen, je nachdem sie relativ äquivalent sind oder nicht. Wir haben dann ohne weiteres den Satz: *Jede Abteilung enthält soviel Formclassen der positiven Determinante* $D = n$, *als die zugehörige Curve* $f_k(\xi - i\eta, \xi + i\eta) = 0$ *reelle Züge aufweist.* Unter zwei einander inversen Classen ist hierbei natürlich immer nur eine gezählt; sich selbst inverse Classen aber treten deshalb nicht auf, weil innerhalb der Γ_{60} elliptische Substitutionen der Periode zwei sich nicht finden. Es würde übrigens keine Schwierigkeit haben, auf Grund des in der ω-Halbebene gelegenen Polygons F_{60} eine Theorie der reducierten Formen und der Formenperioden zu entwickeln.

Man sieht, dass sich solcherweise die bei der ersten Stufe für die positiven Determinanten entwickelten Sätze ohne Mühe übertragen. Wichtige Ergebnisse erzielen wir indes bei dieser Übertragung erst für die Formen negativer Determinante.

§ 2. Überleitung zu den Classenzahlrelationen fünfter Stufe und Ansätze für ihre Berechnung.

Wie wir schon in der Einleitung zum gegenwärtigen Kapitel bemerkten, ist die wichtigste Anwendung der Modulargleichungen fünfter Stufe diejenige zur Aufstellung der Classenzahlrelationen fünfter Stufe. Was wir unter diesen Relationen zu verstehen haben werden, ist nach

*) Eine ganz entsprechende Betrachtung gilt für $n \equiv \pm 2$ im Raume R_3 des in der vorigen Note genannten Coordinatenpentaeders der z_ν. Alle zehn Kanten des Pentaeders zerfallen mit Rücksicht auf eine unter ihnen in *drei* Abteilungen; die erste Abteilung wird allein von der einen gerade ausgezeichneten Kante gebildet; es reihen sich weiter sechs Kanten an, welche jene erstere schneiden; und endlich bleiben für die dritte Abteilung noch drei Kanten, welche die erste nicht treffen. Dem entspricht es, wenn wir späterhin für die fraglichen Fälle $n \equiv \pm 2 \pmod{5}$ *drei* unterschiedene Classenzahlrelationen finden werden.

§ 6 des vor. Kap. (p. 182) fast unmittelbar evident. Damals betrachteten wir die Function erster Stufe

$$(1)\qquad H(\omega)=\prod{}'\left\{J(\omega)-J\left(\frac{A\omega+B}{D}\right)\right\}$$

und fanden durch Vergleichung ihrer Null- und Unstetigkeitspunkte im Ausgangsdreieck die Gleichung:

$$(2)\qquad \sum_{x=0,\pm 1,\ldots} \mathrm{H}(4n-x^2)=\Phi(n)+\Psi(n),\quad -2\sqrt{n}<x\leq 2\sqrt{n},$$

d. i. *die Classenzahlrelation erster Stufe.* Indem wir, wie soeben, auch weiterhin n als prim gegen 5 voraussetzen, führen wir in die Modulargleichung erster Stufe für *erweiterte* Transformation n^{ter} Ordnung $f(J', J)=0$ für J' und J ihre rationalen Ausdrücke in ζ' und ζ ein. Dabei zerfällt diese Gleichung in sechzig neue Gleichungen

$$f_0(\zeta',\zeta)=0,\ \ldots,\ f_{59}(\zeta',\zeta)=0,$$

deren linke Seiten wir uns wieder als *ganze* Functionen von ζ', ζ geschrieben denken. Dabei ist denn zwar nicht direct $\prod\limits_k f_k(\zeta',\zeta)$ mit $f(J', J)$ identisch, aber es ist nicht schwer, die hier bestehende Beziehung explicite aufzustellen. Übt man nämlich in $f_0(\zeta',\zeta)$ auf ζ' die 60 Ikosaedersubstitutionen aus, so entspringt durch Multiplication der sechzig Bildungen offenbar der Quotient von

$$\prod_k f_k(\zeta',\zeta)\ \text{ und }\ \{\zeta'(\zeta'^{10}+11\zeta'^5-1)\}^{5\Phi};$$

und dieser Quotient ist von ζ' nur in der Weise abhängig, dass er bereits rational in J' ist. Durch leichte Fortsetzung dieser Schlussweise findet man:

$$(3)\qquad f(J', J)=\frac{c\cdot\prod\limits_k f_k(\zeta',\zeta)}{\{\zeta'(\zeta'^{10}+11\zeta'^5-1)\cdot\zeta(\zeta^{10}+11\zeta^5-1)\}^{5\Phi}},$$

woraus sich durch Identischsetzen von ζ und ζ' die Relation ergiebt:

$$(4)\qquad c\cdot\prod_k f_k(\zeta,\zeta)=\{\zeta(\zeta^{10}+11\zeta^5-1)\}^{10\Phi}\cdot f(J, J).$$

Statt nun $f(J, J)$ auf dem Polygon F_{60} in Bezug auf Verschwinden und Unendlichwerden zu untersuchen, können wir auch zu gleichem Zwecke die rechte Seite von (4) vorlegen; immer wird dabei durch bekannte Überlegung die Relation (2) entspringen, nur mit 60 multipliciert. Jetzt aber können wir auf F_{60} für jeden in (4) linker Hand auftretenden Factor $f_k(\zeta,\zeta)$ ins einzelne die Anzahl der Nullpunkte und andrerseits diejenige der Unstetigkeitspunkte abzählen und gewinnen durch Gleichsetzung beider Anzahlen insgesamt sechzig Relationen,

deren Summe dann nach dem, was wir gerade vorausschickten, notwendig (2) ergeben wird. *Die so entspringenden Relationen sind es nun, welche wir als Classenzahlrelationen fünfter Stufe bezeichnen.*

Keineswegs brauchen alle sechzig Relationen von einander verschieden zu sein; aber man bemerke doch, dass sie nicht alle mit einander identisch sein können. Es wird nämlich die in den Argumenten von H auftretende Zahl $x^2 = (a + d)^2$ für die einzelne Relation modulo 5 reduciert einen durch das Schema von $f_k(\zeta, \xi)$ fest bestimmten Rest lassen. Stets also werden wir wenigstens drei Relationen zu erwarten haben, den Werten $x^2 \equiv 0, 1, 4$ entsprechend. Wir setzen sogleich hinzu, dass wir für $\left(\frac{n}{5}\right) = -1$ auch nur drei Relationen erhalten werden, für $\left(\frac{n}{5}\right) = +1$ dagegen vier; hier geben nämlich bei $x^2 \equiv 4n$ die für diesen Fall zur Geltung kommenden Formen (P, Q, R) vom Teiler 5 zu einer besonderen Relation Anlass*). Die verschiedenen bei der einzelnen Ordnung n auftretenden Relationen ergeben dann natürlich, mit geeigneten Factoren multipliciert und addiert, die Classenzahlrelation erster Stufe. *Der Charakter der Classenzahlrelationen fünfter Stufe wird hiernach sein, dass* (2) *in eine Reihe von Gleichungen dadurch gespalten wird, dass wir die* H(Δ) *mit modulo* 5 *congruenten* Δ *immer für sich zusammenfassen.*

Indem wir auch bei allen übrigen Stufen zu analogen Ergebnissen geführt werden, wird man bemerken, dass jeder Stufenzahl m eine besondere und charakteristische Spaltung der durch (2) gegebenen Relation erster Stufe in eine Reihe von Classenzahlrelationen m^{ter} Stufe zukommt. Keineswegs wird behauptet, dass die Relationen der einen Stufe nicht aus denen anderer Stufen durch solche Zwischenentwicklungen ableitbar seien, welche tiefer auf das Wesen der Classenanzahlen eingehen. Aber man sieht, dass es undenkbar ist, durch einfache lineare Combinationen oder Vervielfachungen der Classenzahlrelationen einer einzelnen Stufe m die entsprechenden Relationen irgend einer solchen Stufe m' zu gewinnen, die nicht ein Teiler von m wäre.

Die Ansätze zur Aufstellung der Classenzahlrelationen fünfter Stufe gewinnen wir nun auf folgendem Wege: Eine einzelne unter den Modulfunctionen fünfter Stufe $f_k(\zeta, \xi)$ wird jedenfalls nur in den Spitzen des Polygons F_{60} unendlich werden können. Von diesen abgesehen, wir wollen dafür kurz sagen *„im Innern" des Polygons* F_{60},

---

*) Man vgl. die in geometrischer Gedankenverbindung gebrachten Angaben des vorigen Paragraphen über die Anzahl unterschiedener Classenzahlrelationen.

werden nur Nullpunkte von $f_k(\zeta, \zeta)$ in Betracht kommen: *Unsere erste Aufgabe ist, die Anzahl dieser Nullpunkte vermöge einer arithmetischen Untersuchung durch eine Classenzahlsumme darzustellen.* Wir schliessen hierbei auf Grund der Gleichung (4) wie folgt: Im vorigen Kapitel (p. 181) wurden uns alle einfachen Nullpunkte von $f(J, J)$ durch die Systeme $(P, Q, R, \varkappa)$ geliefert, wobei die Systeme mit reducierten Formen (P, P, P) zu dreien, die mit reducierten Formen $(P, 0, P)$ zu zweien denselben Nullpunkt lieferten, während im übrigen *ein* Nullpunkt immer auch nur von *einem* Systeme $(P, Q, R, \varkappa)$ herrührte. Bei der Betrachtung auf F_{60} ist die Zahl dieser Nullstellen ω_0 den 60 Doppeldreiecken von F_{60} gemäss zu versechzigfachen, und es tritt in Übereinstimmung hiermit für dieselben an Stelle der einen Gleichung

$$\omega_0 = \frac{\frac{-Q+\varkappa}{2} \cdot \omega_0 - R}{P\omega_0 + \frac{Q+\varkappa}{2}}$$

gleich das System der sechzig Gleichungen:

$$\omega_0 = V_i^{-1}\left(\frac{\frac{-Q+\varkappa}{2} \cdot V_i(\omega_0) - R}{P \cdot V_i(\omega_0) + \frac{Q+\varkappa}{2}}\right), \tag{5}$$

wo V_i ein System modulo 5 incongruenter Modulsubstitutionen durchlaufen muss. Jetzt aber ist zu untersuchen, *wie wir die gesamten aus dem Ansatze* (5) *sich ergebenden Nullpunkte der linken Seite von* (4) *auf die* 60 *Factoren* f_k *verteilen müssen.* In diesem Betracht bemerke man, dass dem einzelnen Factor f_k ein gewisses Schema $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ zugehört; und in (5) liegt nun stets und nur dann ein Nullpunkt für diesen speciellen Factor $f_k(\zeta, \zeta)$ vor, falls die auf der rechten Seite von (5) stehende Transformation n^{ter} Ordnung eben zu jenem Schema $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ gehört, d. h. falls die Congruenz besteht:

$$V_i^{-1}\begin{pmatrix} \frac{-Q+\varkappa}{2}, & -R \\ P, & \frac{Q+\varkappa}{2} \end{pmatrix} V_i \equiv \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}, \ (\text{mod. } 5). \tag{6}$$

Wir haben also die Regel: *Das einzelne System* $(P, Q, R, \varkappa)$ *liefert für den Factor* $f_k(\zeta, \zeta)$ *vom Schema* $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ *gerade so viel einfache (bez.* $\frac{1}{2}$-, $\frac{1}{3}$-*fache) Nullpunkte, als es modulo* 5 *incongruente Substitutionen* V_i *giebt, welche* (6) *befriedigen.* — Übrigens ist infolge der Gleich-

berechtigung der sechzig Doppeldreiecke von F_{60} gar nicht erforderlich, dass (P, Q, R) hier reduciert genommen wird; vielmehr dürfen wir zur Repräsentation der betreffenden Formclasse auch eine beliebige andere Form heranziehen, deren repräsentierender Punkt in irgend einem von 1 verschiedenen Doppeldreieck des Polygons F_{60} liegt. Wir werden von diesem Umstande gelegentlich Gebrauch machen. Eine Specialbetrachtung erfordern diejenigen Fälle (6), bei denen Transformation *erster* Ordnung vorliegt; wir werden dieselbe weiter unten zu erledigen haben. Für die Untersuchung der Nullpunkte der Factoren f_k im „Innern" des Polygons ist im Vorstehenden der Ansatz vollständig gewonnen. —

Die Untersuchung der $f_k(\zeta, \zeta)$ *in den zwölf inäquivalenten Spitzen* von F_{60} geschieht durch *functionentheoretische* Überlegungen, und wir werden uns zu deren Durchführung vorab mit einer geeigneten Darstellung der $f_k(\zeta, \zeta)$ versehen müssen. Nach Analogie von (2) p. 183 können wir die einzelne der sechzig Modulargleichungen fünfter Stufe in die Gestalt setzen:

$$(7) \qquad \prod_{A,B,D}{}' \left\{\zeta' - \zeta\left(V_k v_D\left(\frac{A\omega + 5B}{D}\right)\right)\right\} = 0;$$

dabei durchlaufen A, B, D der erweiterten Transformation gemäss alle den Bedingungen $AD = n$, $0 \leqq B < D$ genügenden Tripel ganzer Zahlen; v_D ist eine der Congruenz $v_D \equiv \begin{pmatrix} D, & 0 \\ 0, & D^{-1} \end{pmatrix}$ modulo 5 genügende Modulsubstitution, und die Modulsubstitution V_k bestimmt das zur Gleichung (7) gehörende Schema der Transformation. Die linke Seite von (7) ist nun nicht direct $f_k(\zeta', \zeta)$, sondern vielmehr der Quotient von $f_k(\zeta', \zeta)$ und derjenigen rationalen ganzen Function von ζ, welche im Ausdruck von $f_k(\zeta', \zeta)$ der Coefficient der höchsten Potenz von ζ' ist. Aber diese Function von ζ kann offenbar nur in den Spitzen verschwinden oder unendlich werden; also wird der Überschuss der Anzahl der Unstetigkeitspunkte über die Nullpunkte in den Spitzen für $f_k(\zeta, \zeta)$ genau derselbe sein, wie für

$$(8) \qquad \prod_{A,B,D}{}' \left\{\zeta(\omega) - \zeta\left(V_k v_D\left(\frac{A\omega + 5B}{D}\right)\right)\right\},$$

und um diesen Überschuss ist es ja uns einzig zu thun. Es wird also gestattet sein, *unsere Abzählung an dem Producte* (8) *vorzunehmen.*

Aber auch diese Functionen (8) benutzen wir direct nur in dem einen Falle $V_k = V_0 = 1$. Aus $f_0(\zeta', \zeta) = 0$ konnten wir die 59 anderen Gleichungen doch dadurch herstellen, dass wir allein auf ζ' die Ikosaeder-

substitutionen ausübten. Wir setzen demnach jetzt an Stelle der Grössen (8) die sechzig Functionen fünfter Stufe:

$$(9)\qquad h_k(\omega)=\prod_{A,B,D}{}'\left\{\zeta(V_k(\omega))-\zeta\left(v_L\left(\frac{A\omega+5B}{D}\right)\right)\right\}$$

und merken uns übrigens sogleich als das zu (9) gehörige Schema der Transformation nV_k^{-1} an. Indem wir nun aber die Producte (9) der Untersuchung in den Spitzen unterwerfen, wird dadurch, wie man wieder leicht überblickt, im schliesslichen Resultat unserer Abzählung keinerlei Modification bewirkt. Zur grösseren Deutlichkeit schreiben wir noch V_k ausführlich und benutzen die wohlbekannte Wirkung von v_D auf ζ. *So gewinnen wir endlich als explicite Gestalt der in den Spitzen zu untersuchenden Modulfunctionen fünfter Stufe:*

$$(10)\qquad h_k(\omega)=\prod_{A,B,D}{}'\left\{\zeta\left(\frac{\alpha_k\omega+\beta_k}{\gamma_k\omega+\delta_k}\right)-\left(\frac{D}{5}\right)\cdot\zeta^{\left(\frac{L}{5}\right)}\left(\frac{A\omega+5B}{D}\right)\right\},$$

$$R^{(i)}\equiv\begin{pmatrix}n\delta_k, & -n\beta_k\\ -\gamma_k, & \alpha_k\end{pmatrix}.$$

Endlich sind noch ein paar specielle Bemerkungen hinzuzusetzen: Bei *rein quadratischen* n rechnen wir hier im Gegensatz zu der bei der ersten Stufe befolgten Massnahme den Factor

$$(11)\qquad \left\{\zeta(V_k(\omega))-\zeta\left(\frac{\sqrt{n}\,\omega}{\sqrt{n}^{-1}}\right)\right\}$$

im allgemeinen mit; derselbe wird in der That nur für

$$(12)\qquad V_k\equiv\begin{pmatrix}\sqrt{n}, & 0\\ 0, & \sqrt{n}^{-1}\end{pmatrix},\quad R^{(i)}\equiv\begin{pmatrix}\sqrt{n}, & 0\\ 0, & \sqrt{n}\end{pmatrix}$$

identisch verschwinden. Demgemäss sehen wir einzig für dieses Schema vom Factor (11) ab, was wir in den Productzeichen der voraufgehenden Formeln durch den oberen Index andeuteten. Zufolge dieser Sachlage müssen wir nun auch bei der an (6) anknüpfenden arithmetischen Abzählung alle diejenigen Fälle mitzählen, bei denen *eigentliche Transformation erster Ordnung* vorliegt. Es ist nämlich hierbei zu betonen, dass für das besondere Schema $\begin{pmatrix}a, & b\\ c, & d\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}\sqrt{n}, & 0\\ 0, & \sqrt{n}\end{pmatrix}$ überhaupt keine Lösungen V_i von (6) eintreten. Denn wir wissen schon aus den Entwicklungen von § 5 des vorigen Kapitels, dass für den in Rede stehenden Fall die linke Seite von (6), durch $\sqrt{n}$ gehoben, eine der beiden Gestalten $V_i^{-1}TV_i$, $V_i^{-1}UV_i$ aufweist; aber keine von beiden kann $\equiv 1$, mod. 5 sein. Dass übrigens die zur Geltung kommenden

Ordnungen 1 von (6) aus die zwei möglicherweise in das Innere von F_{60} entfallenden Nullpunkte von (11) in richtiger Multiplicität geben, verfolgt man leicht ins einzelne*). Merken wir uns also, *dass auf Grund unserer Verabredung nach Durchführung der arithmetischen Abzählung der Nullpunkte auch für rein quadratische n keinerlei Abzug anzubringen ist.*

Die solcherweise begründeten Ansätze bringen wir nun im Laufe der nächsten Paragraphen zur Erledigung.

§ 3. Arithmetische Abzählung der im Innern von F_{60} gelegenen Nullpunkte der $h(\omega)$.**)

Um im Anschluss an Formel (6) des vorigen Paragraphen die Abzählung der im Innern des Polygons gelegenen Nullpunkte durchzuführen, schreiben wir ausführlich $V_i^{-1} = \begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$, sowie

$$\frac{-Q+\varkappa}{2} = a_1, \quad -R = b_1, \quad P = c_1, \quad \frac{Q+\varkappa}{2} = d_1, \tag{1}$$

so dass die citierte Formel die Gestalt annimmt:

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1, & b_1\\ c_1, & d_1\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}a, & b\\ c, & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}, \text{ (mod. 5)}. \tag{2}$$

Hierbei haben wir uns das Schema $\begin{pmatrix}a, & b\\ c, & d\end{pmatrix}$ als fest gegeben zu denken, während nach einander alle Systeme $(P, Q, R, \varkappa)$ mit $\Delta = 4n - \varkappa^2 > 0$ einzusetzen sind, wobei dann jedesmal die Anzahl incongruenter Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ aus (2) zu bestimmen ist. Man schreibe jetzt erstlich, indem man unter e entweder $+1$ oder -1 versteht, an Stelle von (2) ausführlich:

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha a_1 + \beta c_1 \equiv e(\alpha a + \gamma b),\\ \alpha b_1 + \beta d_1 \equiv e(\beta a + \delta b),\\ \gamma a_1 + \delta c_1 \equiv e(\alpha c + \gamma d),\\ \gamma b_1 + \delta d_1 \equiv e(\beta c + \delta d),\\ \alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1,\end{array}\right\} \text{ (mod. 5)}. \tag{3}$$

*) Man muss dabei benutzen, dass die Operation T innerhalb der G_{60} im ganzen mit vier Substitutionen vertauschbar ist, U aber mit dreien.

**) Für §§ 3 und 5 sind dem Herausgeber neben der Gierster'scher Arbeit in Bd. 20 der Math. Annalen insbesondere die einleitenden Paragraphen der bereits auf p. 203 genannten Hurwitz'schen Arbeit in Bd. 25 der Math. Annalen massgeblich gewesen.

Jetzt unterscheide man die beiden Fälle, dass der Teiler σ von (P, Q, R) *prim gegen* 5 oder *durch* 5 *teilbar* ist.

Im ersteren Falle, den wir zunächst behandeln, dürfen wir (P, Q, R) als repräsentierende Form ihrer Classe so gewählt denken, dass $P = c_1$ selbst prim gegen 5 ist. Alsdann folgt für β und δ aus der ersten und dritten Formel (3):

$$(4)\qquad \begin{cases} \beta \equiv e(\alpha a + \gamma b)\cdot c_1^{-1} - \alpha a_1 \cdot c_1^{-1}, \\ \delta \equiv e(\alpha c + \gamma d)\cdot c_1^{-1} - \gamma a_1 \cdot c_1^{-1}, \end{cases}$$

und durch Einsetzung dieser Werte in die drei andern Congruenzen (3):

$$(5)\qquad \begin{cases} \{(a_1 + d_1) - e(a + d)\}(a\alpha + b\gamma) \equiv 0, \\ \{(a_1 + d_1) - e(a + d)\}(c\alpha + d\gamma) \equiv 0, \\ \qquad c\alpha^2 + (d - a)\alpha\gamma - b\gamma^2 \equiv e c_1. \end{cases}$$

Da n prim gegen 5 ist, so erfordern die ersten beiden Congruenzen (5) notwendig $a_1 + d_1 \equiv e(a + d)$ und kommen damit beide zur Erledigung. Insgesamt ersetzen wir also die fünf Congruenzen (3) durch die vier mit ihnen gleichwertigen:

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_1 + d_1 \equiv e(a + d), \\ c\alpha^2 + (d - a)\alpha\gamma - b\gamma^2 \equiv e c_1, \\ \beta \equiv e(\alpha a + \gamma b)\cdot c_1^{-1} - \alpha a_1 \cdot c_1^{-1}, \\ \delta \equiv e(\alpha c + \gamma d)\cdot c_1^{-1} - \gamma a_1 \cdot c_1^{-1}, \end{array}\right\}, \ (\text{mod. } 5),$$

die wir weiter unten des näheren zu discutieren haben.

Ist nun zweitens (P, Q, R) vom Teiler 5, so ist $a_1 \equiv d_1$, $b_1 \equiv c_1 \equiv 0$, und da zugleich $\Delta = 4n - (a_1 + d_1)^2 \equiv 0$ ist, so ist in diesem Falle notwendig:

$$(7)\qquad a_1 \equiv d_1 \equiv \pm\sqrt{n}, \quad b_1 \equiv c_1 \equiv 0, \ (\text{mod. } 5).$$

Die Congruenzen (3) liefern demgemäss für diesen Fall:

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha a + \gamma b \equiv e\alpha\sqrt{n}, \\ \beta a + \delta b \equiv e\beta\sqrt{n}, \\ \alpha c + \gamma d \equiv e\gamma\sqrt{n}, \\ \beta c + \delta d \equiv e\delta\sqrt{n}, \\ \alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \end{array}\right\}, \ (\text{mod. } 5).$$

Bei der Discussion der Congruenzen (6) und (8) unterscheiden wir die nachfolgenden *drei* Fälle:

I. Δ *relativ prim gegen* 5,

II. $\Delta \equiv 0$, *aber wenigstens eine der Zahlen* b, c *prim gegen* 5,

III. $\Delta \equiv 0, \quad b \equiv c \equiv 0, \quad a \equiv d \equiv \pm \sqrt{n}$.

Im dritten Fall haben wir gleich noch die Congruenz $a \equiv d \equiv \pm \sqrt{n}$ hinzugesetzt, deren Gültigkeit man leicht bestätigt; in der That liest man sie aus (8) unmittelbar ab, während sie sich aus (6) unter Rücksicht auf $\Delta \equiv 4n - (a+d)^2 \equiv 0$, $ad \equiv n$ ergiebt. Übrigens sieht man leicht, dass die Congruenzen (8) nur im Falle III bestehen können, und umgekehrt folgert man für den Fall III sofort aus (3) die Congruenzen (7). *Zum Falle III gehören also die Formen* (P, Q, R) *des Teilers* 5 *und nur diese**).

Discussion des Falles I. Hier hat man das Schema $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ von $\begin{pmatrix} \sqrt{n}, & 0 \\ 0, & \sqrt{n} \end{pmatrix}$ verschieden und zwar dergestalt zu wählen, dass nicht $(a+d)^2 \equiv 4n$ wird. Alsdann ist nach (6_1) die Zahl $\varkappa \equiv e(a+d)$ auszuwählen; sie ist also auf eine bez. zwei Zahlclassen modulo 5 eingeschränkt, je nachdem $a + d \equiv 0$ ist oder nicht. Im letzteren Falle ist e durch $\varkappa$ mitbestimmt, im ersteren wolle man sich die nachfolgende Betrachtung sowohl für $e = +1$ wie für $e = -1$ durchgeführt denken. Nach Bestimmung von $\varkappa$, e wähle man nunmehr aus der einzelnen Classe der Determinante $-\Delta = -(4n - \varkappa^2)$ eine geeignete Form (P, Q, R) und löse die Congruenz (6_2) d. i.

$$(9) \qquad c\alpha^2 + (d-a)\alpha\gamma - b\gamma^2 \equiv eP, \; (\text{mod. } 5).$$

Wir werden sogleich noch zeigen, dass die Gesamtheit incongruenter Lösungen α, γ (sofern wir $-\alpha$, $-\gamma$ und α, γ nicht als verschieden ansehen)

$$(10) \qquad \frac{1}{2}\left[5 - \left(\frac{\Delta}{5}\right)\right]$$

ist. Vorab folgere man weiter, dass für jede Lösung α, γ die beiden letzten Congruenzen (6) eindeutig ein zugehöriges Paar β, δ liefern. *Im Falle I finden wir also als Gesamtzahl* ν *aller gesuchten Nullpunkte:*

$$(11) \qquad \nu = \frac{1}{2}\left[5 - \left(\frac{\Delta}{5}\right)\right] \cdot \sum_{\varkappa \equiv \pm(a+d)} \mathrm{H}(4n - \varkappa^2),$$

wobei die ganze Zahl $\varkappa$ *ausser durch die bereits in* (11) *angedeutete Congruenz noch auf das Intervall eingeschränkt ist:*

*) Natürlich tritt III nur für $\left(\frac{n}{5}\right) = +1$ ein und wird uns da die besondere Classenzahlrelation liefern, welche wir vorhin (p. 206) der reellen ζ-Axe zugeordnet dachten.

$$-2\sqrt{n} < \varkappa < 2\sqrt{n}.$$

Wir betonen noch, dass auch für $a + d \equiv 0$ beide Vorzeichen $\varkappa \equiv \pm(a + d)$ besonders zu zählen sind, weil doch hier neben $e = +1$ noch $e = -1$ zur Geltung kommen muss.

Nachträglich ist noch zu zeigen, dass die Anzahl der verschiedenen Lösungen von (9) wirklich durch (10) gegeben ist. Haben wir aber $b \equiv c \equiv 0$, so ist $\Delta \equiv -(a - d)^2$ quadratischer Rest, und in der That liefert $(d - a)\alpha\gamma \equiv eP$ in Übereinstimmung mit (10) zwei verschiedene Lösungen α, γ. Sind nicht beide Zahlen b, c durch 5 teilbar, so sei etwa c prim gegen 5 (falls nur b prim gegen 5 ist, gestaltet sich die Überlegung ganz analog). Wir finden dann:

$$(12) \qquad c\alpha \equiv \frac{a-d}{2} \cdot \gamma \pm \sqrt{ecP\left(1 + \frac{e\Delta}{cP} \cdot \gamma^2\right)},$$

und hier ist γ stets nur so zu wählen, dass $\left(1 + \frac{e\Delta}{cP} \cdot \gamma^2\right)$ im quadratischen Charakter mit cP übereinstimmt oder durch 5 teilbar wird. Die Einzeldiscussion dieser Forderung führt für $\Delta \equiv \pm 1$ auf zwei, für $\Delta \equiv \pm 2$ aber auf drei wesentlich verschiedene Lösungen α, γ, abermals in Übereinstimmung mit (10).

Discussion des Falles II. Haben wir ein Schema, für welches $(a + d)^2 \equiv 4n$ ist, während nicht beide Zahlen b, c durch 5 teilbar sind, so liegen der Fall II und damit die Congruenzen (6) vor. Es folgt erstlich $\varkappa \equiv e(a + d) \equiv \pm 2\sqrt{n}$, so dass mit richtig gewähltem $\varkappa$ stets auch e bestimmt ist. Die zweite Congruenz (6) nimmt, je nachdem b oder c prim gegen 5 ist, die erste oder zweite der Gestalten

$$(13) \qquad \left\{\begin{aligned} \left(b\gamma - \frac{d-a}{2}\alpha\right)^2 &\equiv ebP \\ \left(c\alpha + \frac{d-a}{2}\gamma\right)^2 &\equiv ecP \end{aligned}\right\} \pmod{5}$$

an, und man zieht daraus als notwendige Bedingung:

$$(14) \qquad \left(\frac{P}{5}\right) = \left(\frac{b}{5}\right), \text{ bez. } \left(\frac{P}{5}\right) = \left(\frac{c}{5}\right).$$

Sind übrigens b und c prim gegen 5, so folgt aus $(a + d)^2 \equiv 4(ad - bc)$ sehr leicht, dass b und c im quadratischen Charakter mod. 5 übereinstimmen.

Nun zeigt man bei Gelegenheit der Einteilung der quadratischen Formen in Geschlechter*), dass in der einzelnen Classe für *alle* Formen

*) Cf. Dirichlet-Dedekind, *Zahlentheorie* p. 313 (3. Aufl.).

mit nicht durch 5 teilbaren ersten Coefficienten P die Werte der Legendre'schen Zeichen $\left(\frac{P}{5}\right)$ übereinstimmend ausfallen. Sind alle $\left(\frac{P}{5}\right) = +1$, so mögen wir die betreffende Classe als eine solche vom Charakter $+1$ bezeichnen, im anderen Falle als eine vom Charakter -1. Je nachdem b bez. c Rest oder Nichtrest ist, dürfen wir nur Formen vom Charakter $+1$ resp. -1 zulassen. Für jede brauchbare Form liefert aber (13), wie man sofort abzählt, im ganzen *fünf* verschiedene Lösungen α, γ. *Ist also bei einem durch* 5 *teilbaren* Δ $\mathsf{H}_{+1}(\Delta)$ *die Anzahl der Classen vom Charakter* $+1$, $\mathsf{H}_{-1}(\Delta)$ *dagegen die Anzahl der Classen vom Charakter* -1, *so findet sich im Falle II als Gesamtzahl* ν *der abzuzählenden Nullpunkte bez.*

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \nu &= 5\sum_{\varkappa\equiv\pm 2\sqrt{n}}' \mathsf{H}_{+1}(4n-\varkappa^2)\\ \nu &= 5\sum_{\varkappa\equiv\pm 2\sqrt{n}}' \mathsf{H}_{-1}(4n-\varkappa^2)\end{aligned}\right\},\quad -2\sqrt{n}<\varkappa<2\sqrt{n},$$

je nachdem b *bez.* c *Rest oder Nichtrest von* 5 *ist.*

Discussion des Falles III. Bei dem nun allein noch bleibenden Schema $\begin{pmatrix}\sqrt{n}, & 0\\ 0, & \sqrt{n}\end{pmatrix}$ liefern die Congruenzen (8) für e den Wert 1 und sind damit von selbst für alle sechzig incongruenten Substitutionen erfüllt. Die Zahl $\varkappa$ ist wieder $\equiv \pm 2\sqrt{n}$ zu wählen, und es kommen hier gerade die gesamten Formen der Determinante $-\frac{4n-\varkappa^2}{25}$ (so oft dies eine ganze Zahl ist) zur Geltung, falls wir diese Formen erst noch mit dem Factor 5 multipliciert denken. Wir sehen sofort: *Die Gesamtzahl der im Falle III im Innern des Polygons abzuzählenden Nullpunkte ist:*

$$(16)\qquad \nu = 60\sum_{\varkappa\equiv\pm 2\sqrt{n}}' \mathsf{H}\left(\frac{4n-\varkappa^2}{25}\right),\quad -2\sqrt{n}<\varkappa<2\sqrt{n},$$

wobei noch hinzuzusetzen ist, dass alle H *mit nicht ganzzahligen Argumenten den Wert Null haben sollen.*

Hiermit ist die arithmetische Abzählung zur vollen Erledigung gebracht.

§ 4. Erster Teil der functionentheoretischen Untersuchung der $h_i(\omega)$ in den Polygonspitzen.

Auch bei der functionentheoretischen Untersuchung der Grössen:

$$(1) \qquad h_i(\omega) = \prod_{A,B,D}{}' \left\{ \zeta\left(\frac{\alpha_i\omega+\beta_i}{\gamma_i\omega+\delta_i}\right) - \left(\frac{D}{5}\right)\cdot \zeta^{\left(\frac{D}{5}\right)}\left(\frac{A\omega+5B}{D}\right) \right\},$$

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} n\delta_i, & -n\beta_i \\ -\gamma_i, & \alpha_i \end{pmatrix}$$

in den zwölf inäquivalenten Polygonspitzen $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ haben wir eine Reihe von Fallunterscheidungen zu treffen.

Wir betrachten in diesem Paragraphen nur erst die Spitzen:

$$(2) \qquad \frac{\alpha}{\gamma} \equiv i\infty, \quad \frac{2}{5}, \quad -\frac{\delta_i}{\gamma_i}, \quad -\frac{2\delta_i}{2\gamma_i};$$

sie allein sind es, in denen das erste oder zweite Glied im einzelnen Factor von (1) zu verschwinden oder unendlich zu werden vermag, und zwar liefern die ersten beiden Spitzen (2) jeweils für die zweiten Glieder der Factoren (1) die Null- und Unstetigkeitspunkte, die dritte und vierte Spitze (2) aber entsprechend für die ersten Glieder. Die Multiplicität des Unendlichwerdens von h_i in der einzelnen Spitze (2) ist natürlich immer im Polygon F_{60} zu messen; Unstetigkeitspunkte negativer Ordnung sind selbstverständlich Nullpunkte. — Des weiteren sondern wir hier die Fälle $c \equiv -\gamma_i \equiv 0 \pmod{5}$, wo die vier Spitzen (2) zu Paaren coincidieren, von den anderen $c \gtrless 0 \pmod{5}$. Mit den letzteren Fällen, bei denen in (2) vier unterschiedene Spitzen vorliegen, beginnen wir.

Für $c \equiv -\gamma_i \gtrless 0$ nimmt (1) bei $\omega = i\infty$ angenähert die Form an:

$$(3) \qquad h_i = \prod \left\{ \zeta\left(\frac{\alpha_i}{\gamma_i}\right) - \left(\frac{D}{5}\right) e^{\frac{2i\pi B}{D}\cdot\left(\frac{D}{5}\right)} \cdot r^{\left(\frac{D}{5}\right)\frac{A}{5D}} \right\};$$

alle Factoren mit $\left(\frac{D}{5}\right) = +1$ sind endlich und von Null verschieden, diejenigen mit $\left(\frac{D}{5}\right) = -1$ dagegen unendlich wie $r^{-\frac{A}{5D}}$. Verstehen wir also unter C bis auf weiteres immer irgend welche endliche, nicht-verschwindende Constante und erinnern uns übrigens, dass bei stehendem A, D die Zahl B über ein Restsystem modulo D auszudehnen ist, so folgt:

$$(4) \qquad h_i = C \cdot \prod_{A,B,D} r^{\frac{A}{5D}\cdot\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{D}{5}\right)-1\right\}} = C \cdot r^{-\frac{1}{10}\sum\limits_{A}\left\{A - \left(\frac{D}{5}\right)A\right\}}.$$

In Worten: *Bei $\omega = i\infty$ wird h_i für $c \gtrless 0$ unendlich im Grade:*

$$\tag{5} \frac{1}{2}\sum_A \left\{A - \left(\frac{D}{5}\right)A\right\},$$

summiert über alle Teiler A von n.

Statt $h_i(\omega)$ jetzt ferner bei $\omega = \frac{2}{5}$ zu untersuchen, betrachte man $h_i(v_2(\omega))$ bei $\omega = i\infty$*). Dabei kommen jeweils als zweite Glieder der Producte (1) die Grössen $\zeta\left(v_D\left(\frac{Av_2(\omega)+5B}{D}\right)\right)$ zum Vorschein; und man bemerke, dass hier in den Argumenten ein Repräsentantensystem fünfter Stufe vom Schema $\begin{pmatrix}2n, & 0\\ 0, & 3\end{pmatrix}$ sich einfindet. Dieses stellten wir aber sonst**) in der Form $v_2 v_D\left(\frac{A\omega+5B}{D}\right) \equiv v_{2D}\left(\frac{A\omega+5B}{D}\right)$ dar, und es werden demgemäss die Grössen

$$\zeta\left(v_D\left(\frac{Av_2(\omega)+5B}{D}\right)\right) \quad \text{und} \quad \zeta\left(v_{2D}\left(\frac{A\omega+5B}{D}\right)\right)$$

von der Reihenfolge abgesehen identisch ausfallen. Wir haben also zufolge der Wirkung von v_2 auf ζ bei $\omega = i\infty$ gegenwärtig

$$\tag{6} \prod\left\{C_k + \left(\frac{D}{5}\right)\cdot \zeta^{-\left(\frac{D}{5}\right)}\left(\frac{A\omega+5B}{D}\right)\right\} = C\cdot r^{-\frac{1}{10}\sum\limits_A\left\{A+\left(\frac{D}{5}\right)A\right\}}$$

abzuschätzen. Somit folgt: *Bei $\omega = \frac{2}{5}$ wird h_i für $c \gtrless 0$ im Grade*

$$\tag{7} \frac{1}{2}\sum_A\left\{A + \left(\frac{D}{5}\right)A\right\}$$

unendlich.

Im dritten und vierten Punkte (2) ist das zweite Glied im einzelnen Factor (1) stets endlich und von Null verschieden, während das erste Glied in der dritten Spitze (2) verschwindet, in der vierten aber einfach unendlich wird. Es folgt: *h_i bleibt in der dritten Spitze (2) endlich und von Null verschieden, in der vierten liegt ein Unstetigkeitspunkt der Ordnung $\Phi(n)$.*

Fassen wir jetzt zusammen, so entspringt das Resultat: *Für $c \gtrless 0$ modulo 5 wird $h_i(\omega)$ in den vier Spitzen (2) im ganzen im Grade*

$$\tag{8} \Phi(n) + \frac{1}{2}\sum_A\left\{A - \left(\frac{D}{5}\right)A\right\} + \frac{1}{2}\sum_A\left\{A + \left(\frac{D}{5}\right)A\right\} = 2\Phi(n)$$

unendlich.

---

*) Die Substitution v_2 ist hier natürlich gerade in jener Bedeutung gebraucht, wie in § 2 allgemein v_D.

**) Man vgl. die oben p. 107 u. f. entwickelten Sätze über Repräsentantensysteme.

Für $c \equiv -\gamma_i \equiv 0 \pmod{5}$ brauchen wir nur in den beiden Spitzen $\omega = i\infty$, $\frac{2}{5}$ zu untersuchen. Hier benutzen wir für die ersten Glieder in den Factoren von (1) (nach I p. 615 (8)) die Gleichung:

$$\zeta\left(\frac{\alpha_i\omega+\beta_i}{\delta_i}\right) = \left(\frac{\delta_i}{5}\right)\cdot\zeta^{\left(\frac{\delta_i}{5}\right)}(\omega+\beta_i\delta_i) = \varepsilon^{\left(\frac{\delta_i}{5}\right)\beta_i\delta_i}\cdot\left(\frac{\delta_i}{5}\right)\cdot\zeta^{\left(\frac{\delta_i}{5}\right)}(\omega),$$

wofür wir auf Grund der in der zweiten Formel (1) angedeuteten Bezeichnungsweise auch

$$\zeta\left(\frac{\alpha_i\omega+\beta_i}{\delta_i}\right) = \varepsilon^{-\left(\frac{d}{5}\right)\kappa^2 ab}\cdot\left(\frac{d}{5}\right)\cdot\zeta^{\left(\frac{d}{5}\right)}(\omega)$$

schreiben können. Für $h_i(\omega)$ entspringt also die Gestalt:

$$(9)\qquad h_i(\omega) = \prod{}'\left\{\varepsilon^{-\frac{b}{a}}\cdot\left(\frac{d}{5}\right)\cdot\zeta^{\left(\frac{d}{5}\right)}(\omega) - \left(\frac{D}{5}\right)\cdot\zeta^{\left(\frac{D}{5}\right)}\left(\frac{A\omega+5B}{D}\right)\right\}.$$

Untersuchen wir den hiermit gewonnenen Ausdruck zunächst bei $\omega = i\infty$, so haben wir die Annäherungen:

$$(10)\begin{cases} \text{für } \left(\frac{d}{5}\right) = +1, & \prod{}'\left\{+\varepsilon^{-\frac{b}{a}}r^{+\frac{1}{5}} - \left(\frac{D}{5}\right)e^{\frac{2i\pi B}{D}\left(\frac{D}{5}\right)}r^{\left(\frac{D}{5}\right)\frac{A}{5D}}\right\}, \\ \text{für } \left(\frac{d}{5}\right) = -1, & \prod{}'\left\{-\varepsilon^{-\frac{b}{a}}r^{-\frac{1}{5}} - \left(\frac{D}{5}\right)e^{\frac{2i\pi B}{D}\left(\frac{D}{5}\right)}r^{\left(\frac{D}{5}\right)\frac{A}{5D}}\right\}. \end{cases}$$

Hier bemerke man vorab, dass in keinem Factor die beiden Glieder mit einander identisch ausfallen können. Solches würde nur möglich sein, falls

$$A = D = \sqrt{n},\quad \left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right) = \left(\frac{d}{5}\right),\quad d \equiv \pm\sqrt{n},\quad e^{\frac{2i\pi B}{\sqrt{n}}\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)} = e^{-\frac{2i\pi}{5}ba'}$$

wäre. Dann hätten wir, da n prim gegen 5, auch $B = 0$, $b \equiv 0$, $a \equiv d \equiv \pm\sqrt{n} \pmod{5}$; es würde also gerade der bei rein quadratischen n und beim Schema $\begin{pmatrix}\sqrt{n}, & 0\\ 0, & \sqrt{n}\end{pmatrix}$ ausgeschlossene Factor vorliegen. Zählen wir übrigens bei der Abschätzung des Unendlichwerdens von (10) die Combination $A = D = \sqrt{n}$, $B = 0$ im gekennzeichneten Falle mit, so ist offenbar im fertigen Resultat bei $\left(\frac{d}{5}\right) = 1$ noch eine Einheit zu addieren, bei $\left(\frac{d}{5}\right) = -1$ aber zu subtrahieren. Hiervon rührt in den unten stehenden Formeln der Bestandteil η_n her, der im

allgemeinen gleich Null, jedoch für rein quadratisches n beim Schema $\begin{pmatrix}\sqrt{n}, & 0\\ 0, & \sqrt{n}\end{pmatrix}$ der Einheit gleich sein soll.

Im einzelnen Factor von (10_1) giebt für $\left(\frac{D}{5}\right) = -1$, sowie für $\left(\frac{D}{5}\right) = +1$, $A \leqq D$ das zweite Glied den Ausschlag für das Verhalten des ganzen Factors, für $\left(\frac{D}{5}\right) = +1$, $A > D$ aber das erste. Einen entsprechenden Satz stellt man für (10_2) ohne Schwierigkeit auf. Indem aber immer D Factoren beim einzelnen Paare A, D auftreten, ist offenbar die Multiplicität des Unendlichwerdens von (10)

$$(11)\begin{cases} \text{für } \left(\frac{d}{5}\right) = +1, & \frac{1}{2}\sum\limits_{A}\left\{1-\left(\frac{D}{5}\right)\right\}A - \frac{1}{2}\sum\limits_{A\leqq D}\left\{1+\left(\frac{D}{5}\right)\right\}A \\ & \qquad - \frac{1}{2}\sum\limits_{A>D}\left\{1+\left(\frac{D}{5}\right)\right\}D + \eta_n, \\ \text{für } \left(\frac{d}{5}\right) = -1, & \frac{1}{2}\sum\limits_{D}\left\{1+\left(\frac{D}{5}\right)\right\}D + \frac{1}{2}\sum\limits_{A<D}\left\{1-\left(\frac{D}{5}\right)\right\}D \\ & \qquad + \frac{1}{2}\sum\limits_{A>D}\left\{1-\left(\frac{D}{5}\right)\right\}A - \eta_n. \end{cases}$$

Statt $h_i(\omega)$ bei $\omega = \frac{2}{5}$ zu untersuchen, werden wir wieder $h_i(v_2(\omega))$ bei $\omega = i\infty$ untersuchen. Hierbei wähle man $v_2 \equiv 1 \pmod{n}$, wodurch der Vorteil erreicht wird, dass die Transformation $\frac{A v_2(\omega) + 5B}{D}$ direct auf $v_2\left(\frac{A\omega + 5B}{D}\right)$ mit denselben A, B, D zurückkommt. Es tritt demnach jetzt an Stelle von (9) offenbar die Formel:

$$(12)\quad h_i'(\omega) = \pm\prod{}'\left\{\varepsilon^{-a^2 b}\cdot\left(\frac{d}{5}\right)\cdot\zeta^{-\left(\frac{d}{5}\right)}(\omega) - \left(\frac{D}{5}\right)\cdot\zeta^{-\left(\frac{D}{5}\right)}\left(\frac{A\omega+5B}{D}\right)\right\}.$$

Als Annäherungen bei $\omega = i\infty$ finden wir demgemäss:

$$(13)\begin{cases} \left(\frac{d}{5}\right) = +1, & h_i' = \pm\prod{}'\left\{\varepsilon^{-a^2 b}r^{-\frac{1}{5}} - \left(\frac{D}{5}\right)e^{-\frac{2i\pi B}{D}\left(\frac{D}{5}\right)}r^{-\left(\frac{D}{5}\right)\frac{A}{5D}}\right\}, \\ \left(\frac{d}{5}\right) = -1, & h_i' = \pm\prod{}'\left\{\varepsilon^{-a^2 b}r^{+\frac{1}{5}} - \left(\frac{D}{5}\right)e^{-\frac{2i\pi B}{D}\left(\frac{D}{5}\right)}r^{-\left(\frac{D}{5}\right)\frac{A}{5D}}\right\}, \end{cases}$$

deren Discussion sich im einzelnen wieder gerade so gestaltet wie diejenige der Formeln (10). Wir finden als Ordnungen des Unendlichwerdens:

$$(14)\quad \begin{cases} \left(\frac{d}{5}\right) = +1, & \frac{1}{2}\sum\limits_{D}\left\{1-\left(\frac{D}{5}\right)\right\}D + \frac{1}{2}\sum\limits_{A\leqq D}\left\{1+\left(\frac{D}{5}\right)\right\}D \\ & \qquad + \frac{1}{2}\sum\limits_{A>D}\left\{1+\left(\frac{D}{5}\right)\right\}A - \eta_n, \\ \left(\frac{d}{5}\right) = -1, & \frac{1}{2}\sum\limits_{A}\left\{1+\left(\frac{D}{5}\right)\right\}A - \frac{1}{2}\sum\limits_{A\leqq D}\left\{1-\left(\frac{D}{5}\right)\right\}A \\ & \qquad - \frac{1}{2}\sum\limits_{A>D}\left\{1-\left(\frac{D}{5}\right)\right\}D + \eta_n. \end{cases}$$

Wie in Formel (8) werden wir auch hier wieder die Multiplicitäten des Unendlichwerdens vom einzelnen h_i bei $\omega = i\infty$ und $\omega = \frac{2}{5}$ zusammenfügen. Es empfiehlt sich dabei, neben den bisherigen $\Phi(n)$, $\Psi(n)$ von *zwei neuen zahlentheoretischen Functionen* Gebrauch zu machen, die wir durch die Formeln:

$$(15)\qquad \Psi_{\pm 1}(n) = \sum_{D>A}\left\{D \pm \left(\frac{A}{5}\right)A\right\} + \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_n\sqrt{n}\left\{1 \pm \left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)\right\}$$

definieren. Im zweiten Gliede des einzelnen Summanden hat natürlich, wie bislang immer, A die Bedeutung von $\frac{n}{D}$, und wir brauchen im übrigen ε_n in demselben Sinne wie im vorigen Kapitel (p. 182 u. f.), wonach ε_n für rein quadratische n gleich 1, sonst stets gleich Null ist.

Jetzt setze man n zuvörderst als *quadratischen Rest von* 5 voraus, so dass A und D im quadratischen Charakter übereinstimmen, und addiere erstlich für $\left(\frac{d}{5}\right) = 1$ die beiden Zahlen (11) und (14). Wir finden als Summe nach einigen leichten Umgestaltungen:

$$(16)\qquad \sum_{D\geqq A}\left\{D - \left(\frac{A}{5}\right)A\right\} + \sum_{D>A}\left\{D - \left(\frac{A}{5}\right)A\right\} = 2\Psi_{-1}(n).$$

Ist zweitens $\left(\frac{d}{5}\right) = -1$, so ergiebt sich entsprechend:

$$(17)\qquad \sum_{D\geqq A}\left\{D + \left(\frac{A}{5}\right)A\right\} + \sum_{D>A}\left\{D + \left(\frac{A}{5}\right)A\right\} = 2\Psi_{+1}(n).$$

Noch einfacher wird das Resultat bei *quadratischen Nichtresten* n. Indem wir hier das schon oben erklärte Zeichen $\Psi(n)$ wieder benutzen (cf. (7) p. 184), kommt unabhängig vom quadratischen Charakter von d durch Addition von (11) und (14):

$$(18)\qquad \Phi(n) + \Psi(n).$$

Fassen wir also zusammen: *Die zu* $c \equiv 0$ *gehörenden Functionen* $h_i(\omega)$ *werden in den Spitzen* (2) *zusammengenommen in den nachfolgenden Graden unendlich:*

$$(19)\qquad \begin{cases} \textit{für } \left(\frac{n}{5}\right) = +1, & 2\Psi_{-\left(\frac{d}{5}\right)}(n), \\ \textit{für } \left(\frac{n}{5}\right) = -1, & \Phi(n) + \Psi(n). \end{cases}$$

§ 5. Zweiter Teil der Untersuchung der $h_i(\omega)$ in den Polygonspitzen.

In den rückständigen acht bez. zehn Polygonspitzen können jedenfalls für das einzelne $h_i(\omega)$ keine Unstetigkeitspunkte mehr vorkommen; dagegen mögen sehr wohl noch Nullpunkte auftreten. Solche würden davon herrühren müssen, dass in einer Spitze die beiden Glieder $\zeta(V_i(\omega))$ und $\zeta\left(v_D\left(\frac{A\omega + 5B}{D}\right)\right)$ des einzelnen Factors unseres Productes $h_i(\omega)$ zwar endlich und von Null verschieden, jedoch mit einander übereinstimmend ausfielen; die Anzahl derartiger Nullpunkte von h_i haben wir jetzt noch festzustellen.

Die Durchführung dieser Aufgabe erleichtern wir uns nun bedeutend durch die folgenden Massnahmen. Erstlich ziehen wir nicht direct die Gestalt (9) p. 212 von $h(\omega)$ zur Untersuchung heran; wir betrachten vielmehr:

$$(1)\qquad h_i'(\omega) = h_i(V_i^{-1}(\omega)) = \prod_k{}' \{\zeta(\omega) - \zeta(R_k(\omega))\},\quad R_k \equiv \begin{pmatrix} a_i, & b_i \\ c_i, & d_i \end{pmatrix}$$

und lassen, wie bisher, auch wohl kurz die unteren Indices i in der Bezeichnung des gerade vorliegenden Schemas sowie bei h_i' fort. Die Function h_i' ist alsdann nur in den Spitzen $\frac{\alpha}{\gamma}$ mit $\gamma \gtrless 0 \pmod{5}$ zu untersuchen. Solche Spitzen, von denen das zweite Glied eines Factors (1) unendlich wird*), bleiben dann schon von selbst ausser Betracht, insofern wir nur nach denjenigen Spitzen suchen, in welchen $\zeta\left(R_k\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)\right)$ mit $\zeta\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ identisch ausfällt.

Im weiteren werden wir uns das Repräsentantensystem R_k möglichst zweckmässig wählen. Die Brauchbarkeit der Repräsentanten $\begin{pmatrix} A, & B \\ 0, & D \end{pmatrix}$ beruht auf deren naher Beziehung zur Spitze $\omega = i\infty$.

*) Wir wissen aus vorigem Paragraphen, dass in zwei gewissen Spitzen für die in Rede stehenden zweiten Glieder lauter Null- bez. Unstetigkeitspunkte liegen, indem *keines* dort endlich und von Null verschieden ist.

Wollen wir also Untersuchungen am Punkte $\frac{\alpha}{\gamma}$ durchführen, so wählen wir uns erstlich eine zugehörige Modulsubstitution:

$$(2) \qquad \omega' = v(\omega) = \frac{+\delta\omega - \beta}{-\gamma\omega + \alpha}$$

und haben dann als zweckmässigstes Repräsentantensystem für erweiterte Transformation *erster* Stufe:

$$(3) \qquad \frac{Av(\omega) + B}{D} = \frac{A\omega' + B}{D}, \quad AD = n, \quad 0 \leqq B < D.$$

Um daraus ein System fünfter Stufe vom richtigen Schema zu gewinnen, müssen wir vor jede Transformation (3) noch eine speciell gewählte Modulsubstitution V_k derart vorsetzen, dass:

$$(4) \qquad R_k(\omega) = \frac{a_k\omega + b_k}{c_k\omega + d_k} = V_k\left(\frac{Av(\omega) + B}{D}\right) \equiv \frac{a\omega + b}{c\omega + d}, \text{ (mod. 5)}$$

erfüllt ist. Demgemäss haben wir an Stelle von (1) ausführlicher:

$$(5) \quad h'(\omega) = \prod{}' \left\{\zeta(\omega) - \zeta\left(V_k\left(\frac{Av(\omega) + B}{D}\right)\right)\right\}, \; AD = n, \; 0 \leqq B < D;$$

man überzeugt sich übrigens leicht, dass der im Falle eines quadratischen n beim Schema $\begin{pmatrix}\sqrt{n}, & 0\\ 0, & \sqrt{n}\end{pmatrix}$ auszuschliessende Repräsentant wieder durch $A = D = \sqrt{n}$, $B = 0$ gegeben ist.

Wir nehmen jetzt vorab an, ein einzelner Factor von (5) verschwinde in der Spitze $\frac{\alpha}{\gamma}$, und wollen dann gleich erst feststellen, welche Multiplicität dieser Nullpunkt aufweist. Zu dem Ende schreiben wir unter Rückgang auf (2) den fraglichen Factor in der Gestalt:

$$(6) \qquad \zeta\left(\frac{\alpha\omega' + \beta}{\gamma\omega' + \delta}\right) - \zeta\left(V_k\left(\frac{A\omega' + B}{D}\right)\right)$$

und haben offenbar sein Verschwinden bei $\omega' = i\infty$ im Polygon F_{60}' zu bestimmen. In der Spitze $\omega' = i\infty$ wird übereinstimmend der Wert für das erste und zweite Glied von (6) der endlichen Zahl $\zeta_0 = \zeta\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ gleichkommen. Zufolge der Eigenart des ζ, sich gegenüber den Modulsubstitutionen selbst linear zu substituieren, ergiebt sich aber:

$$(7) \qquad \begin{aligned} \zeta\left(\frac{\alpha\omega' + \beta}{\gamma\omega' + \delta}\right) - \zeta_0 &= \frac{\mathsf{A}\zeta(\omega')}{\mathsf{A}'\zeta(\omega') + 1}, \\ \zeta\left(V_k\left(\frac{A\omega' + B}{D}\right)\right) - \zeta_0 &= \frac{\mathsf{B}\zeta\left(\frac{A\omega' + B}{D}\right)}{\mathsf{B}'\zeta\left(\frac{A\omega' + B}{D}\right) + 1}, \end{aligned}$$

und hier bedeuten die Coefficienten A, B, wie auch ζ_0, gewisse rationale Combinationen fünfter Einheitswurzeln, wie aus der Structur der Ikosaedersubstitutionen hervorgeht. Wir gewinnen aus (7) sofort

$$\lim_{\omega'=i\infty}\left\{\zeta\left(\frac{\alpha\omega'+\beta}{\gamma\omega'+\delta}\right)-\zeta\left(V_k\left(\frac{A\omega'+B}{D}\right)\right)\right\} = \mathsf{A}r'^{\frac{1}{5}} - \mathsf{B}\cdot e^{\frac{2i\pi B}{5D}}r'^{\frac{A}{5D}}. \tag{8}$$

Man setze nun den Fall, auf der rechten Seite von (8) sei der Minuend mit dem Subtrahenden identisch. Dann ist $A=D=\sqrt{n}$ und also n ein reines Quadrat; da aber n prim gegen 5 ist, so würde weiter bei der Bedeutung der A, B für B der Wert 0 entspringen. Aus $\mathsf{A}=\mathsf{B}$ würde sich endlich vermöge (7) die Congruenz $V_k\equiv v^{-1}$ (mod. 5) ergeben*), so dass nach (4) das Schema $\begin{pmatrix}\sqrt{n}, & 0\\ 0, & \sqrt{n}\end{pmatrix}$ vorliegen würde; bei diesem aber haben wir gerade von $A=D=\sqrt{n}$, $B=0$ Abstand genommen. Hiernach ergiebt ein Blick auf (8) das Resultat: *Verschwindet ein Factor von* (5) *in der Spitze* $\omega=\frac{\alpha}{\gamma}$, *so ist die Multiplicität dieses Nullpunktes gleich* 1, *so oft* $A\geqq D$ *ist, jedoch gleich* $\frac{A}{D}$, *falls* $A<D$ *zutrifft.*

Bei Abzählung der jetzt in Rede stehenden Nullpunkte werden wir ein neues zahlentheoretisches Symbol brauchen, welches wir hier gleich vorher erklären, um weiterhin die Entwicklung nicht zu unterbrechen. Wir definieren dasselbe durch:

$$\mathsf{X}_\nu(n)=\sum_{A<D,\,A\equiv\pm\nu} A+\Theta_n^{(\nu)}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{n}\,; \tag{9}$$

dabei ist ν als eine ganze gegen 5 prime Zahl gedacht, und es ist $\Theta_n^{(\nu)}=1$ für rein quadratische n, falls zugleich $\nu\equiv\pm\sqrt{n}$ ist, sonst soll jedoch stets $\Theta_n^{(\nu)}=0$ sein. Setzen wir übrigens sogleich hinzu, dass es uns späterhin gelingen wird, die in (9) definierte zahlentheoretische Function durch die bisherigen $\Phi, \Psi, \Psi_{\pm 1}$ auszudrücken.

Soll nun ein Factor von (5) bei $\omega=\frac{\alpha}{\gamma}$ verschwinden, so müssen $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $R_k\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)=\frac{a_k\alpha+b_k\gamma}{c_k\alpha+d_k\gamma}$ relativ äquivalente Spitzen sein. Für Zähler und Nenner des letzten Bruches berechnet man übrigens aus (4) die Zahlen $\alpha_k A$ bez. $\gamma_k A$, und deren grösster gemeinsamer Teiler

*) Mit Rücksicht auf die Gestalt der Ikosaedersubstitutionen („Ikos." p. 43) folgert man nämlich aus $\mathsf{A}=\mathsf{B}$ sofort auch $\mathsf{A}'=\mathsf{B}'$.

ist offenbar A. Die relative Äquivalenz jener rationalen reellen Punkte kleidet sich also explicite in die beiden Congruenzen:

$$(10) \qquad a_k\alpha + b_k\gamma \equiv eA\alpha, \quad c_k\alpha + d_k\gamma \equiv eA\gamma, \ (\text{mod. } 5),$$

in denen e entweder gleich $+1$ oder -1 ist. Hier können wir die Zahlen a_k, b_k, c_k, d_k direct durch die vier Zahlen a, b, c, d des vorliegenden Schemas ersetzen und haben also an Stelle von (10) das System der Congruenzen:

$$(11) \qquad \left.\begin{array}{r} (a - eA)\alpha + b\gamma \equiv 0 \\ c\alpha + (d - eA)\gamma \equiv 0 \end{array}\right\} (\text{mod. } 5)\cdot$$

zu discutieren. Bemerkenswert an (11) ist, dass die Zahl B ganz ausser Betracht bleibt; mit einem verschwindenden Factor von (5) finden wir deren also gleich D, indem B bei stehenden A, D ein volles Restsystem modulo D zu durchlaufen hat. Nehmen wir obiges Resultat über die Multiplicität der Nullpunkte hinzu, so folgt offenbar: *Bei gegebenem Schema wird jeder möglichen Lösung von* (11) *in ganzen Zahlen* A, α, γ, *von denen die erste Teiler von* n *und die letzte prim gegen* 5 *ist, ein* D*-facher resp.* A*-facher Nullpunkt in der Spitze* $\frac{\alpha}{\gamma}$ *entsprechen, je nachdem* $A \geqq D$ *oder* $A < D$ *ist.*

Sollen die Congruenzen (11) zusammenbestehen, so muss

$$(a - eA)(d - eA) - bc \equiv n - eA(a + d) + A^2 \equiv 0$$

erfüllt sein. Hier heben wir einerseits durch A und folgern:

$$(12) \qquad A + D \equiv e(a + d), \ (\text{mod. } 5),$$

andrerseits entspringen unter Gebrauch der früheren Bezeichnung $\Delta = 4n - (a + d)^2$ für A und D die Congruenzen:

$$(13) \qquad \left\{\begin{array}{l} eA \equiv 3(a + d) \pm \sqrt{\Delta} \\ eD \equiv 3(a + d) \mp \sqrt{\Delta} \end{array}\right\} (\text{mod. } 5).$$

Durch Einsetzung des für eA gefundenen Wertes nehmen die für α, γ vorliegenden Congruenzen (11) die neue Gestalt an:

$$(14) \qquad \left.\begin{array}{r} \{3(a - d) \mp \sqrt{\Delta}\}\alpha + b\gamma \equiv 0 \\ c\alpha + \{2(a - d) \mp \sqrt{\Delta}\}\gamma \equiv 0 \end{array}\right\} (\text{mod. } 5).$$

In (13) und (14) gelten zugleich entweder die oberen oder die unteren Zeichen. Vor allem ist hiermit evident geworden: *Nur solche Schemata, bei denen* Δ *durch* 5 *teilbar oder quadratischer Rest von* 5 *ist, liefern Nullpunkte fraglicher Art; die übrigen bleiben hier ganz ausser Betracht.*

Zur näheren Discussion der Congruenzen (13), (14) sind wieder mehrere Fallunterscheidungen nötig. Wir setzen

I. $\Delta \equiv \pm 1, \quad c \gtrless 0$, (mod. 5).

In diesem Falle haben wir für die oberen Zeichen in (13) und (14) im ganzen zwei Punkte $\frac{\alpha}{\gamma}$, nämlich:

$$\frac{\alpha}{\gamma} \equiv \frac{2(d-a)+\sqrt{\Delta}}{c}, \quad \equiv \frac{a-d+2\sqrt{\Delta}}{2c} \tag{15}$$

und als zugehörige Werte von A und D:

$$eA \equiv 3(a+d)+\sqrt{\Delta}, \quad eD \equiv 3(a+d)-\sqrt{\Delta}, \text{ (mod. 5)}; \tag{16}$$

für die unteren Zeichen erhalten wir entsprechend:

$$\frac{\alpha}{\gamma} \equiv \frac{2(d-a)-\sqrt{\Delta}}{c}, \quad \equiv \frac{a-d-2\sqrt{\Delta}}{2c}; \tag{17}$$

$$eA \equiv 3(a+d)-\sqrt{\Delta}, \quad eD \equiv 3(a+d)+\sqrt{\Delta}, \text{ (mod. 5)}. \tag{18}$$

Unter den vier in (15) und (17) gefundenen Spitzen $\frac{\alpha}{\gamma}$ sind zufolge (I) keine zwei einander relativ äquivalent. Für die einzelne Spitze (15) sind nun alle Teiler A von n heranzuziehen, welche der Bedingung (16) genügen, und zwar muss nach einander $e = +1$ und $e = -1$ genommen werden. Dabei ist über diese Teiler A die Summe

$$\sum_{A \leq \sqrt{n}} A + \sum_{A > \sqrt{n}} D = \sum_{A \leq \sqrt{n}} A + \sum_{D < \sqrt{n}} D$$

zu bilden und selbige doppelt zu nehmen, da wir in (15) zwei verschiedene Spitzen haben. Einen völlig gleichen Ausdruck, bei dem jedoch A und D den Congruenzen (18) genügen müssen, finden wir für die Spitzen (17). Indem wir zusammenziehen und die in (9) vorbereitete Bezeichnungsweise einführen, entspringt das Resultat: *Im Falle I finden sich in den Polygonspitzen insgesamt noch*

$$4\chi_{3(a+d)+\sqrt{\Delta}}(n) + 4\chi_{3(a+d)-\sqrt{\Delta}}(n) \tag{19}$$

einfache Nullpunkte von $h_i(\omega)$.

II. $\Delta \equiv \pm 1, \quad c \equiv 0$, (mod. 5).

Man gehe auf die Congruenzen (11) zurück, aus deren zweiter sich $Ae \equiv d$ ergiebt, da doch γ prim gegen 5 sein soll. Die erste Congruenz (11) giebt damit $(a-d)\alpha + b\gamma \equiv 0$, und es ist $(a-d)$ sicher prim gegen 5, weil sonst $\Delta \equiv 0$ sein müsste. Wir gewinnen nur zwei Punkte:

$$\frac{\alpha}{\gamma} \equiv \frac{b}{d-a}, \quad \equiv \frac{2b}{2d-2a} \text{ mit } eA \equiv d, \; eD \equiv a. \tag{20}$$

Man zählt daraufhin leicht ab, *dass im Falle II an Nullpunkten fraglicher Art von $h_i(\omega)$ insgesamt*

(21) $$2X_a(n) + 2X_d(n)$$

auftreten.

III. $\Delta \equiv 0$, und wenigstens eine der Zahlen $b, c \gtrless 0$ (mod. 5).

Ist erstlich $c \equiv 0$, so folgt wie vorhin $eA \equiv d$, und die erste Congruenz (14) erfordert $(a - d) \gtrless 0$ (mod. 5). Andrerseits ergiebt

$$-\Delta \equiv (a + d)^2 - 4ad \equiv 0$$

offenbar $a \equiv d$, *so dass im Falle III keine Lösungen eintreten, wofern* $c \equiv 0$ *ist.* Für $c \gtrless 0$ geben aber die Congruenzen (14) die beiden Lösungen:

(22) $$\frac{\alpha}{\gamma} \equiv \frac{2(d-a)}{c}, \quad \equiv \frac{a-d}{2c} \quad \text{mit } eA \equiv \sqrt{n}.$$

Für $\Delta \equiv 0$, $c \gtrless 0$, (mod. 5) *finden sich hiernach im ganzen*

(23) $$4X_{\sqrt{n}}(n)$$

Nullpunkte gesuchter Art.

Endlich bleibt noch:

IV. $\Delta \equiv 0$, $b \equiv c \equiv 0$, $a \equiv d \equiv \sqrt{n}$, (mod. 5).

Durch $eA \equiv \sqrt{n}$ sind die Congruenzen (11) sofort für alle zehn jetzt in Betracht kommenden Spitzen $\frac{\alpha}{\gamma}$ erfüllt. Indem wir noch auf den Fall eines rein quadratischen n Rücksicht nehmen, *ergiebt sich hier als gesuchte Zahl der Nullstellen:*

(24) $$20X_{\sqrt{n}}(n) - 10\varepsilon_n.$$

§ 6. Zusammenstellung der Resultate der auf die Polygonspitzen bezüglichen Untersuchungen.

Die beiden im vorigen Paragraphen gebrauchten Teilersummen $X_1(n)$ und $X_2(n)$ lassen sich, wie schon angedeutet, durch die $\Phi, \Psi, \Psi_{\pm 1}$ darstellen, und von diesen Formeln werden wir Kenntnis nehmen, ehe wir die Resultate der beiden voraufgehenden Paragraphen in übersichtlicher Form zusammenstellen. Etwas ausführlicher wie oben ist die Definition der beiden X_ν gegeben durch:

(1) $$\begin{cases} X_1(n) = \sum\limits_{A<\sqrt{n},\, A\equiv\pm 1}' A + \frac{1}{4}\varepsilon_n\sqrt{n}\left\{1 + \left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)\right\}, \\ X_2(n) = \sum\limits_{A<\sqrt{n},\, A\equiv\pm 2}' A + \frac{1}{4}\varepsilon_n\sqrt{n}\left\{1 - \left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right)\right\}. \end{cases}$$

Nun folgen aus der Definition der Symbole Φ, Ψ einerseits und $\Psi_{\pm 1}$ andrerseits ohne weiteres die Formeln:

$$\Phi(n) - \Psi(n) = 2 \sum_{A < \sqrt{n}}' A + \varepsilon_n \sqrt{n}, \tag{2}$$

$$\Psi_{+1}(n) - \Psi_{-1}(n) = 2 \sum_{A < \sqrt{n}}' \left(\frac{A}{5}\right) A + \varepsilon_n \sqrt{n} \cdot \left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right), \tag{3}$$

und hier entspringen durch Addition und Subtraction offenbar direct die Anzahlen $4X_1(n)$ bez. $4X_2(n)$. Es ist demgemäss

$$4X_\nu(n) = \Phi(n) - \Psi(n) + \Psi_{\left(\frac{\nu}{5}\right)} - \Psi_{\left(\frac{\nu}{5}\right)}, \tag{4}$$

womit die gewünschte Darstellung geliefert ist; wir werden vermöge derselben die X_ν aus den Endresultaten ganz entfernen. Noch bemerke man, dass auch zwischen Φ, Ψ, $\Psi_{\pm 1}$ eine Relation besteht, die man aufs leichteste zu

$$\Phi(n) + \Psi(n) = \Psi_{+1}(n) + \Psi_{-1}(n) \tag{5}$$

bestimmt; dieselbe ist weiterhin immer dazu benutzt, den Resultaten die denkbar einfachste Form zu geben.

Wir wollen jetzt die Anzahl der im vorigen Paragraphen betrachteten Nullpunkte tabellarisch zusammenstellen und reihen im einzelnen Falle rechts immer auch gleich die Zahl einfacher Unstetigkeitspunkte daneben, wie sie § 4 ergiebt. Wir sondern noch die beiden Fälle $\left(\frac{n}{5}\right) = -1$ und $\left(\frac{n}{5}\right) = +1$ und bemerken, dass zufolge $\Delta \equiv 4n - (a + d)^2$ im ersteren Falle notwendig $\Delta \gtrless 0$ ist. Es ergiebt sich nach leichten Zwischenrechnungen:

I. $\left(\frac{n}{5}\right) = -1, \quad \Delta \equiv \pm 1, \pmod{5}$

$$c \gtrless 0, \quad 2\Phi - 2\Psi, \quad 2\Phi, \tag{6}$$

$$c \equiv 0, \quad \Phi - \Psi, \quad \Phi + \Psi. \tag{7}$$

II. $\left(\frac{n}{5}\right) = +1, \quad \Delta \equiv \pm 1, \pmod{5}$

$$c \gtrless 0, \quad 2\Phi - 2\Psi + 2\Psi_{-\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)} - 2\Psi_{\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)}, \quad 2\Phi, \tag{8}$$

$$c \equiv 0, \quad \Phi - \Psi + \Psi_{-\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)} - \Psi_{\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)}, \quad 2\Psi_{\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)}. \tag{9}$$

III. $\left(\frac{n}{5}\right) = +1, \quad \Delta \equiv 0, \text{ (mod. 5)}$

$$(10) \qquad b \gtrless 0, \quad c \equiv 0, \quad \text{keine Nullpunkte}, \quad 2\Psi_{-\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)},$$

$$(11) \qquad c \gtrless 0, \quad \Phi - \Psi + \Psi_{\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)} - \Psi_{-\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)}, \quad 2\Phi,$$

$$(12) \quad b \equiv c \equiv 0, \quad 5\Phi - 5\Psi + 5\Psi_{\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)} - 5\Psi_{-\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)} - 10\varepsilon_n,$$
$$2\Psi_{-\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)}.$$

Was die Beweise dieser Formeln anlangt, so werden einige Bemerkungen genügen. Ist n Nichtrest, so sind A und D von verschiedenem quadratischen Charakter, so dass Formel (19) p. 227 in diesem Falle $4X_1 + 4X_2$ liefert; das ist aber gleich $2\Phi - 2\Psi$. Ebenso erledigt sich (7). Ist sowohl Δ wie n quadratischer Rest, so ist zufolge $-(a+d)^2 \equiv \Delta + n$ notwendig $a + d \equiv 0$ und also $\sqrt{\Delta} \equiv +2\sqrt{n}$; es folgt also (8) vermöge (4) aus (19) p. 227. Ist überdies noch $c \equiv 0$, so ergiebt $ad \equiv n$ für a und d die Werte $a \equiv -d \equiv \pm 2\sqrt{n}$; hiernach folgt (9) aus (21) p. 228 und (19) p. 223 Für die drei rückständigen Formeln (10) bis (12) bemerke man etwa noch, dass bei $\Delta \equiv c \equiv 0$ notwendig $a \equiv d \equiv \pm\sqrt{n}$ sein muss.

Man bezeichne weiter den Überschuss der Anzahl einfacher Unstetigkeitspunkte über diejenige einfacher Nullpunkte in den zwölf Polygonspitzen durch ν. Für die Fälle $\Delta \equiv \pm 2$ ist alsdann diese Zahl ν direct durch die in § 4 berechnete Anzahl der Unstetigkeitspunkte gegeben; für $\Delta \equiv 0, \pm 1$ müssen wir jeweils die in obigen Formeln (6) bis (12) neben einander stehenden Zahlen von einander abziehen. Hierbei reduciert sich die Zahl der unterschiedenen Fälle sehr bedeutend; in der That finden wir unter Rücksicht auf (5):

$$(13) \qquad \Delta \equiv \pm 2; \quad \nu = 2\Phi(n),$$

$$(14) \quad \left(\frac{n}{5}\right) = -1, \quad \Delta \equiv \pm 1; \quad \nu = 2\Psi(n),$$

$$(15) \quad \left(\frac{n}{5}\right) = +1, \quad \Delta \equiv \pm 1; \quad \nu = -2\Phi(n) + 4\Phi_{\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)}(n),$$

$$(16) \quad \Delta \equiv 0, \quad b \text{ oder } c \gtrless 0; \quad \nu = 2\Psi_{-\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)}(n),$$

$$(17) \quad \Delta \equiv 0, \quad b \equiv c \equiv 0; \quad \nu = -10\Phi(n) + 12\Psi_{-\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)}(n) + 10\varepsilon_n.$$

Hierbei möge vielleicht noch die eine Bemerkung Platz finden, dass

bei $\Delta \equiv \pm 2$ notwendig c prim gegen 5 ist. — Die Untersuchung der Functionen $h_i(\omega)$ in den zwölf inäquivalenten Polygonspitzen ist solcherweise zum gewünschten Abschluss gebracht.

§ 7. Das System der Classenzahlrelationen fünfter Stufe. Die Classenzahlrelationen dritter Stufe.

Die ganze Zahl ν, die wir soeben als Überschuss der Zahl der in den Polygonspitzen gelegenen Unstetigkeitspunkte über die Anzahl der ebenda gelegenen Nullpunkte des einzelnen $h_i(\omega)$ definierten, muss identisch sein mit der in § 3 ausgedrückten Zahl ν einfacher Nullpunkte von $h_i(\omega)$ im Innern des Polygons, insofern wir doch in den $h_i(\omega)$ Modulfunctionen fünfter Stufe haben. Indem wir die beiden für dieselbe Zahl ν auf verschiedenen Wegen gefundenen Ausdrücke einander identisch setzen, entspringen nunmehr *die Classenzahlrelationen fünfter Stufe*, deren Ableitung der Gegenstand unserer Untersuchung war.

Am einfachsten fallen diese Relationen für quadratische Nichtreste n aus, wobei wir übrigens auch noch $n \equiv 2$ und $n \equiv 3$ sondern wollen. Wie wir schon gelegentlich bemerkten, entspringen in beiden Fällen nur *drei* Relationen, bei deren Aufstellung man jetzt nur noch zu beachten hat, wann Δ Rest und wann Nichtrest wird. *Wir finden für* $n \equiv 2$:

$$(1)\qquad \begin{cases} 3\sum\limits_{\varkappa \equiv \pm 0}' \mathsf{H}(4n - \varkappa^2) = 2\Phi(n), \\ 3\sum\limits_{\varkappa \equiv \pm 1}' \mathsf{H}(4n - \varkappa^2) = 2\Phi(n), \\ 2\sum\limits_{\varkappa \equiv \pm 2}' \mathsf{H}(4n - \varkappa^2) = 2\Psi(n), \end{cases}$$

woran sich für $n \equiv 3$ *die folgenden drei Relationen reihen:*

$$(2)\qquad \begin{cases} 3\sum\limits_{\varkappa \equiv \pm 0}' \mathsf{H}(4n - \varkappa^2) = 2\Phi(n), \\ 2\sum\limits_{\varkappa \equiv \pm 1}' \mathsf{H}(4n - \varkappa^2) = 2\Psi(n), \\ 3\sum\limits_{\varkappa \equiv \pm 2}' \mathsf{H}(4n - \varkappa^2) = 2\Phi(n). \end{cases}$$

Sollen durch Combination der Relationen (1) oder (2) die Classenzahlrelationen erster Stufe hergestellt werden, so muss berücksichtigt werden, dass wir in § 3 alle durch 5 teilbare $\varkappa$ doppelt zählten. Will man sie nur einfach zählen, so ist in den ersten Gleichungen (1), (2) die linke Seite noch mit dem Factor 2 zu behaften. Addieren wir

nun z. B. im Falle (1) die zweite und dritte Gleichung mit 2 bez. 3 multipliciert zur ersten hinzu, so entspringt in der That auf der linken Seite $6\sum' \mathsf{H}(4n-x^2)$ und rechts $6\Phi + 6\Psi$, wie es nach der Classenzahlrelation erster Stufe sein muss.

Für Nichtreste n ist es folgenlos, wenn wir statt der bisher gültigen Ungleichungen $-2\sqrt{n} < x < 2\sqrt{n}$ jetzt wieder, wie im vorigen Kapitel,

$$-2\sqrt{n} \leq x \leq +2\sqrt{n} \tag{3}$$

als Intervall für die ganze Zahl x vorschreiben. Dagegen wird dies bei rein quadratischen n in den Fällen $\Delta \equiv 0$, d. i. für die Formeln (15) und (16) p. 217 von Belang. Wir wollen hierbei in Übereinstimmung mit p. 182 die Erklärungen abgeben:

$$\mathsf{H}(0) = -\tfrac{1}{12}, \quad \mathsf{H}_{+1}(0) = 0, \quad \mathsf{H}_{-1}(0) = 0. \tag{4}$$

Alsdann bleiben auch jetzt noch die Formeln (15) p. 217 unverändert erhalten; Formel (16) p. 217 muss aber, auf das Intervall (3) bezogen, offenbar rechter Hand das Zusatzglied $10\varepsilon_n$ erhalten; selbiges wird sich gegen $10\varepsilon_n$ auf der rechten Seite von (17) p. 230 gerade fortheben. *Wir finden so erstlich im Falle $n \equiv +1$ im ganzen die folgenden vier unterschiedenen Classenzahlrelationen:*

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
&60\sum_{x\equiv\pm 2}' \mathsf{H}\left(\frac{4n-x^2}{25}\right) = -10\Phi(n) + 12\Psi_{-1}(n),\\
&5\sum_{x\equiv\pm 2}' \mathsf{H}_{+1}(4n-x^2) = 5\sum_{x\equiv\pm 2}' \mathsf{H}_{-1}(4n-x^2) = 2\Psi_{-1}(n),\\
&3\sum_{x\equiv\pm 1}' \mathsf{H}(4n-x^2) = 2\Phi(n),\\
&2\sum_{x\equiv\pm 0}' \mathsf{H}(4n-x^2) = -2\Phi(n) + 4\Psi_{+1}(n).
\end{aligned}\right.$$

Daran reihen sich für den Fall $n \equiv 4$ (mod. 5) die Relationen:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&60\sum_{x\equiv\pm 1}' \mathsf{H}\left(\frac{4n-x^2}{25}\right) = -10\Phi(n) + 12\Psi_{+1}(n),\\
&5\sum_{x\equiv\pm 1}' \mathsf{H}_{+1}(4n-x^2) = 5\sum_{x\equiv\pm 1}' \mathsf{H}_{-1}(4n-x^2) = 2\Psi_{+1}(n),\\
&3\sum_{x\equiv\pm 2}' \mathsf{H}(4n-x^2) = 2\Phi(n),\\
&2\sum_{x\equiv\pm 0}' \mathsf{H}(4n-x^2) = -2\Phi(n) + 4\Psi_{-1}(n).
\end{aligned}\right.$$

Auf ein interessantes zahlentheoretisches Gesetz hat dabei die zweite Formel (5) bez. (6) geführt. Wir mussten für diesen Fall bei der arithmetischen Berechnung von ν unterscheiden, ob b (bez. c) Rest oder Nichtrest von 5 war (cf. Formel (15) p. 217). Die functionentheoretische Bestimmung von ν ergab in beiden Fällen den nämlichen Zahlwert. So ergiebt sich der Satz: *Sondern wir unter allen* $\mathsf{H}(\Delta)$ *Classen einer durch* 5 *teilbaren Determinante* $-\Delta$ *die Classen eines durch* 5 *teilbaren Teilers vorab aus, so zeigen die zurückbleibenden Classen zur Hälfte den Charakter* $\left(\frac{P}{5}\right) = +1$, *zur andern Hälfte* $\left(\frac{P}{5}\right) = -1$.

Übrigens werden wir unter diesen Umständen das 60-fache der linken Seite der Classenzahlrelation erster Stufe von (5) (oder (6)) aus dadurch erhalten, dass wir zur ersten Gleichung die zweite, dritte und vierte, bez. mit 24, 20 und 15 multipliciert, hinzuaddieren. In der That findet sich so, wie es sein muss, rechter Hand (unter Benutzung von (5) p. 229):

$$-10\Phi + 12\Psi_{-1} + 48\Psi_{-1} + 40\Phi - 30\Phi + 60\Psi_{+1} = 60(\Phi + \Psi).$$

In den ursprünglichen Formeln des Hrn. Gierster (Math. Ann. Bd. 17) ist der Summationsbuchstabe $\varkappa$ in den Classenzahlsummen, wie wir des Vergleichs halber anmerken wollen, auf positive Zahlwerte eingeschränkt. Es fallen dadurch die Summen immer gerade halb so gross aus, als auf den linken Seiten der Relationen (1), (2) und (5), (6). Daher rührt es, dass diese Formeln nur erst dann mit den Gierster'schen Relationen in voller Übereinstimmung sind, wenn wir rechter Hand allenthalben durch 2 heben. Mögen wir die Gierster'schen Resultate für die durch 5 teilbaren n (die wir nicht noch eingehend betrachten) so umschreiben, dass $\varkappa$, wie in den bisherigen Formeln, gleichmässig die positiven und negativen Zahlenwerte zu durchlaufen hat. *Es sind dann die beiden folgenden Relationen:*

$$(7)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{\varkappa \equiv \pm 0}' \mathsf{H}_{+1}(4n - \varkappa^2) = 2\Phi(m) + 4\Phi\left(\frac{n}{25}\right) + 4\Psi\left(\frac{n}{25}\right), \\ \sum' \left(\frac{\varkappa}{5}\right)\mathsf{H}(4n - \varkappa^2) = 4\sigma(n), \end{cases}$$

welche Hr. Gierster für die durch 5 *teilbaren* n *gewonnen hat.* Hierbei ist $n = 5^\mu m$, $m \gtrless 0$ (mod. 5) gesetzt, und $\Phi(\nu)$, $\Psi(\nu)$ sollen immer dann die Null bedeuten, wenn ν keine ganze Zahl ist. In der zweiten Relation hat $\varkappa$ alle positiven und negativen ganzen Zahlen zu durchlaufen, für welche das Argument von H positiv ausfällt, und endlich definiert Hr. Gierster das Symbol $\sigma(n)$ durch:

$$\sigma(n) = -\sum \left\{ \left(\frac{A}{5}\right) + \left(\frac{D}{5}\right) \right\} A, \quad AD = n, \quad A < D.$$

Unter den übrigen von Hrn. Gierster für die niedersten Stufen berechneten Relationen schliessen sich denen der fünften am unmittelbarsten diejenigen der *dritten* Stufe an; sie sind unter Gebrauch unserer Bezeichnungsweise die folgenden:

I. $n \equiv -1$, (mod. 3)

$$(8) \quad \begin{cases} \sum\limits_{x \equiv \pm 0}' \mathsf{H}(4n - x^2) = 2\Psi(n), \\ 2\sum\limits_{x \equiv \pm 1}' \mathsf{H}(4n - x^2) = 2\Phi(n). \end{cases}$$

II. $n \equiv 1$, (mod. 3)

$$(9) \quad \begin{cases} 12\sum\limits_{x \equiv \pm 1}' \mathsf{H}\left(\frac{4n - x^2}{9}\right) = 4\Psi(n) - 2\Phi(n), \\ 4\sum\limits_{x \equiv \pm 1}' \mathsf{H}(4n - x^2) = 2\Phi(n) + 4\Psi(n), \\ 2\sum\limits_{x \equiv \pm 0}' \mathsf{H}(4n - x^2) = 2\Phi(n). \end{cases}$$

Gegenüber der ersten Stufe ist endlich noch sehr bemerkenswert, dass sich die Zahlen $\mathsf{H}(\Delta)$ auf recurrentem Wege aus den Relationen einer einzelnen höheren Stufe berechnen lassen; *so werden z. B. bereits die fünf Formeln* (8) *und* (9) *eine vollständige Definition der Symbole* $\mathsf{H}(\Delta)$ *einschliessen.* Die Rechnung hat dabei den Weg zu gehen, dass jedesmal der höchste Term auf der linken Seite der einzelnen Formel (8) und (9) (d. i. derjenige mit möglichst niedrigem x) durch die übrigen Glieder und die rechte Seite ausgedrückt wird. Man hat dabei die Zahl Δ modulo 12 zu unterscheiden und muss bei $\Delta \equiv 0, 11$ die dritte Relation (8), (9), bei $\Delta \equiv 3, 4, 7, 8$ hingegen bez. die vierte, fünfte, zweite und erste Relation zur Verwendung bringen. Man kann auf die Weise eine grosse Reihe von Anfangswerten $\mathsf{H}(\Delta)$ leicht berechnen und die gefundenen Zahlen zu neuen Bestätigungen aller mitgeteilten Classenzahlrelationen benutzen.

Die Transformationstheorie der elliptischen Functionen und ihre Anwendung auf die Arithmetik bringen wir hiermit zum vorläufigen Abschluss. Wie sich die künftige Fortsetzung zu gestalten hat, liegt

auf der Hand. Wir werden für die allgemeine Theorie der Modularcorrespondenzen (cf. p. 154) neue Gesichtspunkte und Hülfsmittel heranbringen müssen, um auch über das Gebiet der Hauptmoduln hinaus eine derart einfache Anschauung unserer Gegenstände zu gewinnen, wie wir sie jetzt in der Theorie der Modulargleichungen erhalten haben. Aber hierzu sind, wie wir bereits andeuteten, neue allgemeine functionentheoretische Entwicklungen erforderlich, welche über den Ansatz des Abschnitts III hinausgreifen. Indem wir uns vorbehalten, hierauf in Abschnitt VI zurückzukommen, bringen wir mit Hülfe der inzwischen gewonnenen Transformations- und Teilungsgrössen jetzt zunächst das in Bd. I noch nicht völlig erledigte functionentheoretische Grundproblem für das Gebiet der Congruenzgruppen auf allerdings indirectem Wege zum Abschluss.

Fünfter Abschnitt.

Analytische Behandlung des functionentheoretischen Grundproblems für die Congruenzgruppen.

Erstes Kapitel.

Einführung in die Theorie der elliptischen Normalcurven n^{ter} Ordnung C_n.

Bei der Auflösung des functionentheoretischen Grundproblems im dritten Abschnitt hatten wir selbst nach der Einschränkung auf die Congruenzgruppen in den Resultaten noch keineswegs denselben Grad der Allgemeinheit erreicht wie bei unseren gruppentheoretischen Untersuchungen am Abschluss des zweiten Abschnitts. Die directen Schlüsse der reinen Riemann'schen Theorie der algebraischen Functionen gaben uns bei den höheren Stufenzahlen noch nicht die hinreichend eindringenden Hülfsmittel; und wir versprachen, erst vermöge der voraufgehend entwickelten Theorie der Teilung und Transformation unser gewünschtes Ziel erreichen zu können. In der That sind uns ja nun diese beiden letzteren Massnahmen zu einer ergiebigen Quelle für die Bildung von Modulfunctionen höherer Stufe aus solchen niederer Stufe sowie aus doppeltperiodischen Functionen geworden, und wir werden, um das rückständige Ziel zu erreichen, aus der Gesamtheit so entspringender Grössen geradezu nur einen ganz geringen Teil herauszugreifen brauchen.

Bei der in dieser Hinsicht zu treffenden Auswahl sowie auch betreffs des einzuschlagenden Weges lassen wir uns durch den Plan leiten, dass wir in einem ersten Teile unserer neuen Entwicklungen die Betrachtung der *elliptischen Normalcurven n^{ter} Ordnung**) in den Mittelpunkt stellen wollen. Das ist einer unter mehreren möglichen

*) Cf. I p. 567; man vergleiche ausserdem nochmals das Citat auf Seite 23 des vorliegenden Bandes.

Wegen, und es wird uns obliegen, seine Zweckmässigkeit durch den Erfolg zu belegen. Immerhin wolle man für den Gebrauch der elliptischen Normalcurven schon jetzt folgende zwei Gesichtspunkte als massgeblich erachten: Die Betrachtung der Normalcurven setzt voraus, dass wir neben den Grössen ω_1, ω_2 vorerst auch noch mit der Variabelen u (d. i. mit dem Integral erster Gattung) arbeiten wollen; und man wird in der That noch erkennen, wie erfolgreich der Gebrauch des u selbst für Fragen der reinen Theorie der Modulfunctionen ist, falls wir dieselben auf analytischem Wege beantworten wollen. Zweitens aber: Wenn wir die durchzuführende Betrachtung gewisser doppeltperiodischer Functionen erster oder höherer Stufen (cf. p. 5) in das Gewand einer Theorie der elliptischen Normalcurven kleiden, so hat das in erster Linie den bekannten Zweck, dass wir vermöge der geometrischen Redeweise einer Reihe von Vorstellungen ein organisches Gefüge geben, auf welches wir Wert legen.

Es handelt sich für uns übrigens nur mehr um eine *Einführung* in die Lehre von den elliptischen Normalcurven. Sowohl der durchgebildeten geometrischen Theorie dieser Curven können wir nicht ausführlich nachgehen, wie auch namentlich die Verwendung der Normalcurven für einen systematischen Ausbau der Theorie der doppeltperiodischen Functionen ausser Betracht bleibt; gleichwohl wollen wir doch am Schlusse des Kapitels kurz skizzieren, in welchem Sinne die Betrachtung der Teilung und Transformation n^{ter} Ordnung an die elliptische Normalcurve n^{ter} Ordnung geknüpft werden könnte.

§ 1. Die Definition der elliptischen Normalcurve n^{ter} Ordnung und die eindeutigen Transformationen derselben in sich.

In Band I p. 568 hatten wir bereits vorläufig die elliptische Normalcurve n^{ter} Ordnung von der ebenen Curve dritter Ordnung des Geschlechtes $p = 1$ aus mit Hülfe der Brill-Noether'schen Begriffsbestimmungen definiert; indessen wird es gut sein, wenn wir hier noch um einen Schritt weiter zurückgehen. Wir knüpfen etwa an die drei Veränderlichen u, ω_1, ω_2, denken *bei stehenden Werten von* ω_1, ω_2 die Ebene der complexen Grösse u mit der zu ω_1, ω_2 gehörenden Parallelogrammteilung versehen und bilden vorläufig ein einzelnes unter diesen Parallelogrammen durch irgend eine zugehörige doppeltperiodische Function m^{ten} Grades erster Stufe auf eine m-blättrige Riemannsche Fläche des Geschlechtes $p = 1$ ab, die wir in üblicher Weise F_m nennen (cf. I p. 536 u. f.).

Man wähle nun auf der Fläche F_m irgend ein System von n Punkten aus, so giebt es nach I p. 551 insgesamt gerade $(n - 1)$ linear-unab-

hängige n-wertige algebraische Functionen der Fläche, welche an den bezeichneten n Stellen je einfach unendlich werden. Etwas genauer ausgedrückt heisst dies: Jede algebraische Function der F_m, die an der einzelnen jener n Stellen entweder einfach unendlich wird oder endlich bleibt, im übrigen aber auf der F_m allenthalben endlich ist, lässt sich linear in $(n-1)$ speciellen Functionen dieser Art darstellen. Diese letzteren sind dabei linear-unabhängig zu wählen; und indem wir sie nun als Cartesische Coordinaten eines Raumes R_{n-1} von $(n-1)$ Dimensionen ansehen (cf. I p. 556 u. f.), wird durch sie die Fläche F_m wechselweise eindeutig auf eine eigentlich im R_{n-1} gelegene Curve n^{ter} Ordnung C_n bezogen, welche eben unsere elliptische Normalcurve ist.

Um hier aber sogleich das Hülfsmittel der homogenen Coordinaten heranzuholen, gehen wir auf die Variabele u zurück und stellen unsere gerade gewählten $(n-1)$ linear-unabhängigen Functionen der F_m nach I p. 157 als ebenso viele Quotienten n-gliedriger σ-Producte dar, wobei in den Nennern überall das gleiche Product auftritt. Hier werden wir alsdann den $(n-1)$ Producten der Zähler als n^{tes} das eine Product der Nenner coordiniert anreihen, *um in den Formeln:*

$$x_i = C_i \prod_{k=1}^{n} \sigma(u - a_{ik}), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

die gewünschten homogenen Coordinaten des Raumes R_{n-1} zu besitzen. Dabei sind die C_i von u unabhängige Grössen, und es hat die Summe:

$$s = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}, \tag{2}$$

welche man als Residuensumme des Productes x_i bezeichnet, einen von i unabhängigen Wert, der übrigens bis auf ganzzahlige Vielfache der Perioden durch Auswahl jener n Stellen der Fläche F_m gegeben ist. *Indem wir jetzt u ein einzelnes Periodenparallelogramm überstreichen lassen, wird der durch* (1) *definierte Punkt x_i des Raumes R_{n-1} die geschlossene Normalcurve C_n gerade vollständig beschreiben*).*

Beim Gebrauch der homogenen Coordinaten kleidet sich der Rie-

*) Es ist dies der Ansatz, von welchem Hr. Klein in seiner der Münchener Akademie am 8. Juli 1880 vorgelegten Note *„Über unendlich viele Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung“* (abgedruckt Math. Ann. Bd. 17) allererst ausging; eine ausführlichere Entwicklung dieses Ansatzes ist gegeben in der im vorigen Abschnitt unter dem gekürzten Titel „Normalcurven“ häufig genannte Abhandlung Klein's, welche den hier und weiter folgenden Darlegungen des Textes zu Grunde liegt.

mann-Roch'sche Satz über die Anzahl linear-unabhängiger Functionen mit jenen anfänglich gewählten n Unstetigkeitspunkten in folgende merkwürdige Form: *Jedes n-gliedrige σ-Product von der Residuensumme s, das wir etwa x' nennen mögen, ist linear und homogen in den n linear-unabhängigen σ-Producten x_i darstellbar:*

$$x' = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n, \tag{3}$$

wobei die Coefficienten α_i von u unabhängig sind).* Der somit formulierte Satz, der im folgenden immer wieder zur Verwendung kommt, ist bereits lange, bevor durch Riemann und Roch das allgemeine Theorem gewonnen wurde, von Hrn. Hermite aufgestellt worden**) und soll dieserhalb als Hermite'scher Satz bezeichnet werden. Der Beweis des in Rede stehenden Satzes wurde natürlich ursprünglich in rein analytischer Weise erbracht, und zwar ergab er sich einfach aus dem Umstande, dass in der Reihenentwicklung der allgemeinsten ϑ-Function n^{ter} Ordnung von gegebener Residuensumme die n ersten Coefficienten völlig unbestimmt bleiben, während mit ihnen alle folgenden eindeutig bestimmt waren. —

Den Zahlwert der Residuensumme s hat man offenbar nur bis auf ganzzahlige Vielfache der, wie schon bemerkt, fest gegebenen Perioden ω_1, ω_2 zu nehmen. Indem man aber s auf ein Periodenparallelogramm eingeschränkt denkt, giebt es eben den wechselnden Werten des s entsprechend immer noch unendlich viele Normalcurven C_n, über deren gegenseitige Beziehung wir uns des näheren zu unterrichten haben.

Zu dem Ende gehe man von der *allgemeinsten rationalen Transformation der Riemann'schen Fläche F_m in sich* aus und bemerke, dass dabei das Integral erster Gattung u notwendig eine ganze lineare Substitution:

$$u' = bu + c$$

erfährt. Über die hier auftretenden Coefficienten b, c lassen sich leicht erschöpfende Angaben machen, und dies ist eine wichtige, jetzt vorab von uns zu lösende Aufgabe.

Lässt man u eine Periodenbahn auf der F_m beschreiben, so muss ein Gleiches von u' gelten, d. h. es müssen die Gleichungen bestehen:

$$b\omega_1 = -\delta\omega_1 + \beta\omega_2, \quad b\omega_2 = \gamma\omega_1 - \alpha\omega_2,$$

wo wir unter α, β, γ, δ vier vorerst noch gar nicht näher bestimmte

---

*) Stimmt die Residuensumme von x' mit s nur bis auf ganze Vielfache der Perioden überein, so werden nach I p. 157 erst die Producte der x' mit einem gewissen Exponentialfactor lineare Functionen der x_i von der Gestalt (3).

**) Man sehe Hermite's Brief an Jacobi vom August 1844 in Crelle's Journal Bd. 32 oder auch Jacobi's gesammelte Werke Bd. II p. 102.

ganze Zahlen zu verstehen haben. Das Zusammenbestehen dieser zwei Gleichungen erfordert aber als notwendige Bedingung:

$$(4) \qquad b^2 + \varkappa b + (\alpha\delta - \beta\gamma) = 0, \quad (\varkappa = \alpha + \delta),$$

so dass b Wurzel einer ganzzahligen quadratischen Gleichung mit dem höchsten Coefficienten 1 ist. Eben diese nämliche Forderung ist aber an b^{-1} zu stellen, da auch umgekehrt u mit u' Periodenwege beschreiben wird; es ist demgemäss:

$$(5) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad b = \frac{-\varkappa \pm \sqrt{\varkappa^2 - 4}}{2}.$$

Man setze hier zunächst den Fall, dass $\gamma = 0$ ist; alsdann ist

$$(6) \qquad \varkappa = \mp 2, \quad b = \pm 1, \quad u' = \pm u + c,$$

während ω keiner Einschränkung unterliegt. Ist demgegenüber $\gamma \gtrless 0$, so erhalten wir für den Periodenquotienten den particulären Wert:

$$\omega = \frac{\alpha + b}{\gamma}.$$

Soll aber der hierdurch angezeigte Punkt ω der positiven ω-Halbebene angehören, so darf b nicht reell sein, und also werden wir für diesen zweiten Fall $\gamma \gtrless 0$ nur die beiden Möglichkeiten $\varkappa = 0$ und $\varkappa = \pm 1$ zu verfolgen haben. Ihnen entsprechen die beiden particulären Formelgruppen:

$$(7) \qquad \varkappa = 0, \quad b = \pm i, \quad u' = \pm iu + c, \quad \omega = \frac{\alpha \pm i}{\gamma},$$

$$(8) \quad \varkappa = \pm 1, \quad b = \pm \varrho, \quad \pm \varrho^2, \quad u' = \pm \varrho u + c, \quad \pm \varrho^2 u + c,$$
$$\omega = \frac{\alpha \pm \varrho^{\pm 1}}{\gamma}.$$

Diese beiden letzteren Fälle treten also nur ein, falls die Invariante g_3 bez. g_2 den Wert Null hat, d. i. nur im harmonischen bez. äquianharmonischen Falle (cf. I p. 12).

Auf der anderen Seite überzeuge man sich, dass alle bis jetzt gefundenen Formeln $u' = bu + c$, und zwar bei ganz willkürlich bleibendem c, auch wirklich Transformationen der Fläche F_m in sich darstellen. Zu diesem Zwecke wolle man die betreffende Substitution des u auf ein einzelnes Periodenparallelogramm ausüben und wird finden, dass dasselbe von „erlaubter Abänderung"*) abgesehen gerade in sich transformiert wird; dabei wählt man in den beiden particulären Fällen der Formeln (7) und (8) das primitive Periodenpaar zweckmässiger Weise

*) Diese Ausdrucksweise besitzt hier denselben Sinn und die gleiche functionentheoretische Bedeutung wie im zweiten Abschnitt (vgl. z. B. I p. 280).

so aus, dass das Periodenparallelogramm gleichseitig wird und die Winkel $\frac{\pi}{2}$ bez. $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ aufweist.

Gehen wir nun gleich wieder vom Periodenparallelogramm bez. der Fläche F_m zur Normalcurve zurück, so entspringt der Satz: *Die elliptische Normalcurve C_n gestattet unendlich viele eindeutige Transformationen in sich; im allgemeinen sind dies diejenigen Transformationen, welche sich in der transcendenten Gestalt:*

$$u' = \pm u + c \tag{9}$$

darstellen; im harmonischen und äquianharmonischen Falle aber kommen zu (9) *noch die Substitutionen:*

$$u' = \pm iu + c \quad \textit{bez.} \quad u' = \pm \varrho^{\pm 1} u + c \tag{10}$$

hinzu; die Constante c bleibt hier allenthalben unbestimmt.

Durch vorstehende Betrachtung wird nun gerade die Frage nach der gegenseitigen Beziehung der Normalcurven getroffen, welche bei einem und demselben Periodenverhältnis $\omega_1 : \omega_2$ den wechselnden Werten der Residuensumme s entsprechen. Führen wir nämlich unter Beibehaltung der in den Formeln (1) und (2) gebrauchten Bezeichnungsweise die Transformation $u' = u + c$ aus, indem wir dabei c im speciellen aus $nc = s$ berechnen und $a_{ik} - c = a'_{ik}$ setzen, so sind die

$$x'_i = C_i \prod_{k=1}^{n} \sigma(u' - a_{ik}) = C_i \prod_{k=1}^{n} \sigma(u - a'_{ik}) \tag{11}$$

nach den allgemeinen Sätzen über die Functionen der Fläche F_m mit rationalen ganzen homogenen Functionen $G_i(x_1, x_2, \ldots)$ der ursprünglichen x_i proportional; und andrerseits stellen die x'_i, wie man sieht, σ-Producte mit der Residuensumme Null, $\sum_{k=1}^{n} a'_{ik} = 0$, vor. Indem wir also das Coordinatensystem fest denken, *wird die durch $u' = u + c$ angezeigte Transformation der Normalcurve in sich durch*

$$x_1' : x_2' : \cdots : x_n' = G_1(x_i) : G_2(x_i) : \cdots : G_n(x_i)$$

dargestellt, und auf diese Transformation kommt also der vollzogene Wechsel der Residuensumme zurück.

Zugleich geht hieraus hervor, dass wir unsere Betrachtung nicht im Wesen beschränken, wenn wir über die Residuensumme (2) von vornherein in particulärer Weise verfügen; *wir schreiben in diesem Sinne fortan für dieselbe etwa den Wert Null vor.*

Unter den Transformationen der Normalcurve C_n in sich giebt es immer einige, die in einfachster Weise *Collineationen* sind. Um sie zu finden, üben wir $u' = \pm u + c$ aus und erhalten als Residuensumme

für die entspringenden x_i' zunächst $\mp nc$, indem ja $\sigma(-u) = -\sigma(u)$ ist und die Residuensumme der x_i Null sein sollte. Ist jetzt $\mp nc$ ein ganzzahliges Vielfaches der Perioden, so lassen sich die x_i', indem wir sie mit einem gemeinsamen Exponentialfactor versehen (cf. I p. 157), wieder als σ-Producte mit $s = 0$ darstellen; nur in diesem Falle, dann aber auch stets, lassen sich die x_i' mit n linearen homogenen Verbindungen der ursprünglichen x_i proportional setzen. Schreiben wir also $nc = \lambda\omega_1 + \mu\omega_2$ (wobei wir offenbar die ganzen Zahlen λ, μ auf das Intervall $0, 1, \ldots, (n-1)$ einschränken können), so entspringt der Satz: *Die elliptische Normalcurve n^{ter} Ordnung geht, den $2n^2$ Substitutionen:*

$$u' = \pm u + \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n} \tag{12}$$

entsprechend, durch $2n^2$ Collineationen des Raumes R_{n-1} in sich selbst über, und es sind dies die einzigen derartigen Collineationen, falls weder g_2 noch g_3 verschwindet).* Diese Collineationen bilden eine Gruppe G_{2n^2}, in welcher die oben (p. 3 u. f.) betrachtete G_{n^2} eine ausgezeichnete Untergruppe des Index zwei ist**).

§ 2. Geometrische Folgerungen über die Normalcurven C_n vermöge der Methode des Projicierens.

In Bd. I p. 560 u. f. haben wir bei den Normalcurven beliebiger Geschlechter p eine Art geometrischer Deduction erwähnt, die man als Methode des Projicierens und Schneidens bezeichnet, und die insbe-

*) Im Falle des Verschwindens von g_3 oder g_2 wächst die Zahl der Collineationen der C_n in sich ersichtlich auf $4n^2$ bez. $6n^2$. Vom letzteren Falle haben wir bei $n = 3$ bereits in I p. 686 u. f. eine Anwendung zu machen gehabt.

**) Weitere Untersuchungen über die eindeutigen Transformationen (9) der C_n in sich hat nach der geometrischen Seite hin insbesondere Hr. Segre angestellt; z. B. zieht derselbe diejenigen im R_{n-1} gelegenen Regelflächen $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung zur näheren Betrachtung heran, deren Erzeugende jeweils die geraden Verbindungslinien zweier einander durch die grade vorliegende Transformation zugewiesenen Punkte der C_n sind. Im Falle $n = 4$ gewinnen wir für jede Transformation eine Regelfläche 2ten Grades, auf welcher die C_n gelegen ist. Doch vgl. man das Nähere in der I p. 568 citierten Arbeit Segre's. Zahlreiche in gleicher Richtung liegende Untersuchungen anderer Geometer können wir nicht besonders verfolgen. Übrigens darf wohl noch bemerkt werden, dass die Collineationen der Curve 8ter Ordnung in sich zuerst auftreten in der Arbeit von Klein, *„Über eine geometrische Interpretation der Resolventen algebraischer Gleichungen"*, Math. Ann. Bd. 4 (1872); vgl. insbesondere p. 353 u. f. daselbst. Hieran reiht sich zunächst weiter der Aufsatz von Harnack, *Über die Darstellung der Raumcurve vierter Ordnung erster Species durch doppeltperiodische Functionen,* Math. Ann. Bd. 12 (1877).

sondere von den modernen italienischen Geometern zur Anwendung gebracht ist. Wir werden hier durch Überlegungen dieser Art ohne Mühe eine Reihe von Aufschlüssen über die elliptischen Normalcurven ableiten können.

Bei fest gegebenen Werten ω_1, ω_2 (oder, noch besser gesagt, bei gegebenen g_2, g_3) giebt es im Sinne des vorigen Paragraphen für die projective Auffassung im wesentlichen nur eine einzige Normalcurve C_n, die eigentlich im R_{n-1} gelegen ist. Man projiciere jetzt die C_n von einem Punkte des R_{n-1} auf eine durch diesen Punkt nicht hindurchgehende Ebene des R_{n-1}, d. i. genauer gesprochen: auf einen im R_{n-1} gelegenen linearen Raum R_{n-2} von $(n-2)$ Dimensionen, der das Projectionscentrum nicht enthält. Zwei Fälle haben wir hierbei zu unterscheiden, je nachdem nämlich das Projectionscentrum auf der C_n selbst gelegen ist oder nicht. *Als Projection finden wir im ersten Fall die Normalcurve C_{n-1} des R_{n-2}, im zweiten Fall aber eine elliptische Curve C_n der n^{ten} Ordnung des Raumes R_{n-2}.*

Der fraglichen Massnahme werden wir leicht eine analytische Grundlage verleihen und damit den eben ausgesprochenen Satz belegen. Wir wählen zu dem Ende das Coordinatenpolyeder der x_i derart, dass das Projectionscentrum in die Ecke

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0$$

zu liegen kommt, während die gegenüberliegende Seite $x_n = 0$ die Projectionsbasis R_{n-2} sein soll. Die fragliche Projection besteht dann einfach in der Abstreifung der n^{ten} Variabelen x_n und Deutung der übrigen als homogener Coordinaten des R_{n-2}. Liegt dabei die zum Projectionscentrum gewählte Ecke auf der C_n und kommt ihr der Wert $u = a$ des Integrals zu, so haben die $(n-1)$ ersten σ-Producte x_i den Factor $\sigma(u-a)$ gemeinsam. Indem wir also ihre Verhältnisse als homogene Coordinaten des R_{n-2} deuten, können wir den gemeinsamen Factor $\sigma(u-a)$ fortheben und haben dann thatsächlich nur noch mit $(n-1)$-gliedrigen σ-Producten zu thun. Im anderen Falle (dass nämlich das Projectionscentrum nicht auf der C_n gelegen ist) bleiben die $x_1, \ldots, x_{n-1}$ n-gliedrige σ-Producte und werden also auch im R_{n-2} das Periodenparallelogramm der u-Ebene auf eine C_n der Ordnung n abbilden.

Bei der soeben vollzogenen Projection von einem Curvenpunkte aus haben wir übrigens stillschweigend die Voraussetzung gemacht, dass derselbe kein mehrfacher Punkt der C_n sei. Indem wir auch weiter an einer dementsprechenden Wahl des Projectionscentrums auf der C_n festhalten, mögen wir die C_{n-1} in die C_{n-2} des R_{n-3}, diese

in die C_{n-3} des R_{n-4} u. s. w. projicieren*). Letzten Endes kommen wir solcherweise zur C_4 des R_3, zur C_3 des R_2 und endlich zur doppelt überdeckten Geraden mit vier Verzweigungspunkten (cf. I p. 568). Hier haben wir nun folgende geometrisch evidente Überlegung: Da die ebene C_3 des Geschlechtes $p = 1$ weder doppelt zählende Curvenzüge noch auch mehrfache Punkte aufweist, so können solche auch bei der C_4 des R_3, bei der C_5 des R_4 u. s. w. nicht eintreten: *Die elliptische Normalcurve C_n des R_{n-1} weist also weder doppelt zählende Züge noch überhaupt mehrfache Punkte auf;* einen Satz, den man natürlich auch analytisch als eine Eigenschaft der n-gliedrigen σ-Producte x_i aussprechen kann.

Einen Augenblick verweilen wir noch bei dem Falle, dass auch Projectionen von Punkten, die nicht auf der Curve liegen, mit zur Ausführung kommen. Da werden wir, allgemein zu reden, elliptische Curven n^{ter} Ordnung im Raume R_ν von $\nu < n - 1$ Dimensionen erhalten. Umgekehrt bemerkt man aber auch aufs leichteste (durch Betrachtung der zugehörigen σ-Producte), dass jede in einem R_ν gelegene elliptische Curve C_n einer Ordnung $n > \nu + 1$ als Projection der einen C_n des R_{n-1} angesehen werden kann. Diese allgemeinen elliptischen Curven des R_ν mit einer Ordnung $> \nu + 1$ treten nun an Einfachheit in mehrfacher Rücksicht hinter der einen diesem Raume R_ν angehörenden Normal-$C_{\nu+1}$ zurück. Erstlich ist gar nicht ausgeschlossen, dass jene Curven mehrfache Punkte aufweisen mögen, ein Umstand, der für $\nu = 2$ sogar notwendig auftritt. Auf der anderen Seite aber bemerke man, dass es auch für den projectiven Standpunkt selbst schon bei $n = \nu + 2$ nicht mehr nur eine, sondern unendlich viele wesentlich verschiedene elliptische Curven im R_ν giebt, was man vermöge einer kleinen Zwischenbetrachtung durch die Willkür des frei im $R_{\nu+1}$ zu wählenden Projectionscentrums zu begründen hat. —

Endlich verwenden wir die Methode des Projicierens mit Vorteil bei der Discussion einer algebraischen Darstellung der Normalcurve n^{ter} Ordnung. Um eine solche zu Wege zu bringen, bilden wir uns die $\frac{n(n+1)}{2}$ quadratischen Verbindungen der x_i und bemerken, dass

*) Diese auf einander folgenden Massnahmen lassen sich übrigens auch in einen Schritt zusammenziehen; so z. B. werden wir die beiden ersten Projectionen zusammengenommen auch als *eine* Projection der C_n von der Polyederkante $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-2} = 0$ auf den durch $x_{n-1} = x_n = 0$ dargestellten linearen R_{n-3} auffassen. Man mache sich diese Verhältnisse am Beispiele der C_4 deutlich; die Tetraederkante, von der aus wir projicieren, muss dabei eine Secante der C_4 sein, um als Projection der C_4 auf die gegenüberliegende Tetraederkante die letztere in doppelter Überdeckung zu erhalten.

dieselben $2n$-gliedrige σ-Producte der Residuensumme Null vorstellen. Nach dem Hermite'schen Satze können also unter ihnen höchstens $2n$ linear-unabhängige Grössen vorkommen, während sich durch diese die übrigen $\frac{n(n-3)}{2}$ Producte $x_i x_k$ linear darstellen lassen. *So entspringen* $\frac{n(n-3)}{2}$ *linear-unabhängige homogene Relationen zweiten Grades zwischen den* x_i; *wir werden dieselben als ebenso viele Flächen zweiten Grades des* R_{n-1} *deuten, auf deren jeder die* C_n *ganz gelegen ist.* Thatsächlich werden wir weiter unten $2n$ linear-unabhängige $2n$-gliedrige σ-Producte auf dem gekennzeichneten Wege gewinnen und können daraufhin die $\frac{n(n-3)}{2}$ quadratischen Relationen unmittelbar hinschreiben. Es ist interessant schon hier zu bemerken, dass diese Relationen nicht nur, wie wir schon andeuteten, von einander linear-unabhängig sind, *sondern dass auch umgekehrt jede neue quadratische Relation nur eine lineare Combination jener* $\frac{n(n-3)}{2}$ *Gleichungen ist.* Auch letzteren Umstand folgert man leicht aus der linearen Unabhängigkeit jener zunächst gebildeten $2n$ σ-Producte*).

Man kann nun vermöge der Methode des Projicierens den Beweis erbringen, *dass die eben genannten* $\frac{n(n-3)}{2}$ *Flächen zweiten Grades die Normalcurve* n^{ter} *Ordnung rein zum Ausschnitt bringen.* Man setze nämlich, die Flächen hätten ausser der C_n noch einen weiteren Bestandteil $C^{(n)}$ gemein, und wende nun Projection von einem Punkte der C_n aus an. Um zu beschreiben, was hierbei aus den Flächen zweiten Grades wird, kleiden wir die leicht zu bewerkstelligende analytische Deduction sogleich in ein geometrisches Gewand. Wir fassen die $\frac{n(n-3)}{2}$ Flächen als Individuen eines $\frac{n^2-3n-2}{2}$-fach unendlichen linearen Systems solcher Flächen auf und finden in diesem insbesondere ein $\frac{n^2-5n+2}{2}$-fach unendliches lineares System von Kegeln, deren gemeinsame Spitze das Projectionscentrum ist. Nur diese Kegel liefern nach Ausführung der Projection im R_{n-2} ein System von $\frac{(n-1)(n-4)}{2}$ linear-unabhängigen Flächen zweiten Grades, welche nun ihrerseits im Sinne unserer Annahme die Curve $C_{n-1} + C^{(n-1)}$ ausschneiden werden. Hier wolle man beachten, dass diese letztere Curve jedenfalls die gesamte Projection des Durchschnitts $C_n + C^{(n)}$ der

*) In derselben Weise liessen sich auch die cubischen, biquadratischen etc. Relationen zwischen den x behandeln.

Flächen 2ten Grades im R_{n-1} aufweisen muss, und dass eben deshalb, wofern ein Teil $C^{(n)}$ wirklich vorkommt, jedenfalls auch ein Curvenzug $C^{(n-1)}$ auftreten muss. Die nämliche Überlegung wiederhole man bis zum Raume R_3 herab, wo jetzt offenbar zwei Flächen zweiten Grades mehr als eine C_4 gemeinsam haben müssten, sofern ein Zug $C^{(4)}$ wirklich auftreten sollte. Indem man aber weiss, dass die elliptische Normal-C_4 des R_3 der vollständige Durchschnitt zweier Flächen zweiten Grades ist, ergiebt sich jetzt umgekehrt unsere obige Behauptung betreffs des reinen Ausschnitts der C_n.

§ 3. Das kanonische Coordinatensystem der C_3 und seine Verallgemeinerung für die C_n.

Die Bedeutung, welche den elliptischen Normalcurven für die Probleme der Teilung und Transformation zukommt, wird dadurch begründet, dass wir besonders charakteristische Coordinatensysteme für die Darstellung der C_n zu Grunde legen können. Wir werden in diesem Sinne gut thun, hier zunächst einige der gebräuchlichen Coordinatensysteme der ebenen C_3 in die Discussion zu ziehen und beginnen mit der Betrachtung der wohlbekannten Gleichungsform

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

die wir aber sogleich unter Einführung der homogenen Coordinaten:

$$(1) \qquad x_1 : x_2 : x_3 = \wp' : \wp : 1$$

in die homogene Gestalt umsetzen:

$$(2) \qquad x_1^2 x_3 - 4x_2^3 + g_2 x_2 x_3^2 + g_3 x_3^3 = 0.^{*)}$$

Die hiermit geschriebene Gleichungsform der C_3 heisse die *kanonische*, einen Namen, den wir zugleich auf das ihr zu Grunde liegende Coordinatensystem übertragen. Indem wir sogleich den geometrischen Sinn des kanonischen Coordinatensystems beschreiben wollen, möge man vorerst noch bemerken, in welch' naher Beziehung die kanonische Gestalt (2) zur linearen Invariantentheorie der ternären cubischen Formen steht. Eine Form dieser Art besitzt bekanntermassen zwei Invarianten, die man nach Aronhold, welcher sie auffand, durch S und T bezeichnet. Die erste unter ihnen ist von vierter, die andere von sechster Dimension in den Coefficienten, und man findet ihre vollständigen Ausdrücke z. B. in den Salmon'schen Vorlesungen über

---

*) Indem man übrigens auf die Formeln (3) in I p. 157 zurückgeht, stellen sich die hier auftretenden x_i mit gewissen dreigliedrigen σ-Producten proportional dar, womit formeller Anschluss an das Gleichungssystem (1) des vorletzten Paragraphen gewonnen ist.

höhere ebene Curven. Berechnet man nun für die Form (2) die beiden fraglichen Invarianten, so kommt:

$$(3) \qquad S = -\frac{4}{27}g_2, \quad T = \frac{64}{27}g_3;$$

es sind also von numerischen Bestandteilen abgesehen unmittelbar die beiden Aronhold'schen Invarianten, welche die Coefficienten unserer kanonischen Gleichungsform abgeben. Will man Gleichung (2) noch so umformen, dass nur noch die absolute rationale Invariante J allein in den Coefficienten auftritt, so wende man zu dem Zweck die Transformation an:

$$(4) \qquad x_1 : x_2 : x_3 = (g_3^{\frac{3}{2}} \cdot y_1) : (g_3 g_2^{\frac{1}{2}} \cdot y_2) : (g_2^{\frac{3}{2}} \cdot y_3).$$

Die Gleichung (2) nimmt daraufhin die Gestalt an:

$$(5) \qquad y_1^2 y_3 - 4y_2^3 + \frac{27J}{1-J}(y_2 y_3^2 + y_3^3) = 0.$$

Überall sind es hier nur die *rationalen* Invarianten (cf. I. p. 3 u. f.), welche in den Coefficienten unserer Gleichungen (2) und (5) auftreten. Man halte hieran im Gegensatz zu späteren Entwicklungen fest, wo wir auch wieder *irrationale* Invarianten als Gleichungscoefficienten antreffen werden. Vor allem ziehe man aber aus der Rationalität der Coefficienten von (2) sogleich den nachfolgenden Schluss: *Eine beliebig vorgelegte elliptische C_3 lässt sich nur durch eine einzige Gleichung der kanonischen Gestalt darstellen;* denn es sind eben die Coefficienten der letzteren rational in denjenigen der ursprünglichen Gleichung. Man wird im Anschluss hieran gleich fragen, durch wieviele unterschiedene lineare Transformationen eine vorgelegte allgemeine Gleichungsform der C_3 in die kanonische Gestalt übergeführt wird: *Offenbar giebt es insgesamt achtzehn derartige Transformationen*)*, dem Umstande entsprechend, dass die C_3 durch achtzehn Collineationen in sich übergeht.

Bei dieser Sachlage muss es für die Normalcurve dritter Ordnung immer achtzehn verschiedene kanonische Coordinatensysteme geben, die insofern mit einander gleichberechtigt sind, als sie alle aus einem unter ihnen durch die Collineationen der G_{18} entstehen. Es ist hiermit noch keineswegs behauptet, dass es nun auch achtzehn unterschiedene kanonische Coordinaten*dreiecke* giebt; vielmehr kann das einzelne unter ihnen sehr wohl bei einer in der G_{18} enthaltenen G_ν mit $\nu > 1$ in sich übergehen. Wir könnten in diesem Betracht sehr leicht analytisch das Nähere feststellen; inzwischen gelangen wir durch eine

*) Im Falle $g_3 = 0$ und $g_2 = 0$ wird es in analoger Weise ersichtlich 36 bez. 54 lineare Transformationen einer allgemeinen Gleichungsform in die kanonische Gestalt geben.

geometrische Betrachtung des kanonischen Systems noch zu einem besseren Überblick. Dabei ist nun sofort zu sehen, dass $x_3 = 0$ eine *Wendetangente* unserer Curve ist, deren Berührungspunkt in der Ecke $x_2 = x_3 = 0$ liegt, und dass die zu diesem Wendepunkte gehörende *harmonische Polare* durch $x_1 = 0$ dargestellt ist. Um die Bedeutung der dritten Dreiecksseite zu finden, schneide man die C_3 mit dem vom fraglichen Wendepunkte ausgehenden Geradenbüschel $\varkappa_3 x_2 - \varkappa_2 x_3 = 0$. Unter diesen Geraden giebt es vier Tangenten der C_3, deren Parameter $\varkappa_2, \varkappa_3$ sich, wie man leicht berechnet, aus

$$(6) \qquad \varkappa_3(4\varkappa_2^3 - g_2\varkappa_2\varkappa_3^2 - g_3\varkappa_3^3) = 0$$

bestimmen. Mit Rücksicht auf I p. 17 u. f. ergiebt sich also, dass durch $x_2 = 0$ *die lineare Polare der Wendetangente* ($\varkappa_3 = 0$) *in Bezug auf die drei anderen Tangenten* (6) dargestellt ist. Da eine ebene C_3 des Geschlechtes $p = 1$ neun Wendepunkte hat, *so giebt es auf Grund unserer geometrischen Analyse insgesamt neun kanonische Coordinatendreiecke.* Ein jedes unter ihnen muss demnach bei einer G_2 unverändert bleiben. Diese G_2 ist auch wieder geometrisch von vornherein zu erkennen, denn die zum Wendepunkt $x_2 = x_3 = 0$ als Centrum und zur harmonischen Polare $x_1 = 0$ als Axe gehörende harmonische Perspectivität (cf. I p. 709) muss offenbar die C_3 wie das Coordinatendreieck der x_i in sich überführen.

Die neun harmonischen Perspectivitäten der C_3 in sich sind offenbar diejenigen Operationen der G_{18}, welche sich in der transcendenten Gestalt $u' = -u + c$ darstellen. Insbesondere gehört $u' = -u$ zum Coordinatendreieck (1), und es stellt sich diese Transformation algebraisch in einfachster Weise durch Zeichenwechsel des x_1 bei unveränderten x_2, x_3 dar. Die übrigen neun Transformationen:

$$(7) \qquad u' = u + \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}$$

der C_3 in sich, welche für sich eine Untergruppe G_9 der G_{18} bilden, werden sich in den x_i durch solche lineare Substitutionen darstellen, deren neun Coefficienten (abgesehen freilich von der Identität $u' = u$) durchgehends von Null verschieden sind. Es ist ein Leichtes, über diese Coefficienten nähere Angaben zu machen. Wir bezeichnen dabei die $\wp$- und $\wp'$-Function des besonderen Argumentes (7) durch $\wp_{\lambda,\mu}(u)$ und $\wp'_{\lambda,\mu}(u)$ und haben nun offenbar die beiden Ansätze:

$$(8) \qquad \wp'_{\lambda,\mu}(u) = \frac{a_1\wp'(u) + a_2\wp(u) + a_3}{c_1\wp'(u) + c_2\wp(u) + c_3}, \quad \wp_{\lambda,\mu}(u) = \frac{b_1\wp'(u) + b_2\wp(u) + b_3}{c_1\wp'(u) + c_2\wp(u) + c_3},$$

wo die a_i, b_i, c_i von u unabhängige Coefficienten sind. Um z. B. die b_i, c_i zu bestimmen, bemerke man, dass

$$(9) \quad \wp_{\lambda,\mu}(u)\cdot\{c_1\wp'(u)+c_2\wp(u)+c_3\}-b_1\wp'(u)-b_2\wp(u)-b_3=0$$

unabhängig von u erfüllt sein muss. Entwickelt man also die linke Seite von (9) in eine Reihe nach ansteigenden Potenzen von u, wobei für $\wp(u)$, $\wp'(u)$ die Formeln I p. 149 (1), für $\wp_{\lambda,\mu}(u)$ aber die Taylor'sche Entwicklung:

$$(10) \qquad \wp_{\lambda,\mu}(u)=\wp_{\lambda,\mu}+u\cdot\wp'_{\lambda,\mu}+\frac{u^2}{2}\wp''_{\lambda,\mu}+\frac{u^3}{6}\wp'''_{\lambda,\mu}+\cdots$$

Anwendung findet*), so muss der Coefficient jeder einzelnen Potenz von u in der für (9) entspringenden Reihe identisch verschwinden; so erhält man lineare Gleichungen zur Bestimmung von b_i, c_i. Überdies beachte man, dass nicht nur das Quadrat von $\wp'(u)$ ganz und rational in $\wp(u)$, g_2, g_3 ist, sondern dass vor allem die sämtlichen höheren Ableitungen $\wp''(u), \cdots$ ganz und rational in $\wp(u)$, $\wp'(u)$, g_2, g_3 dargestellt werden können. Indem ein analoger Gedankengang offenbar auf die erste Gleichung (8) Anwendung findet, lassen sich die Coefficienten a, b, c als rationale ganze Functionen von g_2, g_3 und den beiden besonderen Teilwerten $\wp_{\lambda,\mu}$, $\wp'_{\lambda,\mu}$ darstellen. Von $\wp'_{\lambda,\mu}$ lassen sich alle höheren Potenzen als die erste, von $\wp_{\lambda,\mu}$ alle höheren als die dritte entfernen (cf. Formel (3) p. 16); hat man diese Rechnung durchgeführt, so sind die Coefficienten jeder der Gleichungen (8) bis auf einen allen gemeinsamen Factor eindeutig bestimmt.

Die elementare Durchführung der hiermit skizzierten Rechnung führt auf die nachfolgende, sogleich wieder homogen geschriebene Substitution:

$$(11) \quad \begin{cases} \varkappa x_1' = 8\wp'^2_{\lambda\mu}\cdot x_1 - 4\wp'_{\lambda\mu}(12\wp^2_{\lambda\mu}-g_2)\cdot x_2 \\ \qquad -4\wp'_{\lambda\mu}(\wp^3_{\lambda\mu}-5g_2\wp_{\lambda\mu}-6g_3)\cdot x_3, \\ \varkappa x_2' = 8\wp_{\lambda\mu}\wp'_{\lambda\mu}\cdot x_1 - 4(4\wp^3_{\lambda\mu}-3g_2\wp_{\lambda\mu}+4g_3)\cdot x_2 \\ \qquad +(4g_2\wp^2_{\lambda\mu}+24g_3\wp_{\lambda\mu}+g_2^2)\cdot x_3, \\ \varkappa x_3' = 8\wp'_{\lambda\mu}\cdot x_1 + 4(12\wp^2_{\lambda\mu}-g_2)\cdot x_2 \\ \qquad -4(4\wp^3_{\lambda\mu}-g_2\wp_{\lambda\mu}+2g_3)\cdot x_3, \end{cases}$$

wobei unter $\varkappa$ der Proportionalitätsfactor verstanden ist. Indem wir nun noch der Combination $\lambda=\mu=0$ in (7) die identische Substitution der x_i zuordnen, liefern uns die verschiedenen Werte λ, μ insgesamt neun Substitutionen, welche eine Gruppe bilden. Natürlich wird, falls wir durch Combination zweier solchen Substitutionen eine dritte Operation der G_9 wirklich herstellen wollen, ein ausgedehnter Gebrauch

*) Man vergl. die im vorigen Abschnitt p. 12 eingeführte Bezeichnungsweise der Teilwerte.

von denjenigen algebraischen Relationen zu machen sein, welche für die $\wp_{\lambda,\mu}$, $\wp'_{\lambda,\mu}$, als für ganze Modulformen dritter Stufe, in Gültigkeit sind. In entsprechender Weise kommen die speciellen Teilungsgleichungen selbst zur Anwendung, falls wir die Gleichung (2) thatsächlich durch die Substitution (11) in sich selbst überführen wollen.

Die Verallgemeinerung des kanonischen Coordinatensystems für die Normalcurven C_4, C_5 u. s. w. lässt sich in mehrfacher Art erreichen. Immer liegt nur der Nachdruck darauf, dass wir ausschliesslich mit den *rationalen* Invarianten oder, um es gleich anders zu sagen, mit Grössen *erster* Stufe zu thun haben wollen. Dies erreichen wir z. B., wenn wir für die C_n des R_{n-1} als Cartesische Coordinaten $\wp(u)$, $\wp'(u)$, $\wp''(u), \ldots, \wp^{(n-1)}(u)$ zu Grunde legen*); dass diese Grössen auch wirklich linear-unabhängig sind, erkennt man leicht aus den Anfangsgliedern der Reihenentwicklungen nach u. Es werden dann z. B. die beiden linear-unabhängigen Flächen zweiten Grades, welche die Raumcurve vierter Ordnung als Durchschnitt haben, durch die beiden Gleichungen

$$(12)\qquad \begin{cases} 2\wp'' - 12\wp^2 + g_2 = 0, \\ 3\wp'^2 - 2\wp\wp'' + 2g_2\wp + 3g_3 = 0 \end{cases}$$

gegeben sein, in deren Coefficienten ausser numerischen Bestandteilen nur die Invarianten g_2, g_3 enthalten sind. An Stelle von (8) treten jetzt die Gleichungen:

$$(13)\qquad \wp_{\lambda,\mu}(u) = \frac{a_1\wp''(u) + a_2\wp'(u) + a_3\wp(u) + a_4}{b_1\wp''(u) + b_2\wp'(u) + b_3\wp(u) + b_4}, \text{ etc.}$$

Die Bemerkungen über die Coefficienten der Gleichungen (13) übertragen sich vom Falle $n = 3$ her ohne weiteres, wie man denn offenbar auch ganz allgemein bei der elliptischen Normalcurve n^{ter} Ordnung wiederum entsprechende Verhältnisse antrifft. Wir haben übrigens um so weniger Veranlassung, hierbei noch ausführlicher zu verweilen, als das kanonische Coordinatensystem für unsere späteren Zwecke der engeren Modultheorie nicht entfernt eine gleich wichtige Bedeutung besitzt, wie das nun zu besprechende „singuläre“ System.

§ 4. Das singuläre Coordinatensystem für die Normalcurve C_3.**) Erste Einführung der Grössen X_α.

Mit Rücksicht auf sein Verhalten gegenüber der Modulgruppe könnten wir das kanonische Coordinatensystem der Normalcurve n^{ter}

*) Etwas anders ist die Verallgemeinerung des kanonischen Coordinatensystems in „Normalcurven“ § 7 durchgeführt.

**) Man vergl. hier die noch mehrfach zu nennende Arbeit von Hrn. Bianchi,

Ordnung auch als dasjenige der *ersten* Stufe bezeichnen. Es hat sich aber des weiteren gezeigt, dass man in übersichtlicher Weise ein anderes Coordinatensystem für die C_n aufbauen kann, welches eine gleich innige Beziehung zur n^{ten} Stufe aufweist; wir werden dieses neue Coordinatensystem als das *singuläre* benennen. Im Falle $n = 3$, den wir wieder zunächst besonders betrachten, handelt es sich einfach um die sogenannte Hesse'sche Normalform der Curvengleichung. Die letztere lautet bekanntlich:

$$X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 + 6a X_0 X_1 X_2 = 0; \tag{1}$$

wir haben dabei die Coordinaten, wie es hinfort allgemein bei Zugrundelegung des singulären Coordinatensystems geschehen mag, durch den Buchstaben X bezeichnet.

Um an dieser Gleichung die allgemeinen Überlegungen von § 1 und § 2 zu specialisieren, so bemerke man zunächst, dass sich die G_{18} aller Collineationen der C_3 in sich unter Zugrundelegung der X_α äusserst einfach darstellt. Es wird nämlich (1) erstlich bei den sechs Permutationen der X_α, welche eine Untergruppe G_6 bilden, in sich übergehen, ausserdem aber bei der aus $X_\alpha' = \varrho^\alpha X_\alpha$ entspringenden G_3, welche mit der G_6 zusammen die G_{18} bilden wird*). Man sieht, *dass das Coordinatendreieck der X_α durch alle achtzehn Collineationen der G_{18} in sich transformiert wird*, und eben deshalb müssen die neun Schnittpunkte desselben mit der C_3, von denen übrigens zufolge leichter Rechnung keine zwei coincidieren, ein System von neun Punkten der C_3 bilden, das durch alle in Rede stehenden achtzehn Collineationen in sich übergeführt wird. Man wird sofort vermuten, dass wir hier mit dem System der neun Wendepunkte der C_3 zu thun haben, und beweist solches in der That auf Grund bekannter Sätze über Curven 3ter Ordnung durch Berechnung der Hesse'schen Curve von (1), für welche wir die Gleichungsform gewinnen:

$$X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 - \frac{1+2a^3}{a^2} \cdot X_0 X_1 X_2 = 0.$$

Es ist nun ein bekannter Satz aus der Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung, dass sich die neun Wendepunkte auf vier Weisen durch je drei gerade Linien ausschneiden lassen, und man benennt diese vier Tripel von Geraden als die vier *Wendedreiecke* der C_3. Indem das Dreieck der X_α zu ihnen gehört, finden wir vor allen Dingen das

---

Über die Normalformen dritter und fünfter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung, Math. Ann. Bd. 17 (1880).

*) Die Specialfälle $g_2 = 0$ und $g_3 = 0$ lassen wir hier der Kürze halber ausser Betracht.

Resultat, *dass unser singuläres Coordinatendreieck der C_3 eines unter vier coordinierten ist.* Wir können daraufhin leicht die Anzahl aller singulären Coordinatensysteme selbst bestimmen, indem wir abzählen, wieviel Substitutionen $X_\alpha' = c_\alpha X_\beta$ aus (1) wieder eine Gleichung derselben Gestalt herstellen. Offenbar aber darf man zu solchem Zwecke erstlich jedes X_α mit einer beliebigen multiplicativen dritten Einheitswurzel versehen, was für die Quotienten der X_α neun Möglichkeiten giebt. Combinieren wir dieselben mit den sechs Permutationen der X_α, so entspringen bei festliegendem Dreieck noch 54 verschiedene Systeme, *so dass die Gesamtzahl aller singulären Coordinatensysteme für die Normalcurve dritter Ordnung sich zu* 216 *berechnet.*

Statt hier übrigens von 216 Coordinatentransformationen zu reden, können wir ein erstes System auch festhalten und nun die entspringenden 216 Substitutionen als eine Gruppe G_{216} von Collineationen der Ebene auffassen. Indem dann (1) bei einer Untergruppe G_{18} in sich selbst übergeht, entspringen insgesamt zwölf unterschiedene Gleichungen (1), *d. h. der Coefficient a ist eine zwölfwertige Grösse**). Um die nähere Bedeutung derselben aufzudecken, stellen wir die nachfolgende Betrachtung an.

Wenn wir von einer vorgelegten allgemeinen Gleichungsform der C_3 durch eine der 216 Substitutionen zur Hesse'schen Normalform gehen, so wird dabei a jedenfalls eine homogene Function nullter Dimension der ursprünglichen Coefficienten werden. Stellen wir also gleich fest, *dass a als zwölfwertige Function der absoluten Invariante J allein betrachtet werden kann.* Des näheren gelingt es leicht, alle zwölf Werte a in einem unter ihnen auszudrücken. Erstlich werden bei der G_{54}, welche das Coordinatendreieck der X_α in sich transformiert, offenbar neben a selbst noch die beiden Werte $a' = \varrho a$, $a' = \varrho^2 a$ treten. Weiter aber müssen wir vom Dreieck der X_α den Übergang zu einem zweiten Wendedreieck finden und merken zu dem Ende als die Coordinaten X_α der neun Wendepunkte an:

$$(2) \qquad (0, -1, \varrho^\nu), \quad (-1, \varrho^\nu, 0), \quad (\varrho^\nu, 0, -1); \quad \nu = 0, 1, 2.$$

Schreiben wir also z. B.

$$(3) \qquad \varkappa \cdot X_\alpha' = X_0 + \varrho^{2\alpha} X_1 + \varrho^\alpha X_2,$$

*) Die bei dieser Auffassung eintretenden zwölf Curven C_3 gehören übrigens alle dem sog. syzygetischen Büschel an, das sich aus Grundcurve und Hesse'scher Curve linear zusammensetzt (vgl. Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie* I p. 505); im harmonischen Falle werden jene zwölf Curven zu je zwei, im äquianharmonischen zu je dreien identisch.

so haben wir offenbar im Dreieck der X_α' wieder ein Wendedreieck. Aber die Collineation (3) führt von (1) zur neuen Gleichung:

$$X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 + 6\frac{1-a}{1+2a}X_0X_1X_2 = 0,$$

und da die letztere wieder die Hesse'sche Normalform hat, so gehört die Operation (3) der G_{216} an. Eine neue Gestalt des in Rede stehenden Coefficienten lese man aus der letzten Gleichung ab und gewinnt nun sofort als dessen sämtliche zwölf Gestalten:

$$(4) \qquad a' = \varrho^i a, \quad a' = \varrho^i \cdot \frac{1 - a\varrho^k}{1 + 2a\varrho^k}.$$

Da haben wir nun die zwölf *Tetraedersubstitutionen* wieder gewonnen, wenn auch noch nicht direct in der Gestalt von I p. 615. Um die letztere zu erhalten, kann man entweder

$$(5) \qquad a = \frac{1}{\xi} \quad \text{oder} \quad a = -\frac{\xi}{2}$$

setzen, welche doppelte Möglichkeit offenbar in dem Umstande begründet ist, dass die Tetraedergruppe nicht nur in sich, sondern auch in der Oktaedergruppe ausgezeichnet enthalten ist. Wir behaupten nun, dass für uns die zweite Formel (5) die zutreffende ist, *dass also der Coefficient a, mit dem Factor* -2 *versehen, als Function der rationalen Invariante J, direct die Tetraederirrationalität* ξ *in der von uns seinerzeit gewählten Fixierung vorstellt.* Man findet nämlich als Ausdrücke der Invarianten S, T im Anschluss an die Form (1) (cf. Salmon l. c.):

$$S = a - a^4, \quad T = 1 - 20a^3 - 8a^6.$$

Rechnen wir dies vermöge der zweiten Gleichung (5) auf ξ um und recurrieren auf (3) p. 247, so ergiebt sich:

$$\frac{J}{J-1} = -\frac{64S^3}{T^2} = \frac{\xi^3(\xi^3+8)^3}{(\xi^6-20\xi^3-8)^2},$$

womit in der That die Tetraedergleichung (I p. 104 (1)) wiedergewonnen ist.

Die G_{216}, welche wir soeben als Collineationsgruppe der X_α gewannen, entsteht zufolge des gerade erhaltenen Ergebnisses, abstract genommen, durch Combination der G_{18} der Collineationen von C_3 in sich mit der nicht-homogenen Tetraedergruppe G_{12}. Man wolle bemerken, dass solcherweise gerade diejenige G_{216} erzeugt wird, die wir oben (p. 2 u. f.) für die Betrachtung der elliptischen Functionen dritter Stufe zu Grunde legten. Indem wir nämlich die G_{12} mit der einzelnen Substitution der Periode zwei: $u' = -u$ combinieren, entspringt

eine mit der homogenen Tetraedergruppe G_{24} holoedrisch isomorphe Gruppe. Hierzu hat dann noch die G_9 der Operationen

$$u' = u + \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}$$

zu kommen, und das ist im wesentlichen gerade diejenige Gruppe G_9, um welche es sich a. a. O. auch handelte*).

§ 5. Darstellung der bei der C_3 auftretenden X_α durch σ-Producte und transformierte σ.

Die am Schlusse des vorigen Paragraphen hervorgetretene Bedeutung der Tetraedergruppe für das singuläre Coordinatensystem der C_3 soll jetzt auch äusserlich dadurch zur Evidenz gebracht werden, dass wir für die X_α Darstellungen in der Gestalt (1) p. 238 wirklich herstellen. Da wir mit σ-Producten der Residuensumme Null arbeiten wollen, so bekommen die neun Wendepunkte der C_3 die transcendenten Argumente $u = \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}$, und man kann den einzelnen Wendepunkt durch das Symbol (λ, μ) charakterisieren. Immer solche drei Wendepunkte werden dann auf einer geraden Linie liegen, für welche die Summe der drei λ, wie auch die der μ durch 3 teilbar ist, und es lassen sich daraufhin leicht die vier Wendedreiecke der C_3 durch eine eigenartige schematische Zusammenstellung der Symbole (λ, μ) charakterisieren**). Sofern wir nun an der üblichen Fixierung des Hauptmoduls $\mathfrak{z}(\omega)$ festhalten wollen, ist durch die zweite Formel (5) § 4 bereits ein ganz bestimmtes unter den vier Wendedreiecken zum Coordinatendreieck der X_α herangezogen; und wir behaupten, dass wir das richtige treffen, indem wir:

$$X_\alpha(u) = c_\alpha \sigma_{\alpha 0}(u)\sigma_{\alpha 1}(u)\sigma_{\alpha 2}(u) \tag{1}$$

schreiben, wo die $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ die im vorigen Abschnitt Kap. 1 (p. 23) zu Grunde gelegte Bedeutung haben.

Man bemerke nämlich, dass das hiermit eingeführte $X_\alpha(u)$ als Function von u im Periodenparallelogramm nur an den drei Stellen $(\alpha, 0)$, $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$ verschwindet. Indem wir aber statt der einfachen σ-Function gleich die $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ gebrauchen, sind in (1) gegenüber dem

*) Unter Gebrauch der X_0, X_1, X_2 lernen wir in der G_{216} eine neue ternäre Gruppe linearer Substitutionen kennen, wie wir eine solche ternäre G_{168} am Schlusse von 1 bei der 7ten Stufe erhalten hatten. Diese G_{216} ist explicite wohl zuerst von Hrn. Camille Jordan aufgestellt worden in der Abhandlung über endliche Gruppen ternärer linearer Substitutionen im 84ten Bande des Crelle'schen Journals (1878).

**) Cf. Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie* I p. 507.

früheren Ansatze (1) p. 238 noch gewisse Exponentialfactoren hinzugekommen. Solches ist ja ohnedies erforderlich, da in (1) die Residuensumme nur erst bis auf Vielfache von ω_1, ω_2 mit Null identisch ist. Dass aber die Quotienten der durch (1) definierten X_α thatsächlich um ω_1 wie ω_2 periodisch sind, belegt man sofort auf Grund der Formel (7) p. 24. Endlich beweisen wir auf gruppentheoretischem Wege, dass die durch (1) begründete Auswahl unter den vier Wendedreiecken gerade mit der früheren Fixierung der Grösse ξ übereinkommt. Es sind nämlich die vier innerhalb der G_{12} gleichberechtigten Untergruppen G_3 eindeutig den vier Wendedreiecken zugeordnet, und zwar in dem Sinne, dass bei der einzelnen G_3 das zugehörige Wendedreieck in sich übergeht, während die drei anderen cyclisch permutiert werden. Dies ist so gemeint, dass z. B. durch die Substitution S der Wendepunkt $(\lambda, \mu) = \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}$ in $(\lambda, \lambda + \mu)$ übergeht; und nun überzeuge man sich, dass gerade das Dreieck der durch (1) gegebenen X_α der aus S entspringenden G_3 zugehört. Dieses aber musste auch der Fall sein; denn es ist $\xi(\omega + 1) = \varrho^2\xi(\omega)$, und der Übergang von ξ zu $\varrho^2\xi$ erfolgte vorhin gerade durch eine solche Collineation, bei der das Coordinatendreieck in sich überging.

An die Formel (1) reihen wir jetzt eine neue wichtige Darstellung von X_α. Die Nullstellen des einzelnen X_α liegen an den drei Stellen $\frac{\alpha\omega_1}{3}$, $\frac{\alpha\omega_1 + \omega_2}{3}$, $\frac{\alpha\omega_1 + 2\omega_2}{3}$ des Periodenparallelogramms; eben dieselben Nullpunkte weist aber auch die Function:

$$\sigma\left(u - \frac{\alpha\omega_1}{3} \,\middle|\, \omega_1, \frac{\omega_2}{3}\right) \text{ oder auch } \sigma_{\alpha 0}\left(u \,\middle|\, \omega_1, \frac{\omega_2}{3}\right)$$

auf, wo wir rechter Hand mit den σ-Teilwerten, gebildet für die transformierten Perioden ω_1, $\frac{\omega_2}{3}$, zu thun haben. Auf Grund bekannter Sätze schliessen wir, dass dieselben von den X_α jeweils nur um Exponentialfactoren abweichen; und damit entspringt für die X_α die neue Darstellung:

$$(2) \qquad X_\alpha(u) = c_\alpha' e^{G_\alpha(u)} \sigma_{\alpha 0}\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_2}{3}\right),$$

wobei die c_α' von u unabhängig, die $G_\alpha(u)$ aber ganze rationale Functionen von u sind.

Die $G_\alpha(u)$ haben wir so zu bestimmen, dass der Quotient der rechten Seiten von (2) und (1) doppeltperiodisch ist; er ist dann sogar constant, d. i. von u unabhängig, da er im Periodenparallelogramm allenthalben endlich ist. Des weiteren sind die Constanten c_α' und damit auch die c_α der Formel (1) so zu wählen, dass die Quotienten

der X_α auch wirklich gegenüber den Operationen $u' = u + \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}$ diejenigen linearen Substitutionen erfahren, welche wir im vorigen Paragraphen aus der Hesse'schen Normalform der Curvengleichung direct ablasen. Hierdurch sind dann natürlich nur erst die Quotienten der c_α bestimmt, und nun wird sich zeigen, *dass wir über diese Coefficienten* c_α *in Abhängigkeit von* ω_1, ω_2 *absolut derart verfügen können, dass das einzelne* X_α *als Function von* ω_1, ω_2 *die Rolle einer Modulform dritter Stufe spielt.* Indem wir die c_α so fixieren, dass die $X_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2)$ *gerade* Functionen ihrer drei Argumente sind, werden die X_α gegenüber den Operationen der homogenen Hauptcongruenzgruppe dritter Stufe *absolut* unveränderlich sein. Sie werden aber gegenüber den 24 modulo 3 incongruenten Substitutionen selbst eine ternäre Gruppe von 24 Substitutionen erfahren, welche ebendeshalb *lineare-homogene* Gestalt haben, weil sie geometrisch nichts anderes bedeuten, als den Übergang von einem singulären System zu den übrigen. Durch die Auswahl der c_α lassen sich demgemäss die X_α zu solchen Functionen ihrer *drei* Argumente u, ω_1, ω_2 gestalten, deren Verhältnisse bei Ausübung der 216 Substitutionen:

$$(3) \qquad \begin{cases} u' \equiv u + \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}, \quad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2) \\ \omega_1' \equiv \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega_2' \equiv \gamma\omega_1 + \delta\omega_2, \quad (\text{mod. } 3) \end{cases}$$

direct jene ternäre Gruppe G_{216} zur Darstellung bringen, welche wir vorhin als die Gruppe der 216 Collineationen der Ebene der X_α deuteten.

Alle diese Aufgaben werden wir deshalb nicht speciell ausführen, weil wir sie ohne viel Mehraufwand von Rechnung sogleich ganz allgemein für beliebige n erledigen können; aus den entspringenden allgemeinen Resultaten lassen sich dann durch einfache Specialisation $n = 3$ die im vorigen Absatz aufgeworfenen Fragestellungen beantworten. Merke man übrigens gleich jetzt an, dass aus der singulären Gleichungsform der C_3 eine eigenartige Darstellung des Hauptmoduls ξ durch die drei X_α entspringt; wir gewinnen da ersichtlich:

$$(4) \qquad \xi - 1 = \frac{(X_0 + X_1 + X_2)(X_0 + \varrho X_1 + \varrho^2 X_2)(X_0 + \varrho^2 X_1 + \varrho X_2)}{3 X_0 X_1 X_2}$$

und können von hier aus nach Einführung der endgültigen Ausdrücke (1) vermöge eines leichten Grenzübergangs die früher schon auf anderem Wege gewonnenen Formeln (7) p. 30 wiedererhalten*).

*) Wegen dieser Formel für ξ sehe man das Nähere bei Bianchi l. c.

§ 6. Einführung des singulären Coordinatenpolyeders der X_α für die elliptische Normalcurve C_n beliebiger Ordnung.

Die Formeln des vorigen Paragraphen sollen uns jetzt zur Richtschnur dienen, um auch bei den höheren n singuläre Coordinatensysteme für die Normalcurve C_n festzulegen. In zweckmässiger Verallgemeinerung reihen wir den neun Punkten (λ, μ) der C_3 auf der C_n diejenige einfach unendliche Schaar von Systemen zu je n^2 Punkten dieser letzten Curve an, welche durch die Argumente:

$$u = u_0 + \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}$$

mit beliebigem, aber fest gewählten Parameter u_0 markiert sind. Im Anschluss an Formel (1) p. 254 denken wir uns die eben angegebenen n^2 Argumente u bei stehendem u_0 in ein quadratisches Schema gebracht, in dessen Horizontalreihen gleiche λ und in dessen Verticalreihen gleiche μ stehen. Indem wir dann die Argumente der einzelnen Horizontalreihe als die Residuen für n zu bildende σ-Producte ansetzen, werden die Residuensummen übereinstimmend bis auf Vielfache der Perioden den Wert $\left(nu_0 + \frac{n-1}{2}\omega_2\right)$ aufweisen. Immer wollten wir aber mit σ-Producten arbeiten, deren Residuensummen ganzzahlige Verbindungen der Perioden vorstellen. *Dieser Anforderung genügen wir nun in der Weise, dass wir für ungerades n einfach $u_0 = 0$, für gerades n aber $u_0 = \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2n}$ schreiben,* wobei im letzteren Falle für die Wahl des u_0 die Glättung weiterhin auftretender Formeln mit massgeblich war. Indem wir noch statt der kürzeren Schreibweise $\sigma_{\lambda,\mu}$ die ausführlichere $\sigma_{\frac{\lambda}{n},\frac{\mu}{n}}$ benutzen, bei welcher der Teilungsgrad n immer gleich mit in die Bezeichnung der Indices hineingenommen ist, erscheint uns schliesslich die folgende Verallgemeinerung der Formeln (1) des vorigen Paragraphen als eine zweckmässige:

$$(1)\quad \begin{cases} X_\alpha(u) = c_\alpha \prod\limits_{\mu=0}^{n-1} \sigma_{\frac{\alpha}{n},\frac{\mu}{n}}(u \mid \omega_1, \omega_2), & n \equiv 1 \pmod{2}, \\ X_\alpha(u) = c_\alpha \prod\limits_{\mu=0}^{n-1} \sigma_{\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{2},\frac{\mu}{n}+\frac{1}{2n}}(u \mid \omega_1, \omega_2), & n \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Die Quotienten dieser für allgemeines n definierten n Grössen X_α sind wirklich doppeltperiodische Functionen von u mit den Perioden ω_1, ω_2. Indem wir aber weiter unten nachweisen wollen, dass die X_α des einzelnen n ein System von linear-unabhängigen Functionen von

u, ω_1, ω_2 darstellen, werden wir sie in der That zu einer Coordinatenbestimmung im R_{n-1} für die Normalcurve C_n verwerten können. Um das Coordinatensystem völlig auszugestalten, müssen wir, wie schon angedeutet, die Quotienten der von u unabhängigen Grössen c_α fixieren; es soll das im folgenden Paragraphen geschehen, wo es sich darum handeln wird, die Collineationsgruppe G_{2n^2} der Normalcurve in sich mit Hülfe der X_α analytisch darzustellen. Die absolute Fixierung der c_α, die wir gleichfalls in Aussicht nahmen, leisten wir erst im folgenden Kapitel, welches die Wirkung der Modulsubstitutionen auf die X_α zum Gegenstande der Untersuchung hat. Vorab noch eine Reihe geometrischer Bemerkungen über das durch (1) festgelegte Coordinatenpolyeder.

Die unmittelbarste Analogie zum Falle $n = 3$ liegt offenbar für die ungeraden n vor. Hier wird die Normalcurve von den n Ebenen des Coordinatenpolyeders in denjenigen n^2 Punkten geschnitten, welchen die Argumente $u = \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}$ zukommen. Sie entsprechen genau den neun Wendepunkten der C_3 und mögen als die n^2 *„singulären"* Punkte (λ, μ) der C_n benannt werden (die wir natürlich ebensowohl auch bei den Curven C_n gerader Ordnungen n besitzen). Die geometrische Bedeutung der n^2 singulären Punkte erhellt aus dem Abel'schen Theorem oder (was hier auf dasselbe hinauskommt) aus dem Hermiteschen Satze, wonach immer n solche Punkte der C_n in einer „Ebene" des R_{n-1} liegen, für welche die n Argumente u in Summa eine ganzzahlige Verbindung der Perioden liefern. *Die n^2 singulären Punkte der C_n bestehen demgemäss aus jenen Stellen, in welchen eine Ebene mit der Curve n consecutive Punkte gemein hat, d. i. die C_n $(n-1)$-fach berührt.*

Wie sich bei einem einzelnen Wendedreieck der C_3 auf den drei Seiten *alle* neun Wendepunkte fanden, so werden durch die Ebenen $X_\alpha = 0$ im R_{n-1} auf der C_n wieder die *gesamten* singulären Punkte ausgeschnitten. Für $n = 3$ gab es nur vier solche Dreiecke, und dieselben waren alle insofern miteinander gleichberechtigt, als sie bei Ausübung von Modulsubstitutionen auf die in den X_α enthaltenen Argumente ω_1, ω_2 in einander überführbar waren. Höher hinauf werden aber die in dieser Hinsicht vorliegenden Verhältnisse sehr viel mannigfaltiger. Durch je $(n-1)$ Punkte der C_n lässt sich eine „Ebene" des R_{n-1} legen, und waren jene $(n-1)$ Punkte der C_n ausschliesslich singuläre, so wird dies ersichtlich auch vom n^{ten} Schnittpunkt gelten. Nun könnte man als allgemeinstes Problem stellen, dass wir aus n Ebenen dieser Art Coordinatenpolyeder aufstellen sollen, wobei dann aber jeder singuläre Punkt auf einer und nur einer Ebene liegen müsste.

So lässt sich das Problem offenbar auch für gerade n fassen, und da hat sich (wie wir hier noch nebenbei anführen) für den nächsten Fall $n = 4$ gezeigt, dass die Gesamtzahl möglicher Tetraeder dieser Art 745 ist, die nun aber bezüglich ihres Verhaltens gegenüber der Modulgruppe keineswegs mehr alle mit einander gleichberechtigt sind*).

Einen noch höheren Grad der Allgemeinheit würden wir erreichen, wenn wir auch solche Ebenen zu Aufbau des Coordinatenpolyeders zuliessen, die in einzelnen singulären Punkten die C_n berühren dürften, aber auch übrigens nur singuläre Punkte auf der C_n ausschneiden; dabei würden dann im Gegensatz zum Voraufgehenden nicht mehr alle singulären Punkte der C_n von den Ebenen des einzelnen Polyeders ausgeschnitten. Ein solches Coordinatensystem liegt z. B. für $n = 3$ der bekannten Gleichungsform:

$$(2) \qquad (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 6kx_1x_2x_3 = 0$$

zu Grunde; es sind hier die drei Seiten des Dreiecks solche Wendetangenten der Curve, deren drei Berührungspunkte in *einer* Geraden (nämlich in der durch $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ dargestellten) liegen. Die Verallgemeinerung eines solchen Systems für die C_n wird man sofort in mannigfaltiger Weise durchführen können**).

Es ist nun an sich ein Problem von grossem Interesse, den weiten hier vorliegenden Spielraum der Einzeluntersuchung einer ausführlichen Discussion zu unterziehen. Auch für die Theorie der irrationalen Invarianten der Normalcurven, d. i. für die Modulfunctionen höherer Stufen, möchte man auf diesem Wege aufs neue eigenartige Resultate erzielen können, indem man z. B. auf die Substitutionscoefficienten Acht giebt, die beim Übergang von einem zum anderen System eintreten, des ferneren auf die Coefficienten in den Gleichungen, welche geeignet sind, die C_n algebraisch darzustellen u. s. w. Gleichwohl werden wir uns doch damit begnügen müssen, in (1) ein erstes, und zwar besonders brauchbares Coordinatenpolyeder fixiert zu haben, dem nun vorab allein unsere Besprechung gewidmet ist.

Anschliessend fügen wir auch noch einige Bemerkungen über die

---

*) Die 16 „singulären" Punkte der C_4 tragen auch den Namen der „Wendeberührungspunkte". Die bei ihnen eintretenden Verhältnisse sind gerade in dem im Texte gemeinten Sinne ausführlich dargestellt in der Leipziger Dissertation (1881) von Hrn. Lange *„Über die 16 Wendeberührungspunkte der Raumcurve vierter Ordnung erster Species"* (abgedruckt im 28. Bande der Schlömilch'schen Zeitschrift).

**) Vgl. hierzu die Untersuchung von Hrn. Schönflies in Bd. 35 der Math. Ann. (1888); es werden dort besondere Configurationen betrachtet, die sich in Anlehnung an die Normalcurve C_n definieren lassen.

für gerades n gegebene Formel (1) hinzu. Hier sind es gar nicht die singulären Punkte der C_n, welche wir durch die Ebenen des Coordinatenpolyeders ausschneiden; vielmehr treten an ihre Stelle diejenigen n^2 Punkte der C_n, deren Argumente u aus denjenigen der singulären Punkte jeweils durch Zufügung des $2n^{\text{ten}}$ Teiles $\frac{\omega_2}{2n}$ der Periode ω_2 entspringen. Dass man aber durch diese Abänderung des bei ungeradem n befolgten Gedankengangs für die geraden n den denkbar besten Anschluss an die bei ungeraden Ordnungen n entstehenden Resultate gewinnt, wurde allererst von Hrn. Hurwitz in einer noch öfter zu nennenden Arbeit durchgeführt*).

Sollen wir einen Augenblick beim Falle $n = 4$ verweilen, so knüpfen wir daran die folgende geometrische Überlegung: Ein einzelner singulärer Punkt der C_4 habe das Argument u_0; wir ziehen von ihm aus die zwölf Transversalen der C_4 nach denjenigen singulären Punkten, deren Argumente von u_0 um keinen der vier Beträge

$$0, \quad \frac{\omega_1}{2}, \quad \frac{\omega_2}{2}, \quad \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$$

verschieden sind. Insgesamt entspringen so 96 Transversalen, die wir zu Trägern von ebensovielen Ebenenbüscheln machen. Jedes derselben enthält vier Tangentialebenen, und die $4 \cdot 96$ Berührungspunkte coincidieren zu je acht in 48 Punkte der C_4, welche die „eigentlichen" Periodenachtel zu Argumenten u haben. Die fraglichen 48 Punkte zerlegen sich nun in drei Systeme zu je sechzehn Punkten, und die Argumente des einzelnen Systems entstehen aus denen der singulären Punkte einfach durch Zufügung der Beträge $\frac{\omega_1}{8}$ bez. $\frac{\omega_2}{8}$, $\frac{\omega_1+\omega_2}{8}$. Wie wir schon allgemein bemerkten, liegt das zweite von diesen Systemen dem Coordinatenpolyeder (1) zu Grunde, und man könnte hier höchstens noch fragen, warum nicht das erste oder dritte jener doch coordiniert stehenden Punktsysteme zur Verwendung kam. Man überblickt aber sofort, dass wir zum ersten System geführt wären, wofern wir von σ-Producten der Bauart $\sigma_{0,\alpha}\sigma_{1,\alpha}\sigma_{2,\alpha}\ldots$ ausgegangen wären, zum dritten endlich bei Verwendung von Producten der Art $\sigma_{\alpha,0}\sigma_{\alpha+1,1}, \sigma_{\alpha+2,2}\ldots$. Die solchergestalt bei Einführung der X_α begangene Unsymmetrie wird aber später durch Ausübung der Modulsubstitutionen auf die X_α von selbst zum Fortfall kommen; eben diese Operationen werden nämlich den Übergang vom Coordinatenpolyeder (1) zu jenen gleichberechtigten vermitteln.

*) Man sehe Math. Ann. Bd. 27 p. 183 *„Über endliche Gruppen linearer Substitutionen, welche in der Theorie der elliptischen Transcendenten auftreten"* (1885).

Wir unterlassen, die gleichen Ausführungen noch besonders für beliebiges gerades n zu wiederholen, da sie sich in der That aufs leichteste übertragen lassen. Übrigens ist es bei dieser Sachlage eine nicht völlig folgerechte Bezeichnungsweise, wenn wir nicht nur für ungerade, sondern auch bei den geraden n von einem durch (1) fixierten *singulären Coordinatenpolyeder* sprechen; jedoch wollen wir diese Ausdrucksweise der Gleichmässigkeit zuliebe ungeändert beibehalten.

§ 7. Vorläufige Normierung der X_α. Ausdruck der Collineationsgruppe G_{2n^2} durch die X_α.

Unsere nächste Aufgabe ist, die Quotienten der von u unabhängigen Grössen c_α in (1) § 6 zu bestimmen, und wir leisten dieselbe gleich im Verein mit der Darstellung der G_{2n^2} der Collineationen der Curve C_n in sich. Es ist zweckmässig, hierbei von einer neuen Ausdrucksweise der X_α auszugehen, derjenigen nämlich, welche wir für $n = 3$ in der Formel (2) p. 255 angaben. Wir ziehen, um diese Formel zu verallgemeinern, zuvörderst die beiden Formeln (1) des vorigen Paragraphen in die eine zusammen:

$$X_\alpha(u) = c_\alpha \prod_{\mu=0}^{n-1} \sigma_{\frac{\alpha}{n}+\varepsilon,\, \frac{\mu+\varepsilon}{n}}(u \mid \omega_1, \omega_2), \tag{1}$$

in welcher wir

$$\varepsilon = 0 \text{ oder } = \frac{1}{2} \tag{2}$$

gesetzt denken, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Des weiteren merken wir uns sogleich für die durchzuführenden Rechnungen, welche Veränderung die $X_\alpha(u)$ bei Vermehrung des u um Perioden erfahren. Der Quotient von $X_\alpha(u)$ und der n^{ten} Potenz der ursprünglichen σ-Function ist periodisch um ω_1, ω_2 (man vgl. auch die Formeln (2), (3) in I p. 158), und ebendeshalb wird $X_\alpha(u)$ sich bei Vermehrung des u um Perioden ebenso verhalten wie $\sigma^n(u)$, worüber man I p. 156 (9) nachsehe:

$$\begin{aligned} & X_\alpha(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2) \\ & = (-1)^{n(m_1 m_2 + m_1 + m_2)} e^{n(m_1\eta_1 + m_2\eta_2)\left(u + \frac{m_1\omega_1 + m_2\omega_2}{2}\right)} \cdot X_\alpha(u). \end{aligned} \tag{3}$$

Weiter sind die Nullpunkte von $X_\alpha(u)$ in dem zu ω_1, ω_2 gehörenden Periodenparallelogramm der u-Ebene an den Stellen

$$u = \left(\frac{\alpha}{n} + \varepsilon\right)\omega_1 + \frac{\mu+\varepsilon}{n}\omega_2, \quad \mu = 0, 1, \cdots, n-1 \tag{4}$$

gelegen. Eben dieselben Nullpunkte weist aber auch die durch Transformation n^{ter} Ordnung entspringende Function:

$$(5)\qquad \sigma_{\frac{\alpha}{n}+\cdot,\cdot}\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right)$$

auf, und da Unstetigkeitspunkte im Periodenparallelogramm weder bei ihr noch bei X_α auftreten, so ist der Quotient von (1) und (5) in Abhängigkeit von u eine Exponentialgrösse. So gewinnen wir allgemein den schon bei $n = 3$ formulierten Ansatz:

$$(6)\qquad X_\alpha(u) = a_\alpha e^{G(u)} \cdot \sigma_{\frac{\alpha}{n}+\cdot,\cdot}\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right).$$

Wie wir schon damals andeuteten, haben wir $G(u)$ jetzt so zu bestimmen, dass die rechte Seite von (6) bei Vermehrung des u um Perioden das durch (3) gekennzeichnete Verhalten zeigt, eine Bestimmung des G, die sich bis auf eine additive Constante nur in einer einzigen Weise treffen lässt. Das Verhalten des auf der rechten Seite von (6) enthaltenen σ-Factors berechnet man ohne Mühe aus den bezüglichen früheren Formeln; um die Bezeichnungsweisen auseinander zu halten, benenne man dabei nötigenfalls die transformierten Perioden $\omega_1, \frac{\omega_2}{n}$ besonders als $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ und bezeichne die ihnen zugehörigen und mit ihnen cogredienten Perioden des Integrals zweiter Gattung entsprechend durch $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$. Indem wir u einerseits um ω_1, sodann um ω_2 vermehren, erhalten wir als die beiden von $G(u)$ zu fordernden Bedingungen nach kurzer Zwischenrechnung:

$$(7)\qquad \begin{cases} G(u + \omega_1) - G(u) = \left(u + \frac{\omega_1}{2}\right)(n\eta_1 - \bar{\eta}_1), \\ G(u + \omega_2) - G(u) = \left(u + \frac{\omega_2}{2}\right)(n\eta_2 - n\bar{\eta}_2). \end{cases}$$

Zufolge der Legendre'schen Relation für die transformierten Perioden besteht

$$(8)\qquad \frac{\bar{\eta}_1 - n\eta_1}{2\omega_1} = \frac{n\bar{\eta}_2 - n\eta_2}{2\omega_2}$$

identisch, und wir wollen den gemeinsamen Wert der rechten und linken Seite von (8) in einer auch sonst*) gebräuchlichen Bezeichnungsweise durch G_1 benennen. Daraufhin nehmen die Formeln (7) die neue Gestalt an:

$$G(u + \omega_1) - G(u) = -G_1 \cdot (2u\omega_1 + \omega_1^2),$$
$$G(u + \omega_2) - G(u) = -G_1 \cdot (2u\omega_2 + \omega_2^2),$$

und man sieht, dass dem Exponenten in (6) einfach die Bedeutung $-G_1 \cdot u^2$ zukommt. *Als neue Darstellung der X_α gewinnt man so:*

---

*) Man sehe z. B. die Dissertation von Felix Müller, *De transformatione functionum ellipticarum*, Berlin 1867.

$$(9)\qquad X_\alpha(u\,|\,\omega_1, \omega_2) = a_\alpha e^{-\bar{G}_1 \cdot u^2} \cdot \sigma_{\frac{\alpha}{n}+\varepsilon, \varepsilon}\left(u \,\Big|\, \omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right)$$

oder auch ausführlich unter Rückgang auf die ursprüngliche σ-Function selbst:

$$(10)\quad X_\alpha(u) = a_\alpha \cdot e^{-\frac{\bar{\eta}_1 - n\eta_1}{2\omega_1}u^2 + \left(\frac{\alpha+\varepsilon n}{n}\bar{\eta}_1 + \varepsilon\bar{\eta}_2\right)u - \left(\frac{\alpha+\varepsilon n}{n}\bar{\eta}_1 + \varepsilon\bar{\eta}_2\right)\left(\frac{\alpha+\varepsilon n}{2n}\omega_1 + \frac{\varepsilon\omega_2}{2n}\right)} \cdot \sigma\left(u - \frac{\alpha+\varepsilon n}{n}\omega_1 - \frac{\varepsilon\omega_2}{n} \,\Big|\, \omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right).$$

Wir denken übrigens durch diese Formel die X_α zugleich für solche ganzzahlige α definiert, die nicht im Intervall $0, 1, \ldots, n-1$ gelegen sind.

Um jetzt die Veränderung der X_α gegenüber den $2n^2$ Operationen

$$u' = \pm u + \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}$$

in Erfahrung zu bringen, bemerke man erstlich, dass $X_\alpha\left(u + \frac{\lambda\omega_1}{n}\right)$ offenbar die nämlichen Nullstellen im Periodenparallelogramm aufweist, wie $X_{\alpha-\lambda}(u)$. Der Quotient beider Functionen wird also als Function von u eine Exponentialgrösse sein, und wir gewinnen von (10) aus nach kurzer Zwischenrechnung als Ausdruck derselben:

$$\frac{a_\alpha}{a_{\alpha-\lambda}} \cdot e^{\varepsilon \cdot \frac{\pi i \lambda}{n}} \cdot e^{\lambda\eta_1\left(u + \frac{\lambda\omega_1}{2n}\right)}.$$

Hier erscheint es im Hinblick auf weiter folgende Formeln zweckmässig, über die Quotienten der a_α folgende endgültige Festsetzung zu treffen:

$$(11)\qquad a_\alpha = (-1)^{\alpha n} e^{-\varepsilon\left(\frac{\pi i \alpha}{n} + \frac{5 i \pi}{2}\right)} \cdot \varkappa,$$

wobei $\varkappa$ eine von u unabhängige Function der Perioden bedeutet, deren Bestimmung Gegenstand einer späteren Untersuchung ist. Nach dieser Festsetzung erhalten wir als die gesuchte Veränderung des X_α bei Ausführung der Operation $u' = u + \frac{\lambda\omega_1}{n}$:

$$(12)\qquad X_\alpha\left(u + \frac{\lambda\omega_1}{n}\right) = (-1)^{n\lambda} e^{\lambda\eta_1\left(u + \frac{\lambda\omega_1}{2n}\right)} X_{\alpha-\lambda}(u).$$

Des weiteren hat $X_\alpha\left(u + \frac{\omega_2}{n}\right)$ offenbar dieselben Nullpunkte wie $X_\alpha(u)$, so dass wiederum der Quotient dieser beiden Grössen eine Exponentialfunction von u ist. Die Einzelrechnung weicht kaum wesentlich von der soeben durchgeführten ab und ergiebt das Resultat:

$$X_\alpha\left(u + \frac{\omega_2}{n}\right) = (-1)^n e^{-\frac{2 i \pi \alpha}{n}} e^{\eta_2\left(u + \frac{\omega_2}{2n}\right)} X_\alpha(u).$$

Durch Wiederholung dieser Formel entspringt die etwas allgemeinere:

$$(13)\qquad X_\alpha\left(u+\frac{\mu\omega_2}{n}\right)=(-1)^{\mu n}e^{-\frac{2i\pi}{n}\mu\alpha}e^{\mu\eta_2\left(u+\frac{\mu\omega_2}{2n}\right)}X_\alpha(u).$$

Besonders einfach erledigt sich endlich die Operation $u'=-u$; $X_\alpha(-u)$ hat die Nullstellen mit $X_{n-\alpha}(u)$ gemeinsam, und der Quotient beider Functionen ist sogar constant, nämlich gleich $(-1)^n$.

Wir stellen die Resultate, wie sie aus den berechneten Formeln fast unmittelbar entspringen, tabellarisch zusammen und numerieren die mitzuteilenden Gleichungen besonders, um sie weiterhin leicht citieren zu können:

$$\text{(I)}\qquad X_{\alpha+n}(u)=X_\alpha(u),$$

$$\text{(II)}\qquad X_\alpha(-u)=(-1)^n X_{n-\alpha}(u),$$

$$\text{(III)}\qquad X_\alpha\left(u+\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$$
$$=(-1)^{n(\lambda+\mu)}e^{\frac{\mu\pi i}{n}(\lambda-2\alpha)}e^{(\lambda\eta_1+\mu\eta_2)\left(u+\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{2n}\right)}X_{\alpha-\lambda}(u),$$

$$\text{(IV)}\qquad X_\alpha(u)=(-1)^{n\alpha}e^{\alpha\eta_1\left(u-\frac{\alpha\omega_1}{2n}\right)}X_0\left(u-\frac{\alpha\omega_1}{n}\right).$$

Die erste dieser Formeln entspringt aus dem Vergleich von (3) und (12), wenn wir einerseits $m_1=-1$, $m_2=0$ und andrerseits $\lambda=-n$ setzen. Die dritte Formel ist das Resultat der Combination von (13) und (12), und endlich folgt die letzte aus (12), wenn wir dort erstlich $\alpha=0$, sodann aber $\lambda=-\alpha$ schreiben.

Die *Collineationsgruppe G_{2n^2} der Normalcurve C_n in sich* lässt sich daraufhin aus den folgenden drei Operationen erzeugen:

$$(14)\qquad \varkappa_1\cdot X_\alpha'=X_{n-\alpha},\quad \varkappa_2\cdot X_\alpha'=X_{\alpha+1},\quad \varkappa_3\cdot X_\alpha'=e^{\frac{2i\pi\alpha}{n}}X_\alpha.$$

Hierbei sind die $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ drei Proportionalitätsfactoren, und die unteren Indices der X dürfen zufolge (I) beliebig modulo n reduciert werden.

Jetzt gelingt auch leicht nachträglich der Beweis, dass die n Grössen $X_\alpha(u)$ unmöglich unabhängig von u einer linearen Identität:

$$(15)\qquad c_0X_0(u)+c_1X_1(u)+\cdots+c_{n-1}X_{n-1}(u)=0$$

mit nicht durchgehends verschwindenden Coefficienten c genügen können.

Bestände nämlich eine Identität (15), so würde dieselbe auch richtig bleiben, wenn wir auf die X irgend eine der Operationen (14) ausüben. Man wende nun $(n-\lambda)$ Male die zweite Substitution (14) an,

wo λ irgend eine ganze Zahl aus dem Intervall $1, 2, \ldots, n$ ist, und erhält:

$$(16)\qquad c_\lambda X_0 + c_{\lambda+1} X_1 + c_{\lambda+2} X_2 + \cdots = 0.$$

Übt man auf diese Gleichung nach einander $(n-1)$ Male die dritte Operation (14) aus und addiert alle $(n-1)$ entspringenden Gleichungen zu (16) hinzu, so kommt offenbar die Identität $n c_\lambda X_0(u) = 0$, was $c_\lambda = 0$ erfordert. In (15) sind also notwendig alle Coefficienten mit Null identisch.

§ 8. Reihenentwicklungen für die Functionen $X_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2)$ bei beliebigem n.

Zur Vorbereitung für später anzustellende Rechnungen schliessen wir an die Formel (9) des vorigen Paragraphen analytische Darstellungen der Functionen $X_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2)$ in Gestalt von Potenzreihen und führen zu dem Ende in der soeben citierten Formel zunächst die Functionen ϑ ein. Indem wir die ungeraden n von den geraden sondern und mit den ersteren beginnen, schreiben wir uns die erste Formel (4) in I p. 161 für die transformierten Perioden $\omega_1, \frac{\omega_2}{n}$ auf:

$$(1)\qquad \sigma\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right) = \frac{e^{\frac{n\eta_2}{2\omega_2}\cdot u^2}}{\sqrt{\frac{\omega_2}{2n\pi}}\sqrt[8]{\overline{\Delta}}}\cdot \vartheta_1\left(\frac{nu\pi}{\omega_2}, r^n\right),$$

wobei wir die weiterhin noch oft vorkommende Bezeichnung $\overline{\Delta}$ durch

$$(2)\qquad \overline{\Delta}(\omega_1, \omega_2) = \Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right)$$

erklären. Bei der Bedeutung von G_1 kommt jetzt erstlich für X_0:

$$(3)\qquad X_0(u \mid \omega_1, \omega_2) = \varkappa \cdot \frac{e^{\frac{n\eta_2}{2\omega_2}u^2}}{\sqrt{\frac{\omega_2}{2n\pi}}\sqrt[8]{\overline{\Delta}}}\cdot \vartheta_1\left(\frac{nu\pi}{\omega_2}, r^n\right).$$

Die Formel (IV) führt von hier aus zu einer entsprechenden Darstellung der übrigen X_α, wobei wir auch die Bezeichnung z von I p. 156 wieder aufnehmen:

$$(4)\qquad X_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2) = (-1)^\alpha \varkappa \cdot \frac{e^{\frac{n\eta_2}{2\omega_2}\cdot u^2}}{\sqrt{\frac{\omega_2}{2n\pi}}\sqrt[8]{\overline{\Delta}}}\cdot z^{-\alpha} r^{\frac{\alpha^2}{2n}} \cdot \vartheta_1\left(\frac{nu - \alpha\omega_1}{\omega_2}\cdot\pi, r^n\right).$$

Die in I p. 160 für die ϑ_1-Function gegebene Reihenentwicklung schreibt sich unter Gebrauch der Bezeichnungen z und r in

$$(5)\qquad \vartheta_1\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, r\right) = \frac{1}{i}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m r^{\frac{(2m+1)^2}{8}} g^{\frac{2m+1}{2}}$$

um. Setzen wir diese Entwicklung in (4) ein, so kommt nach kurzer Zwischenrechnung als *Reihendarstellung der* $X_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2)$ *im Falle eines* ***ungeraden*** n:

$$(6)\qquad X_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2) = \frac{(-1)^\alpha \varkappa}{i}\cdot\frac{e^{\frac{n\eta_2}{2\omega_2}u^2}}{\sqrt{\frac{\omega_2}{2n\pi}}\sqrt[8]{\Delta}}\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m r^{\frac{((2m+1)n-2\alpha)^2}{8n}} g^{\frac{(2m+1)n-2\alpha}{2}}.$$

Für die geraden n knüpfen wir in entsprechender Weise an die vierte unter den Formeln (4) I p. 161, welche für die transformierten Perioden die Gestalt annimmt:

$$(7)\qquad \sigma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right) = e^{\frac{5i\pi}{4}}\cdot\frac{e^{\frac{n\eta_2 u^2}{2\omega_2}}}{\sqrt{\frac{\omega_2}{2n\pi}}\sqrt[8]{\Delta}}\cdot\vartheta_3\left(\frac{nu\pi}{\omega_2}, r^n\right).$$

Für X_0 kommt nun einfach:

$$(8)\qquad X_0(u \mid \omega_1, \omega_2) = \varkappa\cdot\frac{e^{\frac{n\eta_2}{2\omega_2}u^2}}{\sqrt{\frac{\omega_2}{2n\pi}}\sqrt[8]{\Delta}}\cdot\vartheta_3\left(\frac{nu\pi}{\omega_2}, r^n\right),$$

und von da aus vermöge (IV) allgemein:

$$(9)\qquad X_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2) = \varkappa\cdot\frac{e^{\frac{n\eta_2}{2\omega_2}u^2}}{\sqrt{\frac{\omega_2}{2n\pi}}\sqrt[8]{\Delta}}\cdot g^{-\alpha} r^{\frac{\alpha^2}{2n}}\cdot\vartheta_3\left(\frac{nu-\alpha\omega_1}{\omega_2}\cdot\pi, r^n\right).$$

Benutzt man endlich für ϑ_3 die Reihenentwicklung:

$$(10)\qquad \vartheta_3\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, r\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r^{\frac{m^2}{2}} g^m,$$

so entspringen für die X_α *im Falle eines* ***geraden*** n *die Darstellungen:*

$$(11)\qquad X_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2) = \varkappa\cdot\frac{e^{\frac{n\eta_2}{2\omega_2}u^2}}{\sqrt{\frac{\omega_2}{2n\pi}}\sqrt[8]{\Delta}}\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty} r^{\frac{(mn-\alpha)^2}{2n}} g^{mn-\alpha}.$$

Man wird hier zugleich den Grund bemerkt haben, warum in Formel

(11) des vorigen Paragraphen rechter Hand der Factor $e^{-\frac{5i\pi}{2}}$ aufgenommen wurde*).

Auch Potenzentwicklungen nach u werden wir für die X_α mehrfach zu gebrauchen haben. Wir schreiben dieselben allgemein in der folgenden, weiterhin immer wieder zu benutzenden Gestalt:

$$(12) \qquad X_\alpha(u) = z_\alpha + y_\alpha \cdot u + x_\alpha \frac{u^2}{2} + w_\alpha \frac{u^3}{6} + v_\alpha \frac{u^4}{24} + \cdots$$

und haben in den hier auftretenden Coefficienten z_α, y_α etc. Functionen der Perioden allein, deren nähere Untersuchung eine unserer Hauptaufgaben sein wird. Einige Bemerkungen über dieselben entspringen aus der Formel (II) § 7, nach welcher $X_\alpha(-u)$ mit $(-1)^n X_{n-\alpha}(u)$ identisch ist. In der That folgen für *ungerade* n die Identitäten:

$$(13) \qquad z_{n-\alpha} = -z_\alpha, \quad y_{n-\alpha} = y_\alpha, \quad x_{n-\alpha} = -x_\alpha, \quad w_{n-\alpha} = w_\alpha \quad \text{etc.}$$

und also insbesondere:

$$(14) \qquad z_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad v_0 = 0 \quad \text{etc.},$$

wogegen wir für *gerade* n die folgenden Identitäten gewinnen:

$$(15) \qquad z_{n-\alpha} = z_\alpha, \quad y_{n-\alpha} = -y_\alpha, \quad x_{n-\alpha} = x_\alpha \quad \text{etc.},$$

sowie daraus im speciellen

$$(16) \qquad y_0 = 0, \quad y_{\frac{n}{2}} = 0, \quad w_0 = 0, \quad w_{\frac{n}{2}} = 0 \quad \text{etc.},$$

Gleichungen, auf die wir noch häufig zurückkommen werden.

§ 9. Aufstellung der $\frac{n(n-3)}{2}$ linear-unabhängigen, zwischen den allgemeinen X_α bestehenden quadratischen Relationen.

Bereits in § 2 des gegenwärtigen Kapitels (p. 245) haben wir von $\frac{n(n-3)}{2}$ linear-unabhängigen Flächen zweiten Grades im Raume R_{n-1} gehandelt, welche ausreichend waren, die Normalcurve n^{ter} Ordnung C_n rein darzustellen. Unter Zugrundelegung des singulären Coordinatensystems der X_α können wir leicht die Gleichungen dieser Flächen angeben, indem wir an die wohlbekannte σ-Relation:

---

*) Hätten wir übrigens an Stelle des bei geraden n wirklich zur Verwendung gebrachten σ-Productes (1) p. 257 eines der beiden p. 260 erwähnten Producte gebraucht, so wäre hier an Stelle der Function ϑ_3 entweder ϑ_0 oder ϑ_2 aufgetreten.

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad & \sigma(u_1+u_2)\,\sigma(u_1-u_2)\,\sigma(u_3+u_4)\,\sigma(u_3-u_4)\\
&+\sigma(u_1+u_3)\,\sigma(u_1-u_3)\,\sigma(u_4+u_2)\,\sigma(u_4-u_2)\\
&+\sigma(u_1+u_4)\,\sigma(u_1-u_4)\,\sigma(u_2+u_3)\,\sigma(u_2-u_3)=0
\end{aligned}
$$

anknüpfen*).

Man denke sich diese Formel (1) für die transformierten Perioden ω_1, $\frac{\omega_2}{n}$ gebildet und setze für die Argumente u_i die nachfolgenden speciellen Werte ein:

$$
(2)\qquad u_i=\frac{u}{2}-\frac{\alpha_i\omega_1}{n}-\varepsilon\left(\frac{\omega_1}{2}+\frac{\omega_2}{2n}\right),
$$

ε in der Bedeutung des vorletzten Paragraphen (cf. Formel (2) daselbst) gebraucht. Durch Zusatz gewisser Exponentialfactoren führe man demnächst an Stelle der einfachen σ-Functionen die $\sigma_{\lambda,\mu}$ bez. die X_α ein; und es trifft sich, dass die drei Glieder der Relation (1) gerade übereinstimmend den nämlichen Zusatzfactor erfordern. Indem wir übrigens von der abkürzenden Schreibweise:

$$
(3)\qquad \sigma_{\lambda,\mu}\left(\omega_1,\frac{\omega_2}{n}\right)=\bar{\sigma}_{\lambda,\mu}(\omega_1,\omega_2)=\bar{\sigma}_{\lambda,\mu}
$$

Gebrauch machen, entspringt durch die gekennzeichnete Umformung aus (1) die gewünschte Relation zwischen den X_α in der allgemeinen Gestalt:

$$
\begin{aligned}
(4)\quad & X_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_3+\alpha_4}\cdot\bar{\sigma}_{\frac{\alpha_2-\alpha_1}{n},0}\,\bar{\sigma}_{\frac{\alpha_4-\alpha_3}{n},0}+X_{\alpha_1+\alpha_3}X_{\alpha_4+\alpha_2}\cdot\bar{\sigma}_{\frac{\alpha_3-\alpha_1}{n},0}\,\bar{\sigma}_{\frac{\alpha_2-\alpha_4}{n},0}\\
&+X_{\alpha_1+\alpha_4}X_{\alpha_2+\alpha_3}\cdot\bar{\sigma}_{\frac{\alpha_4-\alpha_1}{n},0}\,\bar{\sigma}_{\frac{\alpha_3-\alpha_2}{n},0}=0.
\end{aligned}
$$

Falls n eine ungerade Zahl ist, wird $\bar{\sigma}_{\frac{\alpha}{n},0}$ mit $(-1)^\alpha X_\alpha(0)$ d. i. im Sinne von (12) § 8 mit $(-1)^\alpha z_\alpha$ proportional; hier können wir also (4) noch in die Gestalt umschreiben:

$$
\begin{aligned}
(5)\quad & X_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_3+\alpha_4}\cdot z_{\alpha_2-\alpha_1}z_{\alpha_4-\alpha_3}+X_{\alpha_1+\alpha_3}X_{\alpha_4+\alpha_2}\cdot z_{\alpha_3-\alpha_1}z_{\alpha_2-\alpha_4}\\
&+X_{\alpha_1+\alpha_4}X_{\alpha_2+\alpha_3}\cdot z_{\alpha_4-\alpha_1}z_{\alpha_3-\alpha_2}=0.
\end{aligned}
$$

Dies sind nun die quadratischen Relationen zwischen den X_α, soweit sie sich unmittelbar aus (1) *ergeben.*

Wir haben nun zu untersuchen, wie viele linear-unabhängige Relationen in der allgemeinen Gestalt (4) enthalten sind. Die Summe $s=\alpha+\beta$ der in (4) enthaltenen quadratischen Verbindungen $X_\alpha X_\beta$ ist für alle drei Glieder der in Rede stehenden Gleichung die nämliche.

---

*) Man sehe Schwarz, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen* (Artikel 38) sowie Weierstrass in den Berliner Berichten von 1882.

In der That werden ja auch infolge der dritten Operation (14) p. 264 in der einzelnen quadratischen Relation immer nur Glieder mit gleichem s enthalten sein, wie auch auf der anderen Seite eine einzelne unserer Relationen als lineare Combination jedenfalls nur solcher Relationen darstellbar ist, die alle das nämliche s wie jene haben. Die quadratischen Verbindungen der X von gegebenem s sind nun

$$X_0 X_s, \quad X_1 X_{s-1}, \ldots, \quad X_i X_{s-i}, \ldots,$$

und deren Anzahl ist, sofern wir n vorerst als eine *ungerade* Zahl annehmen, offenbar $\frac{n+1}{2}$. Da lassen sich vermöge (4) durch die beiden ersten Verbindungen alle $\frac{n-3}{2}$ übrigen in der Gestalt:

$$(6) \qquad X_i X_{s-i} = a_i X_0 X_s + b_i X_1 X_{s-1}$$

darstellen; in der That wähle man zu diesem Zwecke die α_i den Congruenzen:

$$(7) \quad 2\alpha_1 \equiv 1 + i - s, \; \alpha_2 \equiv -\alpha_1, \; \alpha_3 \equiv -\alpha_1 + 1, \; \alpha_4 \equiv -\alpha_1 + i, \; (\text{mod.}\, n)$$

gemäss. Für stehendes s erhalten wir solcherweise $\frac{n-3}{2}$ offenbar linear-unabhängige Relationen, und also den verschiedenen Werten s entsprechend deren im ganzen $\frac{n(n-3)}{2}$.

Bei *geradem* n haben wir zu unterscheiden, ob s ungerade oder gerade ist. Im ersteren Falle haben wir die $\frac{n}{2}$ verschiedenen Verbindungen $X_0 X_s$, $X_2 X_{s-2}$, ..., $X_{n-2} X_{s-n+2}$; und wir drücken auf Grund von (4) und (7) in $X_0 X_s$, $X_{s-1} X_1$ die übrigen $\frac{n-4}{2}$ Verbindungen in der Gestalt (6) aus, was den $\frac{n}{2}$ Werten s entsprechend $\frac{n(n-4)}{4}$ linear-unabhängige Relationen giebt. Bei geradem s wenden wir für die ungeraden i die bisherige Wahl (7) wieder an; für die geraden Werte von i aber setzen wir:

$$(8) \quad 2\alpha_1 \equiv 2 + i - s, \; \alpha_2 \equiv -\alpha_1, \; \alpha_3 \equiv -\alpha_1 + 2, \; \alpha_4 \equiv -\alpha_1 + i, \; (\text{mod.}\, n),$$

und lassen an Stelle von (6) Relationen der Gestalt:

$$(9) \qquad X_i X_{s-i} = c_i X_0 X_s + d_i X_2 X_{s-2}$$

aus (4) entspringen. Da man aber für die geraden s leicht je $\frac{n+2}{2}$ verschiedene quadratische Verbindungen $X_i X_{s-i}$ abzählt, so haben wir für $n \equiv s \equiv 0$ (mod. 2) insgesamt $\frac{n(n-2)}{4}$ linear-unabhängige quadra-

tische Relationen in (4) nachgewiesen; deren Gesamtzahl für gerades n ist also:

$$\frac{n(n-4)}{4}+\frac{n(n-2)}{4}=\frac{n(n-3)}{2}.$$

Wir haben somit als Resultat unserer letzten Überlegungen: *Das volle System der quadratischen Relationen zwischen den X_α ist durch die unterschiedenen Formeln* (4) *bez.* (5) *gegeben**).

§ 10. Deutung von Problemen aus der Teilungs- und Transformationstheorie vermittelst der Normalcurven.

Im Voraufgehenden sind die Grundlagen der Theorie der elliptischen Normalcurven insoweit entwickelt, als wir dieselben weiterhin für die Zwecke der Modulfunctionen brauchen werden. Ehe wir indessen diese letzteren Zwecke weiter verfolgen, verweilen wir noch einen Augenblick bei einigen Problemen der Teilungs- und Transformationstheorie, welche mit Hülfe der elliptischen Normalcurven C_n eine zwanglose geometrische Interpretation finden. Man könnte überhaupt den Versuch machen, auf Grundlage der Normalcurve n^{ter} Ordnung eine planmässige Darstellung der Theorie der doppeltperiodischen Functionen zu entwerfen**), wo wir dann freilich nur erst in den niedersten Fällen n das Material in etwas ausgedehnterer Weise explicite durchgebildet finden würden***). Inzwischen ziehen wir die Grenze für unsere Betrachtung sehr viel enger, indem wir nur die Bedeutung der oben besprochenen beiden Arten der Coordinatensysteme der C_n für

*) Für $n=5$ sind die quadratischen Relationen des Textes von Hrn. Bianchi in der mehrfach genannten Arbeit (Math. Ann. Bd. 17) auf directerem analytisch-geometrischen Wege abgeleitet. Eben diese Relationen für $n=5$ sind übrigens auch von Halphen behandelt worden; man sehe dessen Abhandlung „*Sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables*", in der überhaupt die X_α für ungerade n auftreten (Bd. 18 p. 289 der „*Mémoires présentés à l'Académie des Sciences de Paris*", 1883).

**) Man vgl. namentlich die Tendenz des schon mehrfach genannten Aufsatzes von Klein, *Über unendlich viele Normalformen des elliptischen Integrals erster Stufe*, Berichte der Münchener Akad. vom Juli 1880, abgedr. Annalen Bd. 17.

***) Für $n=3$ entsprechen der im Texte ausgesprochenen Idee ganz besonders die Entwicklungen von Hrn. Pick, *Zur Theorie der elliptischen Functionen*, Math. Ann. Bd. 28 (1886). Es werden dort die elliptischen Functionen als *Covarianten zweier Punkte der Normal-C_3* betrachtet und speciell für $\wp(u)$, $\wp'(u)$ dementsprechende Darstellungen explicite angegeben. Hieran reihen sich Untersuchungen für $n=4$, die Halphen im zweiten Bande seines oft genannten Werkes, sowie Hr. Pick in den Wiener Berichten von 1888 gegeben haben. Vgl. übrigens das Citat in I p. 2.

gewisse Fragen der Teilungs- und Transformationstheorie aufweisen wollen.

Vor allen Dingen steht das *kanonische* Coordinatensystem der C_n in engster Beziehung zur *Teilung n^{ter} Ordnung erster Stufe*, wie wir sie im Kap. 1 des vorigen Abschnitts fassten. Wir werden dabei angeleitet, nicht nur $\wp(u)$ und $\wp'(u)$, sondern simultan immer gleich alle $(n-1)$ Grössen $\wp(u), \wp'(u), \wp''(u), \ldots$, die wir zu Coordinaten der C_n setzten, der Teilung n^{ter} Ordnung zu unterwerfen; es hat dieser Umstand seine wichtigen, sogleich noch hervortretenden Folgen. Handelt es sich jetzt um das *allgemeine* Teilungsproblem, so sind bei demselben die Coordinaten irgend eines Curvenpunktes mit dem transcendenten Argumente u gegeben, und wir haben die Aufgabe, *von hier aus die Coordinaten der n^2 Curvenpunkte mit den Argumenten*

$$(1) \qquad u' = \frac{u}{n} + \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}$$

zu berechnen. Hier ist denn die gleichzeitige Betrachtung aller $(n-1)$ Grössen $\wp(u), \wp'(u), \wp''(u), \ldots$, besonders vorteilhaft; es entspringen nämlich die n^2 Punkte (1) aus einem unter ihnen durch die in der Collineationsgruppe G_{2n^3} enthaltene Untergruppe G_{n^2}. Dementsprechend können wir alle n^2 Lösungssysteme des allgemeinen Teilungsproblems in einem unter ihnen *linear* darstellen, wobei freilich neben g_2 und g_3 auch noch die speciellen Teilwerte $\wp_{\lambda,\mu}$, $\wp'_{\lambda,\mu}$ adjungiert zu denken sind. Zu diesen letzteren und damit zum *speciellen Teilungsproblem n^{ter} Ordnung* gelangen wir durch die Substitution $u=0$; dieses Problem kleidet sich jetzt sofort in die Aufgabe, *die Coordinaten der n^2 singulären Punkte im kanonischen System anzugeben.* Die specielle Dreiteilung kommt also auf die Bestimmung der 9 Wendepunkte der in kanonischer Gestalt gegebenen C_3 hinaus*), die specielle Vierteilung aber auf die Bestimmung der 16 Wendeberührungspunkte der entsprechend gegebenen Raumcurve vierter Ordnung vom Geschlechte 1.

Eine ähnliche Analogie besteht weiter zwischen dem *Transformationsproblem n^{ter} Ordnung* und der Aufsuchung der *singulären* Coordinatensysteme der C_n. Es zeigte sich oben, dass es insgesamt vier unterschiedene Wendedreiecke der C_3 giebt; dieselben fanden wir in § 5 den vier gleichberechtigten Congruenzgruppen Γ_4 der dritten Stufe in dem damals erörterten Sinne eindeutig zugeordnet. Aus den Formeln

*) Wenn die C_3 nicht in kanonischer Form, sondern in ganz beliebiger Gestalt gegeben wird, so entspricht die Aufsuchung der Wendepunkte dem allgemeinen Teilungsprobleme, vgl. Clebsch-Lindemann, *Vorles. über Geometrie* I, 5. Abteilung.

des nächsten Kapitels folgt aber ganz allgemein, *dass das singuläre Coordinatenpolyeder der C_n, wie wir dasselbe fixierten, eines ist unter $\psi(n)$ gleichberechtigten, welche dann wieder den $\psi(n)$ Gruppen $\Gamma_{\psi(n)}$ der n^{ten} Stufe zugeordnet sind.* Das sind nun gerade die Untergruppen, welche der Transformation n^{ter} Ordnung zu Grunde liegen; und also werden wir sagen können: *Der Übergang vom kanonischen Coordinatensystem (d. i. dem System erster Stufe) zu einem einzelnen singulären Polyeder liefert ein Bild für die Auffindung einer einzelnen Wurzel einer Transformationsgleichung.* Bei diesem Satze wird das Polyeder als Ganzes gedacht; spalten wir dasselbe in seine einzelnen Ebenen, *so entspricht dem*, behaupten wir, *eine vollständige Auflösung der Transformationsgleichung.* Es beruht dies auf dem Umstande, den wir bald kennen lernen werden, dass sich die verschiedenen gleichberechtigten Systeme der X_α, die es bei der Normalcurve giebt, aus einem derselben *linear mit numerischen Coefficienten* berechnen lassen. Von der anderen Seite gesehen liegt in diesen linearen Formeln ein neuer Ansatz zur Behandlung des Transformationsproblems selbst, und es verlohnte sich wohl um so mehr, demselben gelegentlich nachzugehen, als dabei eine Reihe auf das Transformationsproblem bezüglicher Entwicklungen Jacobi's, die sonst isoliert zu stehen scheinen, in ein allgemeines Beziehungssystem eingeordnet werden. Wir kommen hierauf im nächsten Kapitel gelegentlich zurück.

Zweites Kapitel.

Die Grössen X_α betrachtet als Functionen der Perioden ω_1, ω_2.

Unserem eigentlichen Zwecke, nämlich Beiträge zur Theorie der Congruenzmoduln zu gewinnen, soll jetzt dadurch explicite Rechnung getragen werden, dass wir die im vorigen Kapitel eingeführten Grössen in ihrer Abhängigkeit von den Argumenten ω_1, ω_2 in Betracht ziehen. Dabei erledigen sich diejenigen Functionen ohne weiteres, welche beim Aufbau des *kanonischen* Coordinatensystems für die Normalcurve C_n Verwendung fanden; sie bleiben als Grössen der ersten Stufe bei der Ausübung irgend welcher Modulsubstitutionen direct unverändert. Ganz anders verhalten sich die Grössen X_α, auf welche wir das singuläre Coordinatensystem gründeten; bei $n=3$ führten dieselben unmittelbar zur dritten Stufe hin, und wir werden ganz allgemein für beliebiges n zu analogen Resultaten gelangen, wie wir schon im vorigen Kapitel gelegentlich andeuteten. Hierbei ist es vor allem erforderlich, den in den bisherigen Definitionsformeln der X_α noch unbestimmt gelassenen Factor $\varkappa$ endgültig zu fixieren; und indem wir dies am Beginn des gegenwärtigen Kapitels erstlich für ungerade n und sodann für gerade in eigenartiger Weise leisten, erzielen wir dadurch für die späterhin festzustellende Wirkung der Modulsubstitution T auf die X_α besonders einfache Resultate.

Die Mehrzahl der anzustellenden Betrachtungen hat für die Theorie der elliptischen Normalcurven ihren geometrischen Sinn. Schon bei $n=3$ fanden wir, dass die Ausübung gewisser Modulsubstitutionen den Übergang von einem ersten singulären Coordinatensystem zu den übrigen, mit jenem gleichberechtigten bedeutete. Man wird bei beliebigen n analoge Verhältnisse antreffen; aber während dieselben für $n=3$ von der rein geometrischen Seite her direct übersehbar waren, werden wir auf eine ähnliche Deductionsweise bei allgemeinem n wegen der Vielseitigkeit der uns entgegentretenden geometrischen Verhältnisse von vornherein verzichten müssen. Es schien dieserhalb rätlich,

von einer Einführung der vorzunehmenden Untersuchungen unter einem der Theorie der elliptischen Normalcurven entlehnten geometrischen Bilde ganz abzusehen (vgl. indes weiter unten § 9).

§ 1. Endgültige Auswahl und Darstellungen für den Zusatzfactor $\varkappa$ der $X_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2)$ im Falle eines ungeraden n.

In § 7 des vorigen Kapitels waren die X_α der einzelnen Ordnung n erst bis auf einen gemeinsamen von u unabhängigen Factor $\varkappa$ bestimmt, den wir nunmehr im Falle eines *ungeraden* n als Function der Perioden in der folgenden Weise festlegen wollen*):

$$(1)\qquad \varkappa = \sqrt[8]{\frac{\overline{\Delta}}{\Delta^n}} = \sqrt[8]{\frac{\overline{\Delta}}{\Delta}} \cdot (\sqrt[4]{\Delta})^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Auf Grund bezüglicher früherer Sätze erkennt man vermöge der zweiten Gestalt des $\varkappa$ in dieser Grösse eine eindeutige Modulform; ihre Dimension ist $\frac{3}{2}(n-1)$, und sie wird zufolge der in (2) p. 265 angegebenen Bedeutung von $\overline{\Delta}$ der n^{ten} Stufe entweder absolut oder adjungiert zugehören.

Um über den letzteren Punkt sogleich näher zu entscheiden, wollen wir jene Formelsysteme verallgemeinern, welche uns oben (p. 68) den Zusammenhang der Grösse (1) mit den Teilwerten der $\wp'$- und der σ-Function im Falle einer Primzahlstufe angaben. An Stelle der damaligen functionentheoretischen Schlussweise ist es zweckmässig hier eine analytische Ableitung treten zu lassen, und wir knüpfen zu diesem Ende etwa an die von (8) p. 28 her bekannte Formel:

$$(2)\qquad \sigma_{0,\mu} = -\frac{\omega_2}{\pi}\sin\frac{\mu\pi}{n}\cdot\prod_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1-r^m\varepsilon^{\mu}}{1-r^m}\right)\cdot\left(\frac{1-r^m\varepsilon^{-\mu}}{1-r^m}\right).$$

Wir betonen dabei ausdrücklich, dass der Teilungsgrad für die in diesem und den beiden folgenden Paragraphen eintretenden Teilwerte die beliebige ungerade Zahl n sein soll, und brauchen im übrigen ε bis auf weiteres in der Bedeutung der n^{ten} Einheitswurzel:

$$(3)\qquad \varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}},$$

da in der That die im vorigen Kapitel unter (2) p. 261 erklärte Bezeichnung ε weiterhin nicht mehr zur Verwendung kommt. Man bilde jetzt die Formel (2) für die Zahlwerte $\mu = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$ und multipli-

*) Cf. Klein, „Normalcurven" p. 34 u. f.

ciere die $\frac{n-1}{2}$ Gleichungen mit einander. Dabei fassen sich die rechts auftretenden Factoren in leicht ersichtlicher Weise zusammen, und man gewinnt die Gleichung:

$$(4) \qquad c\prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}}\sigma_{0,\mu} = \frac{\sqrt{\frac{2n\pi}{\omega_2}}\, r^{\frac{n}{24}} \prod_{m=1}^{\infty}(1-r^{mn})}{\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}}\right)^n \left(r^{\frac{1}{24}}\prod_{m=1}^{\infty}(1-r^m)\right)^n}.$$

Was hier auf der rechten Seite steht, ist zufolge I p. 154 (1) nichts anderes als die eindeutige Modulform:

$$\sqrt[24]{\frac{\Delta}{\Delta^n}} = \sqrt[24]{\frac{\Delta}{\Delta}}\cdot(\sqrt[12]{\Delta})^{-\frac{n-1}{2}},$$

und also kommt (unter c in (4) und (5) eine numerische Constante verstanden) die Identität:

$$(5) \qquad c\prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}}\sigma_{0,\mu} = \sqrt[24]{\frac{\Delta}{\Delta^n}}.$$

Die hier rechts auftretende Modulform soll nunmehr dadurch eindeutig fixiert werden, dass wir für dieselbe bei $\omega = i\infty$ den Näherungswert $\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\sqrt{n}$ mit positiv gerechneter Wurzel $\sqrt{n}$ vorschreiben, worauf man die numerische Constante ersichtlich aus der Gleichung

$$c\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}\cdot\prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{\mu\pi}{n} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}$$

bestimmen wird. Das Quadrat des links auftretenden Productes hat, wie man leicht aus der zu n gehörenden Kreisteilungsgleichung abliest, den Wert $n:2^{n-1}$; dieses Product selbst wird also, insofern es nur aus positiven Gliedern besteht, den Wert $\sqrt{n}:2^{\frac{n-1}{2}}$ haben. Solcherweise ergiebt sich als *Beziehung der σ-Teilwerte zu der dritten Wurzel aus der in* (1) *gegebenen Modulform:*

$$(6) \qquad \sqrt[24]{\frac{\Delta}{\Delta^n}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}}\sigma_{0,\mu}.\text{*)}$$

*) Diese Formel findet sich zuerst bei Kiepert, *Zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen,* Crelle's Journal Bd. 87 p. 199 u. f. (1879).

Andererseits haben wir wichtige Beziehungen der Grösse (1) zu den Teilwerten von $\wp(u)$ und $\wp'(u)$, welche wir aber nicht direct, sondern von Formel (6) aus ableiten wollen. Zu dem Ende gehen wir auf die beiden folgenden Formeln zurück:

$$(7) \qquad \wp(u) - \wp(v) = -\frac{\sigma(u-v)\cdot\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)\cdot\sigma^2(v)}, \quad \wp'(u) = -\frac{\sigma(2u)}{\sigma^4(u)};$$

die erste unter ihnen wurde schon in I p. 158 (4) namhaft gemacht; zur Verification der zweiten bemerke man, dass der rechts stehende Quotient doppelt-periodisch ist, im Periodenparallelogramm die richtigen Null- und Unstetigkeitspunkte, sowie bei $u = 0$ das richtige Anfangsglied der Potenzentwicklung nach u aufweist. Indem man für u bez. v gewisse n^{te} Teile der Periode ω_2 einsetzt und hernach Zähler und Nenner der einzelnen entspringenden Formel mit einem geeigneten gemeinsamen Exponentialfactor versieht, erhält man die Darstellungen:

$$(8) \qquad \wp_{0,2\mu} - \wp_{0,\mu} = -\frac{\sigma_{0,3\mu}}{\sigma_{0,\mu}\,\sigma_{0,2\mu}^2}, \quad \wp'_{0,\mu} = -\frac{\sigma_{0,2\mu}}{\sigma_{0,\mu}^4}.$$

Man bilde die zweite dieser beiden Gleichungen für $\mu = 1, 2, \cdots, \frac{n-1}{2}$ und multipliciere alle entspringenden Formeln mit einander. Dabei kommt man infolge des als ungerade vorausgesetzten n im Zähler bis auf einen numerischen Factor wieder auf das in (6) rechter Hand geschriebene Product zurück. Den numerischen Factor aber bestimmen wir etwa durch Näherungsrechnung bei $\omega = i\infty$ (cf. die Formel (4) p. 13) oder auch unter Benutzung von $\sigma_{0,n-\mu} = \sigma_{0,\mu}$ und finden solchergestalt die Resultate:

$$(9) \qquad \prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \wp'_{0,\mu} = \frac{1}{\prod\limits_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{0,\mu}^3}, \quad \sqrt[8]{\frac{\Delta}{\Delta^n}} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\prod\limits_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \wp'_{0,\mu}}.$$

Will man mit der ersten Formel (8) ähnlich verfahren, so muss man doch bemerken, dass das im Zähler der rechten Seite auftretende Product nur dann auf das Product (6) zurückkommt, *wenn n relativ prim gegen 3 ist.* Indem wir für den Augenblick an dieser Voraussetzung festhalten, reihen wir den Formeln (9) nach kurzer Zwischenrechnung noch die folgenden an:

$$(10) \qquad \prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} (\wp_{0,2\mu} - \wp_{0,\mu}) = \frac{1}{\prod\limits_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{0,\mu}^2}, \quad \sqrt[12]{\frac{\Delta}{\Delta^n}} = \frac{1}{\prod\limits_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} (\wp_{0,2\mu} - \wp_{0,\mu})}.$$

Als besonders wichtiges Ergebnis, mit dem zugleich die eingangs aufgeworfene Frage ihre Erledigung findet, ziehen wir aus den gewonnenen Formeln: *Die Modulform* (1) *gehört für alle ungeraden* n *absolut zur* n^{ten} *Stufe; ein Gleiches gilt auch noch von der dritten Wurzel aus derselben, sobald die ungerade Zahl* n *prim gegen* 3 *ist.* Dass dieser letztere Zusatz auch notwendig ist, beweist man durch Anwendung der Formel (4) p. 25 auf die rechte Seite der Gleichung (6).

§ 2. Darstellungen der normierten $X_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2)$ und Bestimmung ihrer Stufe im Falle eines ungeraden n.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen über den Zusatzfactor $\varkappa$, durch welchen wir die X_α endgültig normieren wollen, schreiben wir uns nunmehr aus (9) und (11) p. 263 für unsere ungeraden n die fertige Gestalt der X_α ab. Wir finden:

$$(1) \qquad X_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2) = (-1)^\alpha \sqrt[8]{\frac{\Delta}{\Delta^n}} \cdot e^{-G_1 u^2} \cdot \sigma_{\frac{\alpha}{n}, 0}\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right).$$

Daran reiht sich als Darstellung durch die Function ϑ_1:

$$(2) \qquad X_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2) = (-1)^\alpha \cdot \frac{e^{\frac{n \eta_2 u^2}{2\omega_2}}}{\sqrt{\frac{\omega_2}{2n\pi}} \sqrt[8]{\Delta^n}} \cdot z^{-\alpha} r^{\frac{\alpha^2}{2n}} \cdot \vartheta_1\left(\frac{nu - \alpha\omega_1}{\omega_2}\pi, r^n\right),$$

sowie endlich die Reihenentwicklung:

$$(3) \quad X_\alpha = \frac{(-1)^\alpha}{i} \cdot \frac{e^{\frac{n\eta_2}{2\omega_2}u^2}}{\sqrt{\frac{\omega_2}{2n\pi}} \sqrt[8]{\Delta^n}} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m r^{\frac{((2m+1)n - 2\alpha)^2}{8n}} z^{\frac{(2m+1)n - 2\alpha}{2}}$$

Die solchergestalt normierten X_α *gehören als homogene Functionen ihrer drei Argumente* u, ω_1, ω_2 *zu der Dimension* $\frac{3n-1}{2}$ *). Um aber die Stufe dieser X_α zu bestimmen, bringen wir noch einige weitere Darstellungen für dieselben durch die Functionen σ, $\wp$, $\wp'$ zur Ableitung, Darstellungen, welche auch für die Entwickungen des folgenden Paragraphen von Bedeutung sind.

---

*) Die Betrachtung der in (2) enthaltenen transformierten ϑ_1-Function ist natürlich keineswegs neu. Dagegen ist wohl die durchgeführte formentheoretische Normierung zuerst von Hrn. Klein gegeben worden; man sehe ausser den „Normalcurven" übrigens auch die Note *„Über gewisse Teilwerte der ϑ_1-Function"* Math. Ann. Bd. 17 (1881). Der wesentliche Vorteil der Normierung kommt erst weiter unten durch das einfache gruppentheoretische Verhalten der X_α zur Evidenz.

Man weiss bereits aus dem vorigen Kapitel, dass der Quotient $X_0(u) : \sigma^n(u)$ eine doppeltperiodische Funtion, und zwar $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, ist. Da sie übrigens eine gerade Function von u ist und nur in den Eckpunkten der Parallelogrammteilung unstetig wird, so wird sie eine ganze Function $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\text{ten}}$ Grades von $\wp(u)$ sein. Wir haben aber direct die Darstellung:

$$(4) \qquad e^{-G_1 u^2} \cdot \frac{\sigma\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right)}{\sigma^n(u \mid \omega_1, \omega_2)} = \prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} (\wp(u) - \wp_{0,\mu}),$$

denn man bemerke, dass auch die Nullpunkte der linken Seite von (4) mit denen der rechten coincidieren, und dass überdies wiederum die Anfangsglieder der beiderseitigen Reihenentwicklungen nach u übereinstimmen. Aus (1) und (4) folgt nun mit Rücksicht auf Formel (9) des vorigen Paragraphen:

$$(5) \qquad X_0(u \mid \omega_1, \omega_2) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sigma^n(u) \cdot \prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\wp(u) - \wp_{0,\mu}}{\wp'_{0,\mu}}\right)^{**}),$$

und also gewinnen wir unter Gebrauch von (IV) p. 264 allgemein:

$$(6) \qquad X_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2) = (-1)^{\alpha + \frac{n-1}{2}} \sigma^n_{\alpha,0}(u) \cdot \prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\wp\left(u - \frac{\alpha\omega_1}{n}\right) - \wp_{0,\mu}}{\wp'_{0,\mu}}\right).$$

Weiter folgt aus (7) p. 276 nach kurzer Rechnung:

$$\wp\left(u - \frac{\alpha\omega_1}{n}\right) - \wp_{0,\mu} = -\frac{\sigma_{\alpha,\mu}(u) \cdot \sigma_{\alpha,-\mu}(u)}{\sigma^2_{\alpha,0}(u) \cdot \sigma^2_{0,\mu}}.$$

Setzt man dies in (6) ein und benutzt zur Entfernung der $\wp'$-Teilwerte die erste Formel (9) des vorigen Paragraphen, so entspringt folgende Darstellung der X_α:

$$(7) \qquad X_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2) = (-1)^\alpha \prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{0,\mu} \prod_{\mu=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{\alpha,\mu}(u),$$

**) Dass sich von hier aus Formeln über die Beziehung des singulären Coordinatensystems der C_n zum kanonischen entwickeln liessen, wird man leicht bemerken; doch würde man dann das letztere Coordinatensystem mit den höheren Potenzen von $\wp(u)$ und nicht mit den höheren Ableitungen dieser Function aufbauen müssen. Auch hätten wir, um diesen Ansatz ohne Mühe zur vollen Durchbildung zu bringen, allgemein auf die erst später festzustellende Wirkung der Modulsubstitutionen auf die X_α Bezug zu nehmen.

welche die erste Formel (1) p. 257 in definitiver Gestalt giebt. Um endlich noch eine letzte geringe Modification mit Formel (6) vorzunehmen, betrachte man vorerst das Product

$$(8) \qquad \prod_{\lambda=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\wp(u) - \wp_{\lambda,0}}{\wp\left(u - \frac{\alpha\omega_1}{n}\right) - \wp_{\lambda,0}} \right),$$

in dem α nicht gerade gleich 0 sein möge. Bei $u = 0$ wird der Zähler desselben $(n-1)$-fach unendlich, einer der Factoren des Nenners aber einfach zu Null, so dass wir dortselbst einen n-fachen Unstetigkeitspunkt des ganzen Productes (8) vorfinden. In gleicher Weise ergiebt sich bei $\frac{\alpha\omega_1}{n}$ ein n-facher Nullpunkt, während sich (8) übrigens allenthalben im Periodenparallelogramm endlich und nicht verschwindend erweist. Dieserhalb ist (8) bis auf einen von u unabhängigen Factor mit der n^{ten} Potenz des Quotienten $\sigma_{\alpha,0}(u) : \sigma(u)$ identisch, welche letztere ja gleichfalls doppeltperiodisch ist (cf. (4) p. 25). In der That kann man denn auch die hier gemeinte Formel leicht direct dadurch herstellen, dass man die in (8) auftretenden $\wp$-Differenzen vermöge (7) p. 276 einzeln durch die σ ausdrückt; man findet so endgültig:

$$(9) \qquad (-1)^\alpha \left(\frac{\sigma_{\alpha,0}(u)}{\sigma(u)}\right)^n = \prod_{\lambda=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\wp(u) - \wp_{\lambda,0}}{\wp\left(u - \frac{\alpha\omega_1}{n}\right) - \wp_{\lambda,0}} \right).$$

Multiplicieren wir diese Formel mit (6), so kommt als letzte Darstellung der X_α die folgende:

$$(10) \qquad \frac{X_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2)}{\sigma^n(u)} =$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\wp\left(u - \frac{\alpha\omega_1}{n}\right) - \wp_{0,\mu}}{\wp'_{0,\mu}} \right) \prod_{\lambda=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\wp(u) - \wp_{\lambda,0}}{\wp\left(u - \frac{\alpha\omega_1}{n}\right) - \wp_{\lambda,0}} \right),$$

an welche sich für den Specialfall $\alpha = 0$ die Formel (5) direct anschliesst. —

Die Frage nach der Stufe der Grössen $X_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2)$ beantwortet sich jetzt mühelos. Da auf der rechten Seite von (10) nur Grössen erster und n^{ter} Stufe stehen, so ergiebt sich, *dass die X_α im Falle eines ungeraden n absolut zur n^{ten} Stufe gehören.* Dieser Satz ist aber nur erst ein vorläufiger und wir werden bestimmen wollen, welches die Congruenzgruppe n^{ter} Stufe derjenigen Substitutionen ist, die zugleich alle n Functionen X_α in sich überführen. Es ist aber das

System der Nullpunkte von X_λ im Periodenparallelogramm gegeben durch

(11) $$\frac{\lambda\omega_1}{n} + \mu\cdot\frac{\omega_2}{n}, \quad \mu = 0, 1, \ldots, n-1^{*}).$$

Soll also $X_\lambda(u \mid \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = X_\lambda(u \mid \omega_1, \omega_2)$ sein, so muss das Punktsystem:

(12) $$\frac{\lambda(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)}{n} + \mu\cdot\frac{\gamma\omega_1 + \delta\omega_2}{n} = \frac{(\lambda\alpha + \mu\gamma)\omega_1}{n} + \frac{(\lambda\beta + \mu\delta)\omega_2}{n},$$

bei beliebigem stehenden Werte λ für $\mu = 0, 1, \ldots, n-1$ gebildet, von ganzzahligen Verbindungen der Perioden abgesehen auf das System (11) zurückführen. Dies ist offenbar immer und nur dann der Fall, wenn $\alpha \equiv 1$, $\gamma \equiv 0$, (mod. n) ist, woraus $\delta \equiv 1$ eine unmittelbare Folge ist. Aus einer später hervortretenden Thatsache (dass sich nämlich die X_α gegenüber einer beliebigen Modulsubstitution linear reproducieren) ist aber der Schluss zu ziehen, dass die hier gesuchte Congruenzgruppe, deren Substitutionen zugleich alle n X_α unverändert lassen, eine ausgezeichnete ist. Wir folgern somit $\beta \equiv 0$ und daher das Resultat: *Bei ungeradem n bleiben die $X_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2)$ insgesamt erst gegenüber den Substitutionen der homogenen Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe des Index $n\varphi(n)\psi(n)$ unverändert* (*cf. I p.* 460).

§ 3. Die Modulformen n^{ter} Stufe z_α, y_α, etc. und ihre Beziehung zu den Teilwerten im Falle eines ungeraden n.

Gehören die $X_\alpha(u)$ zur n^{ten} Stufe, so muss ein Gleiches von $X_\alpha(0)$, d. i. von ihren Nullwerten, sowie auch von den Nullwerten ihrer Ableitungen nach u gelten. Diese Nullwerte sind aber gerade die Coefficienten z_α, y_α etc. der Reihenentwicklung:

$$X_\alpha(u) = z_\alpha + y_\alpha u + x_\alpha\frac{u^2}{2} + w_\alpha\frac{u^3}{6} + v_\alpha\frac{u^4}{24} + \cdots,$$

welche wir bereits unter (12) p. 267 angaben; *in den z_α, y_α, x_α u. s. w. besitzen wir also Modulformen der n^{ten} Stufe, und zwar ersichtlich der Reihe nach von den Dimensionen $\frac{3n-1}{2}$, $\frac{3n-3}{2}$, $\frac{3n-5}{2}$ u. s. w. Zufolge der bereits p.* 267 *entwickelten Relationen* (13) *und* (14) *haben wir $\frac{n-1}{2}$ wesentlich verschiedene Grössen z_α, ebenso viele x_α etc.; dagegen giebt es $\frac{n+1}{2}$ Moduln y_α, w_α etc.* Die hiermit gewonnenen Modulformen,

---

*) Um hier Verwechslungen mit dem Substitutionscoefficienten α zu vermeiden, haben wir für den Augenblick den unteren Index der Functionen X durch λ bezeichnet.

und insbesondere die z_α, gehören zu den einfachsten, deren wir überhaupt habhaft werden können, und wir ziehen betreffs derselben dieserhalb sogleich eine Reihe von Folgerungen, welche sich aus den Formeln der voraufgehenden Paragraphen unmittelbar ergeben.

Erstlich haben wir für die z_α aus Formel (1) des vorigen Paragraphen die Darstellung:

$$z_\alpha(\omega_1, \omega_2) = (-1)^\alpha \sqrt[8]{\frac{\Delta}{\Delta^n}}\, \sigma_{\frac{\alpha}{n}, 0}\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right), \tag{1}$$

oder auch aus Formel (2) ebendaselbst:

$$z_\alpha(\omega_1, \omega_2) = \frac{(-1)^{\alpha+1}}{\sqrt{\frac{\omega_2}{2n\pi}}\sqrt[8]{\Delta^n}}\, r^{\frac{\alpha^2}{2n}}\, \vartheta_1(\alpha\omega\pi, r^n), \tag{2}$$

woran sich die Reihenentwicklung schliesst:

$$z_\alpha(\omega_1, \omega_2) = \frac{(-1)^{\alpha+1} i}{\sqrt{\frac{\omega_2}{2n\pi}}\sqrt[8]{\Delta^n}} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m r^{\frac{((2m+1)n-2\alpha)^2}{8n}}. \tag{3}$$

Auch für die y_α lassen sich aus (3) p. 277 fast unmittelbar Reihenentwicklungen nach r hernehmen, nämlich:

$$y_\alpha(\omega_1, \omega_2) = \tag{4}$$

$$= \frac{(-1)^\alpha \sqrt{2n}}{\left(\sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\sqrt[24]{\Delta^n}\right)^3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \left((2m+1)n - 2\alpha\right) r^{\frac{((2m+1)n-2\alpha)^2}{8n}},$$

während entsprechende Entwicklungen für die x_α etc. ein wenig complicierter ausfallen wegen des Exponentialfactors, der sich in Formel (3) p. 277 vor dem Summenzeichen findet.

Die Formeln des vorigen Paragraphen geben uns weiter einige *Ausdrücke für z_α und y_0 durch die Teilwerte des n^{ten} Teilungsgrades.* Wir ziehen erstlich aus (7) p. 278:

$$z_\alpha = (-1)^\alpha \prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{0,\mu} \prod_{\mu=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{\alpha,\mu}. \tag{5}$$

Weiter folgt für $\alpha = 0$ wiederum aus (7) p. 278 unter Benutzung von (9) p. 276:

$$y_0 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{0,\mu}^3 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\wp'_{0,\mu}}. \tag{6}$$

Formel (6) p. 278 ergiebt als zweite hierher gehörige Darstellung der z_α

$$(7) \qquad z_\alpha = (-1)^{\alpha + \frac{n-1}{2}} \sigma_{\alpha,0}^n \prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\wp_{\alpha,0} - \wp_{0,\mu}}{\wp'_{0,\mu}} \right).$$

Wenn man will, kann man hier noch den Factor $\sigma_{\alpha,0}^n$ auf Grund von (9) p. 279 entfernen. Diese Formel heisst nämlich für $u = 0$:

$$(-1)^\alpha \sigma_{\alpha,0}^n = \left(\frac{u}{\wp\left(u - \frac{\alpha\omega_1}{n}\right) - \wp_{\alpha,0}} \right)_{\lim u=0} \cdot \prod_{\lambda=1}^{\frac{n-1}{2}}{}' \frac{1}{\wp_{\alpha,0} - \wp_{\lambda,0}},$$

wo jedoch im Producte rechter Hand der Wert $\lambda \equiv \pm \alpha$ auszulassen ist; in üblicher Weise haben wir diesen Umstand durch einen oberen Index am Productzeichen angedeutet. Durch Ausführung des angedeuteten Grenzübergangs kommt:

$$(8) \qquad \wp'_{\alpha,0} \prod_{\lambda=1}^{\frac{n-1}{2}} (\wp_{\alpha,0} - \wp_{\lambda,0}) = \frac{(-1)^{\alpha+1}}{\sigma_{\alpha,0}^n};$$

wir unterlassen jedoch, den hiermit gewonnenen Wert von $\sigma_{\alpha,0}^n$ in in Formel (7) noch ausführlich zu substituieren.

Auf der anderen Seite kann man die Teilwerte durch die Modulformen z_α etc. ausdrücken. Um dieses zu leisten, betrachte man die Summe:

$$(9) \qquad \sum_{\mu=0}^{n-1} \varepsilon^{-\mu\alpha} Z\left(u - \frac{\mu\omega_2}{n}\right),$$

wobei α eine der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$ sein soll, $Z(u)$ aber das elliptische Integral zweiter Gattung (1) I p. 155 bedeutet. Zufolge der Formeln (2) ebenda stellt (9) eine doppeltperiodische Function dar, und zwar, wie man sieht eine solche n^{ten} Grades, deren n Unstetigkeitspunkte im Parallelogramm mit den Nullpunkten von $X_0(u)$ coincidieren. Nach dem Hermite'schen Satze muss also eine Darstellung existieren:

$$(10) \qquad \sum_{\mu=0}^{n-1} \varepsilon^{-\mu\alpha} Z\left(u - \frac{\mu\omega_2}{n}\right) = \frac{\sum_{\lambda=0}^{n-1} c_\lambda X_\lambda(u)}{X_0(u)}.$$

Zur Bestimmung der Coefficienten c setze man $u - \frac{\omega_2}{n}$ an Stelle von u in (10) ein, benutze für die rechte Seite Formel (13) p. 264 und multipliciere die entspringende Relation mit $\varepsilon^{-\alpha}$; es ergiebt sich:

$$(11)\qquad \sum_{\mu=0}^{n-1} \varepsilon^{-(\mu+1)\alpha} Z\left(u - \frac{(\mu+1)\omega_2}{n}\right)$$
$$= \sum_{\mu=0}^{n-1} \varepsilon^{-\mu\alpha} Z\left(u - \frac{\mu\omega_2}{n}\right) + \{Z(u-\omega_2) - Z(u)\}$$
$$= \frac{\sum_{\lambda=0}^{n-1} c_\lambda \varepsilon^{\lambda-\alpha} X_\lambda(u)}{X_0(u)}.$$

Zieht man (10) von (11) ab und benutzt I p. 155 (2), so folgt:

$$(12)\qquad \{c_0(\varepsilon^{-\alpha}-1) - \eta_2\} X_0 + \sum_{\lambda=1}^{n-1} c_\lambda(\varepsilon^{\lambda-\alpha}-1) X_\lambda = 0$$

als lineare Identität zwischen den X. Da alle Coefficienten derselben verschwinden müssen, so ergiebt sich c_0 aus $c_0(\varepsilon^{-\alpha}-1) = \eta_2$, während unter den übrigen c_λ einzig c_α von Null verschieden ist. Zur Bestimmung von c_α entwickle man (10) rechts und links nach Potenzen von u. Das Anfangsglied der linken Seite ist $-u^{-1}$, rechts aber $\frac{c_\alpha z_\alpha}{y_0} u^{-1}$. Um die endgültige Formel noch etwas allgemeiner zu gestalten, schreibe man $\left(u - \frac{\lambda\omega_1}{n}\right)$ an Stelle von u und findet solchergestalt:

$$(13)\qquad \sum_{\mu=0}^{n-1} \varepsilon^{-\mu\alpha} Z\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right) = \frac{\eta_2}{\varepsilon^{-\alpha}-1} - \frac{y_0 X_{\alpha+\lambda}(u)}{z_\alpha X_\lambda(u)}\text{*)}.$$

Die Formel (13) differentiiere man nun für $\lambda = 0$ nach u und erhält so:

$$(14)\qquad \sum_{\mu=0}^{n-1} \varepsilon^{-\mu\alpha} \wp\left(u - \frac{\mu\omega_2}{n}\right) = \frac{y_0\left(X_\alpha \frac{dX_0}{du} - X_0 \frac{dX_\alpha}{du}\right)}{z_\alpha X_0^2}.$$

Hier entwickele man rechts und links nach ansteigenden Potenzen von u. Linker Hand treten als Coefficienten gewisse Summen über Teilwerte auf, rechts aber rationale Verbindungen der z_α, y_α etc.

*) Die hier gewonnene Formel ist (natürlich in ganz anderer Bezeichnungsweise) schon von Jacobi aufgestellt und der sogen. umgekehrten Transformation zu Grunde gelegt; cf. „*Suite des notices sur les fonctions elliptiques*“ IV, Crelle's Journal Bd. 4 (1829) oder Ges. Werke I p. 271 u. f. Die Umsetzung der Jacobischen Formel in die entsprechende für die von Weierstrass eingeführten Functionen ist von Hrn. Kiepert in einer schon bei Gelegenheit genannten Arbeit geleistet, cf. „*Transformationsgleichungen und Division der elliptischen Functionen*“, Crelle's Journal Bd. 76 p. 34 u. f. (1873). Man sehe übrigens auch Frobenius und Stickelberger, *Über Addition und Multiplication der elliptischen Functionen*, Crelle's Journal Bd. 88 p. 146 u. f. (1879).

Durch Identischsetzen der Absolutglieder, sowie andrerseits der Coefficienten von u entspringen die beiden folgenden Relationen:

$$(15)\quad \sum_{\mu=1}^{n-1} \varepsilon^{-\mu\alpha}\wp_{0,\mu} = \frac{z_\alpha w_0 - 3x_\alpha y_0}{6y_0 z_\alpha}, \quad \sum_{\mu=1}^{n-1} \varepsilon^{-\mu\alpha}\wp'_{0,\mu} = \frac{w_\alpha y_0 - w_0 y_\alpha}{3z_\alpha y_0},$$

die aber, wie wir wiederholen, nur für die Werte $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$ gültig sind. Um entsprechende Formeln für $\alpha = 0$ zu gewinnen, knüpfen wir für die $\wp$-Teilwerte an Formel (5) p. 278, die wir wieder links und rechts nach Potenzen von u entwickeln. Der Vergleich der Coefficienten von u und u^3 rechter und linker Hand ergiebt nach kurzer Rechnung:

$$(16)\quad \sum_{\mu=1}^{n-1} \wp_{0,\mu} = -\frac{w_0}{3y_0}.$$

Da endlich $\wp'_{0,-\mu} = -\wp'_{0,\mu}$ ist, so ist für die $\wp'$-Function einfach:

$$(17)\quad \sum_{\mu=1}^{n-1} \wp'_{0,\mu} = 0.$$

Nun führt eine einfache Combination der zuletzt erhaltenen Relationen auf die gesuchten Ausdrücke der Teilwerte von $\wp$, $\wp'$ in den z_α, y_α etc.; wir finden nämlich:

$$(18)\quad \begin{cases} \wp_{0,\mu} = -\dfrac{w_0}{2ny_0} - \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\varepsilon^{\mu\alpha} + \varepsilon^{-\mu\alpha}}{2n} \cdot \frac{x_\alpha}{z_\alpha}, \\ \wp'_{0,\mu} = \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\varepsilon^{\mu\alpha} - \varepsilon^{-\mu\alpha}}{3n} \cdot \left(\frac{w_\alpha}{z_\alpha} - \frac{w_0 y_\alpha}{y_0 z_\alpha}\right) {}^{*)}. \end{cases}$$

Entsprechende Darstellungen der Teilwerte $\wp_{\lambda,\mu}$, $\wp'_{\lambda,\mu}$ mit nichtverschwindendem λ wird man aus (18) durch Ausübung geeigneter Modulsubstitutionen herstellen. Wie dieselben auf die Modulformen z_α etc. wirken, wird bald der Hauptgegenstand unserer Untersuchung sein**).

*) Es schliessen sich diese Relationen denjenigen Formeln an, durch welche Hr. Kronecker die Teilwerte der Functionen $\sin^2 \text{am}\, u$ vermöge der Wurzeln der Jacobi'schen Modular- und Multiplicatorgleichungen ausdrückt; siehe die Berliner Monatsberichte von 1875 p. 498 u. f.

**) Betreffs der sogenannten Abel'schen Relationen zwischen den Teilwerten von $\wp$, $\wp'$, welche aus der Formel (13) des Textes abgeleitet werden können, verweisen wir auf die bezügliche Note von Hrn. F. Engel in den Berichten der Kgl. Sächs. Gesell. der Wiss. vom Jahre 1884; man sehe auch „Normalcurven p. 43 (Note).

§ 4. Endgültige Auswahl und Darstellung für den Zusatzfactor $\varkappa$ der $X_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2)$ im Falle eines geraden n.

Indem wir uns anschicken, die Untersuchungen der letzten Paragraphen auch für *gerade* n durchzuführen, legen wir mit Hrn. Hurwitz*) der in (11) p. 266 noch unbestimmt gelassenen Grösse $\varkappa$ bei den geraden Ordnungen n die nachfolgende Bedeutung unter:

$$(1) \qquad \varkappa = \sqrt[8]{\bar{\Delta} \cdot \Delta} = \sqrt[4]{\Delta} \cdot \sqrt[8]{\frac{\bar{\Delta}}{\Delta}}.$$

Dass diese Auswahl des $\varkappa$ eine zweckmässige, in gewissem Sinne sogar die einzig zweckmässige ist, soll weiter unten auseinandergesetzt werden. Zunächst bemerke man, dass die so für $\varkappa$ gesetzte Modulform $(-3)^{\text{ter}}$ Dimension der n^{ten} Stufe adjungiert ist, indem sie bei Anwendung einer modulo n mit der Identität congruenten Modulsubstitution, allgemein gesagt, eine multiplicative 8te Einheitswurzel annimmt. Welches der Wert dieser Einheitswurzel ist, werden wir vor allen Dingen bestimmen wollen und führen zu dem Zweck für $\varkappa$ eine solche Darstellung ein, die den Hülfsmitteln unserer früheren Untersuchungen ohne weiteres zugänglich ist, was von $\sqrt[8]{\bar{\Delta} . \Delta}$ nicht gilt.

Die Formel (2) p. 274, welche sowohl für ungerade wie gerade n gilt, bilde man für $\mu = 1, 2, \ldots, n-1$, multipliciere alle $(n-1)$ Gleichungen mit einander und ziehe die rechts auftretenden Producte wieder nach demselben Principe wie oben (p. 274) zusammen. Es folgt**):

$$(2) \qquad \prod_{\mu=1}^{n-1} \sigma_{0,\frac{\mu}{n}} = \sigma_{0,\frac{1}{2}} \cdot \prod_{\mu=1}^{\frac{n-2}{2}} \sigma^2_{0,\frac{\mu}{n}} = -\sqrt[12]{\frac{\bar{\Delta}}{\Delta^n}},$$

wobei der numerische Factor wieder vermöge der Kreisteilungsgleichung bestimmt wurde. Aus (2) ergiebt sich weiter:

$$(3) \qquad \sqrt[4]{\bar{\Delta} \cdot \Delta} = -\sqrt[4]{\Delta^n} \cdot \left(\sqrt[4]{\Delta} \cdot \sigma^3_{0,\frac{1}{2}}\right) \cdot \prod_{\mu=1}^{\frac{n-2}{2}} \sigma^6_{0,\frac{\mu}{n}},$$

und hier ist der rechts in Klammern gesetzte Ausdruck von einem numerischen Factor abgesehen mit dem reciproken Werte von $\sqrt[4]{\lambda(\lambda-1)}$ identisch***). Indem wir diesen reciproken Wert in (3) einsetzen,

*) Math. Ann. Bd. 27 p. 195.

**) Bei den Teilwerten müssen wir hier überall ausdrücklich den Teilungsgrad mit in die Bezeichnung aufnehmen.

***) Man vergl. die Formeln p. 29 u. f.

rechts und links die Quadratwurzel ziehen und den numerischen Factor alsdann durch Annäherung an $\omega = i\infty$ bestimmen, entspringt als gewünschte Darstellung von $\varkappa$:

$$(4) \qquad \varkappa = \sqrt[8]{\overline{\Delta}\cdot\Delta} = (-1)^{\frac{n-2}{2}}\sqrt{2}\cdot\frac{(\sqrt[4]{\Delta})^{\frac{n}{2}}}{\sqrt[8]{\lambda(\lambda-1)}}\cdot\prod_{\mu=1}^{\frac{n-2}{2}}\sigma_{0,\frac{\mu}{n}}^{3}.$$

Um eine nunmehr auszuübende Substitution der homogenen Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe als solche gleich kenntlich zu machen, schreiben wir ihre Coefficienten in der Gestalt:

$$(5) \qquad \alpha = an + 1, \quad \beta = bn, \quad \gamma = cn, \quad \delta = dn + 1.$$

Die Veränderungen, welche alsdann die einzelnen Bestandteile der rechten Seite von (4) erleiden, wird man nach Formel (16) in I p. 627 bez. (11) I p. 674, sowie endlich nach (2) p. 24 berechnen. Wir finden die nachfolgenden Resultate:

$$(6) \qquad \begin{cases} \sqrt[4]{\Delta'} = i^{n(b+c+d)}\sqrt[4]{\Delta}, \\ \sqrt[8]{\lambda'(\lambda'-1)} = e^{-\frac{n\pi i}{8}(d^2n+2d+(2b+c)(nd+1))}\sqrt[8]{\lambda(\lambda-1)}, \\ \prod\limits_{\mu=1}^{\frac{n-2}{2}}\sigma'^{3}_{0,\frac{\mu}{n}} = (-1)^{\frac{n(n-2)}{8}(cd+c+d)}e^{-\frac{c\pi i}{4}\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\prod\limits_{\mu=1}^{\frac{n-2}{2}}\sigma_{0,\frac{\mu}{n}}^{3}. \end{cases}$$

Fasst man diese Formeln nach Massgabe der rechten Seite der Gleichung (4) zusammen, so ist es für die auszuführende Zwischenrechnung zweckmässig, zu unterscheiden, ob n durch 4 teilbar ist oder durch 4 geteilt den Rest 2 lässt. Im Schlussresultat ziehen wir beide Fälle gleich wieder in eins zusammen und finden so als Veränderung von $\sqrt[8]{\overline{\Delta}.\Delta}$ bei Ausübung der durch (5) gegebenen Substitution:

$$(7) \qquad \sqrt[8]{\overline{\Delta'}\cdot\Delta'} = (-1)^{\frac{n}{2}\left\{(b+c)(d+1)+\frac{d(d-1)}{2}\right\}}\cdot e^{\frac{\pi i}{4}(nb+nc-ncd-c)}\sqrt[8]{\overline{\Delta}\cdot\Delta}.$$

Im Gegensatz zu den bei ungeraden n gefundenen Verhältnissen ist sonach hier der Zusatzfactor $\varkappa$ keineswegs absolut zur n^{ten} Stufe gehörig, sondern vielmehr zur Stufe $8n$, wie man leicht bemerkt. Deshalb sind auch Darstellungen des jetzigen $\varkappa$ durch n^{te} $\wp$- oder $\wp'$-Teilwerte, die etwa den Formeln (9) und (10) p. 276 analog gebildet wären, nicht möglich. Man möchte zwar versuchen, vermöge der aus (8) p. 276 zu gewinnenden Gleichung:

$$(8) \qquad \wp'^{2}_{0,\mu}(\wp_{0,2\mu} - \wp_{0,\mu}) = -\frac{\sigma_{0,2\mu}}{\sigma_{0,\mu}^{8}}$$

für alle durch 3 nicht teilbaren Zahlen n die Formel:

$$(9)\qquad \prod_{\mu=1}^{\frac{n-2}{2}} \wp'^2_{0,\mu}(\wp_{0,2\mu} - \wp_{0,\mu}) = \pm \prod_{\mu=1}^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{\sigma^8_{0,\mu}}$$

zu benutzen; inzwischen kommen wir doch von hier aus vermöge (4) nur zu $\sqrt[3]{\bar{\Delta}\cdot\Delta}$, nicht aber zu $\sqrt[8]{\bar{\Delta}\cdot\Delta}$.

§ 5. Darstellungen der normierten $X_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2)$ und Bestimmung ihrer Stufe im Falle eines geraden n.

Durch die geschehene Auswahl des $\varkappa$ sind die X_α in den Fällen *gerader* Zahlen n zu *homogenen Functionen* $(-2)^{\text{ter}}$ *Dimension* der drei Argumente u, ω_1, ω_2 geworden. Als ausführliche Darstellungen für dieselben haben wir erstlich die beiden folgenden:

$$(1)\quad X_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2) = e^{-\frac{\pi i \alpha}{2n} + \frac{3\pi i}{4}} \cdot \sqrt[8]{\bar{\Delta}\cdot\Delta} \cdot e^{-G_1 u^2} \cdot \sigma_{\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right),$$

$$(2)\quad X_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2) = \sqrt{\frac{2n\pi}{\omega_2}} \sqrt[8]{\Delta} \cdot e^{\frac{n\eta_2}{2\omega_2}u^2} \cdot z^{-\alpha} r^{\frac{\alpha^2}{2n}} \cdot \vartheta_3\left(\frac{nu - \alpha\omega_1}{\omega_2}\pi, r^n\right),$$

woran sich die Reihenentwicklung schliessen möge:

$$(3)\qquad X_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2) = \sqrt{\frac{2n\pi}{\omega_2}} \sqrt[8]{\Delta} \cdot e^{\frac{n\eta_2}{2\omega_2}u^2} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} r^{\frac{(mn-\alpha)^2}{2n}} z^{mn-\alpha}.$$

Eine Darstellung der X_α durch die $\wp$-Function, wie wir sie für die ungeraden n in (6) p. 278 leisteten, lässt sich auch jetzt ohne Mühe durchführen. Wir finden erstlich für $X_0(u)$, wie man leicht bestätigt:

$$(4)\qquad \frac{X_0(u)}{\sigma^n(u)} = \varepsilon_0 \cdot \prod_{\mu=0}^{\frac{n-2}{2}} \left(\wp(u) - \wp_{\frac{1}{2}, \frac{2\mu+1}{2n}}\right),$$

und sodann durch Anwendung von Formel (IV) p. 264 allgemein:

$$(5)\quad X_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2) = \varepsilon_0\, \sigma^n_{\frac{\alpha}{n}, 0}(u) \prod_{\mu=0}^{\frac{n-2}{2}} \left(\wp\left(u - \frac{\alpha\omega_1}{n}\right) - \wp_{\frac{1}{2}, \frac{2\mu+1}{2n}}\right).$$

Durch Benutzung der ersten Formel (7) p. 276 gelangt man von hier aus wieder zum ursprünglichen σ-Product (1) p. 257 für die Function X_α zurück. Doch unterlassen wir diese und sonstige Umsetzungen der X_α und knüpfen unsere weitere Besprechung an die bislang gewonnenen Formeln.

Um die Stufe der Functionen $X_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2)$ zu bestimmen, müssen wir gegenwärtig eine etwas ausführlichere Betrachtung anstellen

und benennen, um Collisionen der Bezeichnungen zu meiden, für den Augenblick den Index der Functionen X durch λ. Indem wir dann noch die Abkürzung $\lambda' = \lambda + \frac{n}{2}$ benutzen, haben wir als Verschwindungspunkte von $X_\lambda(u)$ im Periodenparallelogramm die nachfolgenden anzumerken:

$$(6)\qquad \frac{\lambda'\omega_1}{n} + \frac{2\mu+1}{2n}\cdot\omega_2,\quad \mu = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Soll jetzt $X_\lambda(u \mid \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = X_\lambda(u)$ sein, so schliessen wir gerade wie vorhin bei den ungeraden n (p. 280), dass das System der Punkte:

$$(7)\qquad \left(\frac{\alpha\lambda'}{n} + \frac{\gamma(2\mu+1)}{2n}\right)\omega_1 + \left(\frac{\beta\lambda+\delta\mu}{n} + \frac{\beta n+\delta}{2n}\right)\omega_2,$$

von ganzzahligen Verbindungen der Perioden abgesehen, wieder auf das Punktsystem (6) zurückkommen muss. Indem also insbesondere

$$\frac{(\alpha-1)\lambda'}{n} + \frac{\gamma(2\mu+1)}{2n}$$

für beliebige ganzzahlige λ', μ eine ganze Zahl vorstellen muss, haben wir als notwendige Bedingungen $\alpha \equiv 1$ (mod. n) und $\gamma \equiv 0$ (mod. $2n$). Eine weitere unmittelbare Folgerung ist $\delta \equiv 1$ (mod. n), und es folgt endlich $\beta \equiv 0$ (mod. $2n$) vermöge der schon wiederholt genannten Thatsache, dass diejenigen Modulsubstitutionen, welche zugleich alle X_α in sich transformieren, eine ausgezeichnete Untergruppe bilden. Um diese ausgezeichnete Untergruppe aber soll es sich hier allererst handeln.

Indem die gefundenen Bedingungen:

$$(8)\qquad \alpha \equiv \delta \equiv 1 \text{ (mod. } n),\quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \text{ (mod. } 2n)$$

augenscheinlich dafür hinreichend sind, dass das Punktsystem (7) mit dem in (6) gegebenen identisch ausfällt, wird bei einer hierher gehörigen Modulsubstitution das Product auf der rechten Seite von (5) absolut unverändert bleiben. Ein Gleiches beweist man für den Bestandteil $\sigma^n_{\alpha,0}(u)$ sofort vermöge (2) p. 24, so dass die Wirkung der in Rede stehenden Modulsubstitution auf X_α dieselbe ist, wie auf:

$$(9)\qquad z_0(\omega_1, \omega_2) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt[8]{\overline{\Delta}\cdot\Delta}\cdot\sigma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right).$$

Um aber die Veränderung der Grösse z_0 zu bestimmen, benutzen wir die schon in (5) p. 286 eingeführte Schreibweise unserer Modulsubstitution und setzen des genaueren:

$$(10)\qquad \beta = nb = 2nb_0,\quad \gamma = nc = 2nc_0;$$

die hier gebrauchten Zahlen a, b_0, c_0, d genügen alsdann der Bedingung

$$(11) \qquad n \cdot ad + a + d = 4 b_0 c_0, \quad a + d \equiv 0, \text{ (mod. 2)}.$$

Den σ-Factor auf der rechten Seite von (9) bezeichnen wir, als zu den transformierten Perioden gehörig, durch $\bar{\sigma}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ und finden aus (2) p. 24 als Wirkung der auszuübenden Substitution:

$$(12) \qquad \sigma'_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = (-1)^{c_0 + c_0 d \cdot \frac{n}{2} + ad \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{d-a}{2} \cdot \frac{n}{2}} \cdot i^{-c_0}\, \bar{\sigma}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}.$$

Indem wir nun auch noch die Formel (7) p. 286 heranziehen, kommt als Veränderung von z_0 nach leichter Zwischenrechnung:

$$(13) \qquad z_0' = (-1)^{\frac{n}{2}\left(b_0 + c_0 - \frac{a(a+1)}{2}\right)} z_0.$$

Hieraus liest man die Schlussresultate ab, und zwar erstlich:

Ist n durch 4 teilbar, so sind die X_α, als Functionen der Perioden betrachtet, Moduln der $2n^{\text{ten}}$ Stufe, indem sie insgesamt erst bei der durch (8) charakterisierten Untergruppe unverändert bleiben, welche sich sofort als eine Congruenzgruppe $2n^{\text{ter}}$ Stufe des Index $n\varphi(2n)\psi(2n)$ erweist.

Ist dagegen n das Doppelte einer ungeraden Zahl, so folgt aus (11) leicht $a \equiv d$ (mod. 4). Bedeutet also jetzt k eine beliebige ganze Zahl, so haben wir ausser (8) als Bedingung für völlig unveränderte X_α:

$$(14) \qquad a \equiv d \equiv k \text{ (mod. 4)}, \quad b_0 + c_0 \equiv \frac{k(k+1)}{2} \text{ (mod. 2)},$$

die man noch in die andere Gestalt überführen wolle:

$$(15) \qquad \alpha \equiv \delta \equiv 1 + kn, \quad \beta + \gamma \equiv nk(k+1) \text{ (mod. } 4n).$$

Daher das weitere Ergebnis:

Lässt n, durch 4 geteilt, den Rest 2, so sind die X_α als Functionen der Perioden nur erst Moduln der Stufe $4n$ und gehören als solche insgesamt zu einer ausgezeichneten Untergruppe des Index

$$\frac{n}{2}\varphi(4n)\psi(4n).$$

In der That zählt man sofort acht modulo $4n$ incongruente Substitutionen ab, welche die Bedingungen (8) und (15) erfüllen.

§ 6. Einführung der Modulformen z_α, y_α etc. $2n^{\text{ter}}$ bez. $4n^{\text{ter}}$ Stufe bei geraden Werten von n.

Die Nullwerte der X_α, sowie dann weiter die Nullwerte der Ableitungen von X_α nach u liefern jene Modulformen $(-2)^{\text{ter}}$, $(-3)^{\text{ter}}$ u. s. w. Dimension, die wir mit z_α, y_α etc. bezeichneten, und deren

Stufenzahl natürlich selbst wieder $2n$ bez. $4n$ ist, je nachdem n durch 4 teilbar oder $\equiv 2 \pmod{4}$ ist. Zu bemerken dürfte etwa nur dieses sein, dass die *Quotienten* der z_α, sowie auch die der y_α etc., als Modulfunctionen jedenfalls immer schon zu der durch (8) p. 288 charakterisierten Congruenzgruppe $2n^{\text{ter}}$ Stufe gehören; es ist dies eine Folge des im vorigen Paragraphen hervorgetretenen Umstandes, dass die z_α bei Anwendung einer Substitution dieser Untergruppe alle zugleich entweder das Zeichen wechseln oder unverändert bleiben.

Die Anzahl der verschiedenen Moduln z_α ist $\frac{n+2}{2}$, und wir können als solche $z_0, z_1, z_2, \ldots z_{\frac{n}{2}}$ wählen; demgegenüber haben wir $\frac{n-2}{2}$ wesentlich verschiedene Moduln y_α, nämlich etwa $y_1, y_2, \ldots, y_{\frac{n-2}{2}}$ (cf. (15) p. 267). *Bei den x_α, w_α etc. finden wir in dieser Hinsicht immer wieder dieselben Verhältnisse wie bei den z_α und y_α.*

Vornehmlich aber soll es hier gelten, die analytischen Darstellungen zusammenzustellen, welche für unsere Modulformen aus den Gleichungen des vorigen Paragraphen hervorgehen. Wir haben da zuvörderst für die $\frac{n+2}{2}$ Modulformen $z_\alpha(\omega_1, \omega_2)$ die beiden Ausdrücke durch die σ- und ϑ_3-Function:

$$z_\alpha(\omega_1, \omega_2) = e^{-\frac{\pi i \alpha}{2n} + \frac{3\pi i}{4}} \cdot \sqrt[8]{\Delta \cdot \Delta} \cdot \sigma_{\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right), \tag{1}$$

$$z_\alpha(\omega_1, \omega_2) = \sqrt{\frac{2n\pi}{\omega_2}} \sqrt[8]{\Delta} \cdot r^{\frac{\alpha^2}{2n}} \vartheta_3(\alpha\omega\pi, r^n). \tag{2}$$

Des weiteren aber ergiebt sich aus (3) p. 287 für die z_α die Reihenentwicklung:

$$z_\alpha(\omega_1, \omega_2) = \sqrt{\frac{2n\pi}{\omega_2}} \sqrt[8]{\Delta} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} r^{\frac{(mn-\alpha)^2}{2n}}. \tag{3}$$

Als Reihendarstellungen der Grössen y_α schliessen sich an:

$$y_\alpha(\omega_1, \omega_2) = i\sqrt{n} \cdot \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}} \sqrt[24]{\Delta}\right)^3 \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} (mn-\alpha) r^{\frac{(mn-\alpha)^2}{2n}}, \tag{4}$$

während die für x_α etc. wieder ein wenig umständlicher ausfallen würden.

Als eine einzelne Beziehung der eingeführten Modulformen z_α zu den Teilwerten der σ- und $\wp$-Function ziehen wir aus (5) p. 287 für $\alpha > 0$ die folgende:

$$\frac{z_\alpha}{z_0} = \sigma^n_{\frac{\alpha}{n}, 0} \cdot \prod_{\mu=0}^{\frac{n-2}{2}} \left(\wp_{\frac{\alpha}{n}, 0} - \wp_{\frac{1}{2}, \frac{2\mu+1}{2n}}\right). \tag{5}$$

Inzwischen sind für die geraden n weitergehende Untersuchungen über diesen Gegenstand (wie solche uns oben in § 3 p. 281 u. f. für die ungeraden n beschäftigten) zur Zeit noch nicht ausgeführt. Auch hat es den Anschein, als ob die hier vorliegenden Verhältnisse nicht zu so einfachen Resultaten führen möchten wie in den Fällen ungerader n. Wir lassen demnach den in Rede stehenden Gegenstand ausser Acht und wenden uns zu neuen wichtigen Entwicklungen über die X_α.

§ 7. Transformation der X_α durch Modulsubstitutionen, insbesondere durch S und T, im Falle eines ungeraden n.

Die bisherigen analytischen Entwicklungen gaben uns die Mittel zu entscheiden, bei welchen Modulsubstitutionen die X_α unverändert bleiben. Daran reiht sich jetzt die principielle Fragestellung, wie sich die X_α bei Ausübung der übrigen Modulsubstitutionen verhalten mögen, und die Beantwortung dieser Frage ist es, welche von den weittragendsten Folgen für den Fortgang unserer Untersuchungen begleitet ist. Wenden wir eine beliebige homogene Modulsubstitution an und nennen das für die transformierten Perioden gebildete X_α kurz X_α', so ist offenbar auch $X_\alpha' : \sigma^n(u)$ eine doppeltperiodische Function n^{ten} Grades, und daher ist X_α' nach dem Hermite'schen Satze eine lineare homogene Function der ursprünglichen X:

$$X_\alpha' = \sum_{\beta=0}^{n-1} c_{\alpha\beta} X_\beta \tag{1}$$

mit von u unabhängigen Coefficienten $c_{\alpha\beta}$. Also der fundamentale Satz: *Gleichgültig ob n gerade oder ungerade sein mag, erfährt das System der n Grössen X_α bei Ausübung einer beliebigen homogenen Modulsubstitution selbst eine homogene lineare Substitution.* Eben hierin ist der schon wiederholt benutzte Umstand begründet, dass diejenigen Modulsubstitutionen, welche alle X_α zugleich unverändert lassen, eine ausgezeichnete Untergruppe bilden. Mit Rücksicht auf die vorhin erhaltenen Resultate aber ziehen wir hier sogleich den weiteren Schluss: *Bei Ausübung von Modulsubstitutionen werden die n Functionen X_α selbst eine Gruppe linearer homogener Substitutionen bilden, welche auf die homogene Modulgruppe isomorph bezogen ist; diese Beziehung ist von unendlich hoher Meroedrie, denn die X_α-Gruppe ist, wie wir gesehen haben, eine endliche Gruppe, nämlich eine $G_{n\varphi(n)\psi(n)}$ bez. $G_{n\varphi(2n)\psi(2n)}$ oder $G_{\frac{n}{2}\varphi(4n)\psi(4n)}$, je nachdem n ungerade oder durch 4 teilbar oder endlich das Doppelte einer ungeraden Zahl ist.* Zur näheren Erforschung dieser X_α-Gruppen werden wir festzustellen haben, welches das Verhalten der X_α bei Aus-

übung der homogenen Substitutionen S und T ist; wir leisten diese Aufgabe vorab für ungerade n.

Die Substitution S hatte die Gestalt $\omega_1' = \omega_1 + \omega_2$, $\omega_2' = \omega_2$. Bei ihrer Anwendung wird das System der Nullpunkte von X_α in sich transformiert (cf. (11) p. 280), so dass $X_\alpha' : X_\alpha$ von u unabhängig ist. Für die Wirkung von S auf X_α haben wir damit den Ansatz: $X_\alpha' = c_\alpha X_\alpha$, und es kann c_α nur eine n^{te} Einheitswurzel sein, da $S^n \equiv 1 \pmod{n}$ ist. Dieses bestätigt auch eine kurze, bei $\omega = i\infty$ durchzuführende Näherungsrechnung; setzen wir $u = 0$, so ist $z_\alpha' = c_\alpha z_\alpha$, und nun wird z_α an bezeichneter Stelle in erster Annäherung mit $\omega_2^{\frac{3n-1}{2}} r^{-\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}}$ proportional, wie man aus (3) p. 281 abliest. *Bei Ausübung von S zeigen die X_α sonach das durch*

$$X_\alpha' = \varepsilon^{-\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}} X_\alpha \tag{2}$$

angegebene Verhalten. Die Ableitung der Formel (2) bezieht sich freilich nur erst auf die Fälle $\alpha > 0$. Es bleibt aber (2) auch für $\alpha = 0$ unverändert in Kraft, wie man etwa aus der Darstellung (5) p. 278 für X_0 ersehen mag.

Weit länger wird uns die Erledigung der Substitution T beschäftigen, und wir werden hierbei zuvörderst von den Formeln (I) bis (IV) p. 264 einen ausgiebigen Gebrauch zu machen haben. In der Formel:

$$X_0(u \mid -\omega_2, \omega_1) = \sum_{\beta=0}^{n-1} c_\beta X_\beta(u \mid \omega_1, \omega_2)$$

setzen wir zunächst $\left(u + \frac{\omega_1}{n}\right)$ an Stelle von u und finden nach (III) und (I)

$$X_0(u \mid -\omega_2, \omega_1) = \sum_{\beta=0}^{n-1} c_\beta X_{\beta-1} = \sum_{\beta=0}^{n-1} c_{\beta+1} X_\beta(u \mid \omega_1, \omega_2),$$

wobei übrigens für die linke Seite die speciellere Formel (13) p. 264 zur Verwendung gekommen ist. Der Vergleich der beiden letzten Gleichungen liefert $c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-1}$, und also wollen wir den gemeinsamen Wert dieser Coefficienten durch c bezeichnen. Übt man dann weiter in

$$X_0(u \mid -\omega_2, \omega_1) = c \sum_{\beta=0}^{n-1} X_\beta(u \mid \omega_1, \omega_2)$$

die Substitution $u + \frac{\alpha\omega_2}{n}$ für u aus, so kommt unter Gebrauch von

(IV) und (13) p. 264 als *Ansatz für die Wirkung der Substitution T auf X_α:*

$$(3)\qquad X_\alpha'(u) = c \sum_{\beta=0}^{n-1} \varepsilon^{-\alpha\beta} X_\beta(u).$$

Die Grösse c, welche wir nunmehr zu bestimmen haben, ist unabhängig von u; sie ist aber auch, wie wir sogleich zum voraus bemerken, *unabhängig von ω und also numerisch*, und hierin hat man den wichtigen Erfolg zu sehen, welcher sich mit den in (1) p. 274 getroffenen Auswahl des Factors $\varkappa$ verbindet. Um diese Thatsache zu erhärten und zugleich den numerischen Wert von c in Erfahrung zu bringen, entwickeln wir die Formel (3) für $\alpha = 0$ rechts und links nach Potenzen von u, setzen die beiden Coefficienten von u selbst identisch und berechnen daraus für c den Wert:

$$(4)\qquad c = \frac{y_0(-\omega_2, \omega_1)}{\sum_{\alpha=0}^{n-1} y_\alpha(\omega_1, \omega_2)}.$$

Für den hier auftretenden Nenner finden wir nach (4) p. 281

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} y_\alpha(\omega_1, \omega_2) =$$

$$= \frac{\sqrt{2n}}{\frac{\omega_2}{\pi}\sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\sqrt[8]{\Delta^n}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{n-1} (-1)^{m+\alpha}((2m+1)n - 2\alpha)\, r^{\frac{((2m+1)n-2\alpha)^2}{8n}},$$

$$(5)\qquad \sum_{\alpha=0}^{n-1} y_\alpha(\omega_1, \omega_2) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{2n}}{\frac{\omega_2}{\pi}\sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\sqrt[8]{\Delta^n}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m (2m+1)\, r^{\frac{(2m+1)^2}{8n}}.$$

Vor der weiteren Entwicklung der rechten Seite von (4) müssen wir jetzt eine eigenartige Reihendarstellung für $\sqrt[8]{\Delta}$ namhaft machen, welche auch späterhin noch häufig zur Verwendung kommen wird. Differentiiert man die erste Formel (4) in I p. 161 nach u und setzt hernach $u = 0$, so kommt die in Aussicht genommene Entwicklung:

$$(6)\qquad \frac{\omega_2}{\pi}\sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[8]{\Delta}(\omega_1, \omega_2) = \vartheta_1'(0, r) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m (2m+1)\, r^{\frac{(2m+1)^2}{8}}.$$

Hierbei ist unter $\vartheta_1'\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, r\right)$ die Ableitung der ϑ_1-Function nach u zu verstehen, und übrigens wurde die Reihenentwicklung I p. 160 (2)

für diese Function herangezogen. Für y_0 folgt jetzt aus (4) p. 281 mit Hülfe von (6) die Darstellung:

$$(7)\qquad y_0(\omega_1, \omega_2) = \frac{n\sqrt{n}}{(\sqrt{\Delta})^{\frac{n-1}{2}}} \cdot \frac{\sum\limits_{-\infty}^{\infty} (-1)^m (2m+1)\, r^{\frac{(2m+1)^2 n}{8}}}{\sum\limits_{-\infty}^{\infty} (-1)^m (2m+1)\, r^{\frac{(2m+1)^2}{8}}},$$

während sich Formel (5) in die nachfolgende Gestalt umsetzt:

$$(8)\qquad \sum_{\alpha=0}^{n-1} y_\alpha(\omega_1, \omega_2) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{n}}{(\sqrt{\Delta})^{\frac{n-1}{2}}} \cdot \frac{\sum\limits_{-\infty}^{\infty} (-1)^m (2m+1)\, r^{\frac{(2m+1)^2}{8n}}}{\sum\limits_{-\infty}^{\infty} (-1)^m (2m+1)\, r^{\frac{(2m+1)^2}{8}}}.$$

Die Summation bezieht sich hier überall auf m, welches alle positiven und negativen ganzen Zahlen zu durchlaufen hat.

Um nunmehr die rechte Seite der Formel (4) zu bilden, wird man (7) durch T transformieren und sodann durch (8) dividieren. Das Verhalten von $\sqrt{\Delta}$ gegenüber T ist in I p. 624 (4) aufgezeichnet; die Grösse r wird aber in $e^{-\frac{2i\pi}{\omega}}$ übergehen, welch' letztere wir s nennen mögen. Es ergiebt sich dann für c die Darstellung:

$$(9)\qquad -\frac{c}{i^{\frac{n-1}{2}} \cdot n} = \frac{\sum (-1)^m (2m+1)\, r^{\frac{(2m+1)^2}{8}}}{\sum (-1)^m (2m+1)\, s^{\frac{(2m+1)^2}{8}}} \cdot \frac{\sum (-1)^m (2m+1)\, s^{\frac{(2m+1)^2 n}{8}}}{\sum (-1)^m (2m+1)\, r^{\frac{(2m+1)^2}{8n}}}.$$

Vermöge der nun beendeten Zwischenentwicklung haben wir c in eine durchaus eindeutige, der näheren Betrachtung leicht zugängliche Gestalt (9) setzen können. Man benenne jetzt den ersten auf der rechten Seite von (9) auftretenden Reihenquotienten abgekürzt durch $Q(\omega)$. Es ist alsdann $Q(\omega)$ eben durch Formel (9) als eine in der positiven Halbebene allenthalben eindeutige Function ihres Argumentes erklärt, deren Bedeutung wir sofort explicite angeben werden. Vorab bemerke man gleich, dass $Q(i)$ notwendig gleich 1 ist, da für $\omega = i$ die beiden Grössen r und s identisch werden, während doch andererseits die Reihen im Zähler und Nenner von Q im Innern der Halbebene allenthalben gegen einen endlichen von Null verschiedenen Wert convergieren (cf. Formel (6)). Aus der eben citierten Formel ergiebt sich nun aber weiter:

$$(10) \qquad \frac{\omega_1}{\pi}\sqrt{\frac{\omega_1}{2\pi}}\sqrt[8]{\Delta}(-\omega_2, \omega_1) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m(2m+1)\, s^{\frac{(2m+1)^2}{8}},$$

und also hat die achte Potenz von Q in einfachster Weise die Bedeutung ω^{-12}; für $Q(\omega)$ selbst ergiebt sich daraus:

$$(11) \qquad Q(\omega) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\omega\sqrt{\omega}}$$

mit dem Zusatz, dass die „innerhalb der positiven Halbebene" eindeutige Grösse $\sqrt{\omega}$ offenbar dadurch des näheren zu erklären ist, dass sie für $\omega = i$ den Wert $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ annehmen soll; solchergestalt genügen wir in der That der vorhin schon festgestellten Gleichung $Q(i) = 1$. Der zweite Factor auf der rechten Seite von (9) ist jetzt, wie man sofort überblickt, mit dem reciproken Werte von:

$$(12) \qquad Q\left(\frac{\omega}{n}\right) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{n\sqrt{n}}{\omega\sqrt{\omega}}$$

identisch, *wo wir den Zahlwert der Wurzel $\sqrt{n}$ positiv zu nehmen haben*, falls wir die soeben über $\sqrt{\omega}$ getroffene Bestimmung auch in (12) aufrecht erhalten wollen. *Nun ergiebt sich aus* (9), (11) *und* (12) *sofort:*

$$(13) \qquad c = n \cdot i^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{Q(\omega)}{Q\left(\frac{\omega}{n}\right)} = \frac{i^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}},$$

womit der Zahlwert von c bestimmt ist und zugleich unsere obige Behauptung, dass c von ω unabhängig sei, ihre Bestätigung gefunden hat.

Den Wert der Constanten c hätten wir auch noch in anderer Weise in Erfahrung bringen können. Man setze z. B. die rechte Seite von (9) mit Hülfe von (6) und (10) in die Gestalt:

$$(14) \qquad c = \frac{i^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt[8]{\Delta}(\omega_1, \omega_2)}{\sqrt[8]{\Delta}(-\omega_2, \omega_1)} \cdot \frac{\sqrt[8]{\Delta}\left(-\omega_2, \frac{\omega_1}{n}\right)}{\sqrt[8]{\Delta}\left(\frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)}.$$

Um hier die achte Wurzel der Discriminante zu einer eindeutigen Function von ω_1, ω_2 zu machen, würden für die ω_1, ω_2 diejenigen Einschränkungen vorzuschreiben sein, welche wir oben (p. 68) ausführlich besprachen. Dabei würden, wie man sich leicht überzeugt, diese Vorschriften zur Folge haben, dass in (14) die Quadratwurzel $\sqrt{n}$ positiv zu nehmen ist. Gegenüber der Operation T nimmt dann $\sqrt[8]{\Delta}$

eine eindeutig bestimmte 8te Einheitswurzel an*); aber wir brauchen zur Bestimmung von c nur diese Thatsache, nicht die Einheitswurzel selbst zu kennen; denn, wie man sieht, fällt sie aus (14) von selbst heraus, und wir kommen zum Werte (13) zurück.

Geht man andererseits von der Voraussetzung aus, dass c von ω unabhängig ist, so kann man vom Ansatz (3) aus auch folgendermassen verfahren. Durch Wiederholung der Transformation (3) erhält man für X_0 ersichtlich:

$$X_0(u \mid -\omega_1, -\omega_2) = nc^2 X_0(u \mid \omega_1, \omega_2).$$

Bei der Dimension der X_α in ihren drei Argumenten, sowie andererseits unter Gebrauch von (II) p. 264 folgt weiter:

$$X_0(u \mid -\omega_1, -\omega_2) = (-1)^{\frac{3n-1}{2}} X_0(-u \mid \omega_1, \omega_2) =$$
$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} X_0(u \mid \omega_1, \omega_2),$$

so dass der Vergleich mit der vorigen Formel $\pm c\sqrt{n} = i^{\frac{n-1}{2}}$ liefert. Das Zeichen ist hier so zu bestimmen, dass durch Combination von (2) und (3) in ST eine Substitution der Periode drei entspringt. Bei dieser Rechnung hat man übrigens von den sogenannten Gauss'schen Summen Gebrauch zu machen. Umgekehrt aber liegt hier, wo wir den Wert der Grösse c durch functionentheoretische Betrachtung bestimmt haben, eine neue Quelle für die Berechnung der Gauss'schen Summen vor. Wir kommen weiter unten (nämlich in § 10, p. 304) auf diesen Gesichtspunkt nochmals zurück.

Nach diesen Zwischenbemerkungen fassen wir hier endlich die Formeln (2) und (3) nochmals zusammen, indem wir in der letzteren für c seinen Wert eintragen. *Wir haben als Wirkungen der erzeugenden Modulsubstitutionen S und T auf die X_α die folgenden:*

$$(15) \qquad (S) \qquad X_\alpha' = \varepsilon^{-\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}} \cdot X_\alpha,$$

$$(16) \qquad (T) \qquad X_\alpha' = \frac{i^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{\beta=0}^{n-1} \varepsilon^{-\alpha\beta} X_\beta;$$

*durch Iteration und Combination dieser Operationen würde man alle $n\varphi(n)\psi(n)$ verschiedenen Substitutionen der endlichen X_α-Gruppe $G_{n\varphi(n)\psi(n)}$ herstellen können***).

---

*) Es ist dies diejenige 8te Einheitswurzel, welche in der Theorie der linearen Transformation der ϑ-Functionen eine fundamentale Rolle spielt.

**) Trägt man in Formel (16) für die X ihre Ausdrücke in ϑ_1 ein, so kommt

§ 8. Wirkung der Substitutionen S, T auf die X_α bei geradem n. Allgemeine Bemerkung über die Zusatzfactoren $\varkappa$.

Wir haben jetzt weiter die Fälle der geraden n in entsprechendem Sinne zu behandeln und also vor allem festzustellen, welche lineare Substitutionen der X_α nunmehr durch Ausübung der Operationen S und T auf die ω_1, ω_2 hervorgerufen werden. Da auch jetzt die Nullpunkte von X_α durch die Substitution S in sich übergeführt werden (vgl. (6) p. 288), so haben wir wieder den Ansatz

$$X_\alpha(\omega_1 + \omega_2, \omega_2) = c_\alpha \cdot X_\alpha(\omega_1, \omega_2)$$

und verfahren zur Bestimmung von c_α wie vorhin. Man setze also $u = 0$ und bemerke, dass z_α bei $\omega = i\infty$ zufolge (3) p. 290 in erster Annäherung mit $\omega_2^{-2} r^{\frac{1}{8}+\frac{\alpha^2}{2n}}$ proportional wird. *Als Wirkung der Operation S auf X_α finden wir demgemäss:*

$$(1) \qquad (S) \qquad X_\alpha' = \varepsilon^{\frac{n}{8}+\frac{\alpha^2}{2}} \cdot X_\alpha .$$

Der auftretende Factor ist eine $2n^{\text{te}}$ bez. $4n^{\text{te}}$ Einheitswurzel, je nachdem n durch 4 teilbar oder das Doppelte einer ungeraden Zahl ist. An diesen Umstand knüpft sich die folgende Nebenbemerkung: Da sich die X_α bei allen Modulsubstitutionen linear reproducieren, so werden überhaupt erst die parabolischen Substitutionen der Amplitude $2n$ bez. $4n$ das gesamte System der X_α unverändert reproducieren. Mit Rücksicht auf unsere früheren Sätze über die Verzweigungsschemata der ausgezeichneten Congruenzgruppen (I p. 412 u. f.) entspringen damit aus Formel (1) unsere obigen Angaben über die Stufe der X_α aufs neue.

Auch bei der Substitution T kommen wir hier wieder durch einen ähnlichen Gedankengang zum Ziele, wie im vorigen Paragraphen. Wir schliessen zunächst genau wie vorhin auf den Ansatz:

$$(2) \qquad X_\alpha(u \mid -\omega_2, \omega_1) = c(\omega) \cdot \sum_{\beta=0}^{n-1} \varepsilon^{-\alpha\beta} X_\beta(u \mid \omega_1, \omega_2),$$

wo wir, um die Möglichkeit der Abhängigkeit des c von ω zu betonen, gleich genauer $c(\omega)$ für c geschrieben haben. Um c zu berechnen, können wir jetzt bereits die Absolutglieder der Reihenentwicklungen

---

eine Formel, welcher man bereits in zahlreichen älteren Arbeiten über die Transformation n^{ter} Ordnung der ϑ-Functionen begegnet. Vgl. die bez. Angaben in „Normalcurven" p. 54.

von (2) gebrauchen und finden solcherweise c ausgedrückt durch:

$$(3)\qquad c(\omega) = \frac{z_0(-\omega_2, \omega_1)}{\sum_{\alpha=0}^{n-1} z_\alpha(\omega_1, \omega_2)}.$$

Den hier auftretenden Nenner entwickeln wir nach (3) p. 290 in der folgenden Weise:

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} z_\alpha(\omega_1, \omega_2) = \sqrt{\frac{2n\pi}{\omega_2}}\sqrt[8]{\Delta}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{\alpha=0}^{n-1} r^{\frac{(mn-\alpha)^2}{2n}},$$

$$(4)\qquad \sum_{\alpha=0}^{n-1} z_\alpha(\omega_1, \omega_2) = \sqrt{\frac{2n\pi}{\omega_2}}\sqrt[8]{\Delta}\sum_{-\infty}^{\infty} r^{\frac{m^2}{2n}},$$

während andererseits z_0 gegeben ist durch:

$$(5)\qquad z_0(\omega_1, \omega_2) = \sqrt{\frac{2n\pi}{\omega_2}}\sqrt[8]{\Delta}\sum_{-\infty}^{\infty} r^{\frac{m^2 n}{2}}.$$

Führt man für die achte Wurzel der Discriminante die im vorigen Paragraphen unter (6) aufgeschriebene Reihenentwicklung ein, so setzen sich die beiden letzten Gleichungen in umgekehrter Reihenfolge in die beiden nachfolgenden um:

$$(6)\qquad z_0(\omega_1, \omega_2) = 2\sqrt{n}\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2\cdot\sum(-1)^m(2m+1)\,r^{\frac{(2m+1)^2}{8}}\cdot\sum r^{\frac{m^2 n}{2}},$$

$$(7)\qquad \sum_{\alpha=0}^{n-1} z_\alpha(\omega_1, \omega_2) = 2\sqrt{n}\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2\cdot\sum(-1)^m(2m+1)\,r^{\frac{(2m+1)^2}{8}}\cdot\sum r^{\frac{m^2}{2n}}.$$

In beiden Formeln ist $\sqrt{n}$ mit dem gleichen Vorzeichen behaftet zu denken; welches dasselbe ist, bleibt Sache der Übereinkunft bei Einführung der normierten X_α. Auf Formel (6) übe man jetzt T aus und dividiere hernach durch Formel (7). Das Resultat ist:

$$(8)\qquad \omega^2\cdot c(\omega) = \frac{\sum(-1)^m(2m+1)\,s^{\frac{(2m+1)^2}{8}}\cdot\sum s^{\frac{m^2 n}{2}}}{\sum(-1)^m(2m+1)\,r^{\frac{(2m+1)^2}{8}}\cdot\sum r^{\frac{m^2}{2n}}},$$

wo s dieselbe Bedeutung hat wie im vorigen Paragraphen. Die letzte Gleichung multipliciere man mit der Formel (9) des vorigen Paragraphen, in welch' letzterer Gleichung wir für das dort vorkommende c den damals bestimmten Wert $i^{\frac{n-1}{2}}:\sqrt{n}$ eingetragen denken.

Im entspringenden Product schreibe man überdies noch $n\cdot\omega$ an Stelle der Variabelen ω; es folgt solchergestalt:

$$(9)\qquad \omega^2\sqrt{n}\cdot c(n\omega)=\frac{\sum(-1)^m(2m+1)\,s^{\frac{(2m+1)^2}{8}}\cdot\sum s^{\frac{m^2}{2}}}{\sum(-1)^m(2m+1)\,r^{\frac{(2m+1)^2}{8}}\cdot\sum r^{\frac{m^2}{2}}}.$$

Nun ergiebt weiter die vierte Formel (4) in I p. 161:

$$(10)\quad 2\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^2\sqrt[4]{\Delta}\,\sigma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot\sum(-1)^m(2m+1)\,r^{\frac{(2m+1)^2}{8}}\cdot\sum r^{\frac{m^2}{2}},$$

vermöge deren (9) die neue Gestalt annimmt:

$$(11)\qquad \sqrt{n}\cdot c(n\omega)=\frac{\sqrt[4]{\Delta}(-\omega_2,\omega_1)\cdot\sigma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(-\omega_2,\omega_1)}{\sqrt[4]{\Delta}(\omega_1,\omega_2)\cdot\sigma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega_1,\omega_2)}.$$

Das Verhalten der Modulform $\sigma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ bei Ausübung der Substitution T berechnet man aus der Definition dieser Modulform vermittelst der Legendre'schen Relation sofort zu $\sigma'_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}=i\sigma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$, während, wie bekannt, $\sqrt[4]{\Delta'}=i\sqrt[4]{\Delta}$ ist; c ist demnach mit der von ω unabhängigen numerischen Grösse $\frac{-1}{\sqrt{n}}$ identisch.

Indem wir zusammenfassen, *sind für gerade n die erzeugenden Substitutionen der endlichen Gruppe $G_{n\varphi(2n)\psi(2n)}$* bez. $G_{\frac{n}{2}\varphi(4n)\psi(4n)}$ *der X_α-Substitutionen die beiden folgenden:*

$$(12)\qquad (S)\qquad X'_\alpha=\varepsilon^{\frac{n}{8}+\frac{\alpha^2}{8}}\cdot X_\alpha,$$

$$(13)\qquad (T)\qquad X'_\alpha=\frac{-1}{\sqrt{n}}\cdot\sum_{\beta=0}^{n-1}\varepsilon^{-\alpha\beta}X_\beta. \text{ —}$$

Man gehe nun nochmals auf die Zusatzfactoren $\varkappa$ der X_α zurück, um vermöge der gewonnenen Resultate die getroffene Auswahl der $\varkappa$ in ihrer vollen Bedeutung zu ermessen. Sowohl für gerades wie ungerades n sind die Substitutionscoefficienten der X_α-Gruppen vermöge dieser Auswahl der $\varkappa$ durchgehends numerische Grössen geworden. Wollten wir aber jetzt hinterher die X_α noch mit einem gemeinsamen Factor behaften, der als Function der ω_1, ω_2 natürlich eine algebraische Modulform sein müsste, und verlangen wir von den so modificierten X_α dasselbe einfache Verhalten (der rein numerischen Substitutionscoefficienten), so würde die zugesetzte Modulform sich bei allen Modulsubstitutionen bis auf numerische Factoren wiedererzeugen müssen. Dass

diese Factoren Einheitswurzeln sein müssen, folgert man leicht aus dem Begriff der algebraischen Modulformen. Im übrigen aber bemerke man, dass die X_α, wie wir sie früher normierten, für keinen im „Innern" der Halbebene gelegenen Quotienten $\omega_1 : \omega_2$ identisch, d. i. unabhängig von u, verschwinden. Um also Complicationen zu meiden, werden wir von der soeben hinzugesetzten Modulform gleichfalls verlangen, dass sie im Innern der Halbebene allenthalben von Null verschieden und selbstverständlich auch endlich ist. Die einzigen Modulformen, welche unseren Forderungen genügen, sind nun bekanntermassen $\sqrt[12]{\Delta}$ und deren ganze Potenzen. Der Zusatz einer ganzen Potenz von Δ selbst dürfte für die uns beschäftigenden Fragen zunächst als folgenlos bezeichnet werden. Der Zusatz einer nicht durch 12 teilbaren Potenz von $\sqrt[12]{\Delta}$ würde aber im Falle eines ungeraden n eine Erhöhung der Stufe nach sich ziehen*), was wir zunächst jedenfalls vermeiden wollen. Bei geraden n mag man ohne Erhöhung oder Erniedrigung der Stufe der X_α eine Potenz von $\sqrt{\Delta}$ hinzusetzen; doch scheint es auch hier (späterer Anwendungen wegen) zweckmässig, bei der einmal getroffenen Normierung der X_α zu bleiben.

§ 9. Rückbeziehung auf das vorige Kapitel. Fertige Gestalt der X_α-Gruppe für den Fall einer Primzahl $n = q$.

Ist n eine ungerade Zahl, so musste eine Modulsubstitution, welche X_λ bis auf einen Factor in sich transformiert, die Bedingung $\alpha \equiv 1$, $\gamma \equiv 0$ (mod. n) befriedigen, sofern nur $\lambda > 0$ war (cf. p. 280). Verlangen wir aber, dass X_λ bis auf einen Factor nicht gerade in sich, sondern überhaupt nur in eines der n X transformiert werden soll, so ist $\gamma \equiv 0$ (mod. n) die hinreichende und notwendige Bedingung (cf. (11) und (12) p. 280). In entsprechender Weise findet man bei den geraden n die Congruenz $\gamma \equiv 0$ (mod. $2n$) als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die X von Factoren abgesehen permutiert werden.

Diese Resultate lassen sich in prägnanter Weise aussprechen, wenn wir auf die geometrischen Vorstellungen der vorigen Kapitels zurückgreifen. *Im Sinne derselben können wir die einzelne X_α-Substitution:*

$$X'_\alpha = \sum_{\beta=0}^{n-1} c_{\alpha\beta} X_\beta,$$

---

*) Sofern nicht gerade n durch 3 teilbar ist und $\sqrt[3]{\Delta}$ zugesetzt wird.

wie wir sie in den voraufgehenden Paragraphen gewannen, als eine Transformation des singulären Coordinatensystems der Normalcurve C_n auffassen, wobei wir dann offenbar $n\varphi(n)\psi(n)$ bez. $n\varphi(2n)\psi(2n)$ oder endlich $\frac{n}{2}\varphi(4n)\psi(4n)$ mit einander gleichberechtigte singuläre Coordinatensysteme gewinnen. Die oben ausgesprochenen Sätze aber besagen alsdann: *Alle diese Coordinatensysteme bauen sich aus nur $\psi(n)$ bez. $\psi(2n)$ unterschiedenen Coordinatenpolyedern auf, je nachdem n ungerade oder gerade ist,* womit der oben (p. 252) für $n = 3$ direct gewonnene Satz verallgemeinert ist.

Andererseits könnten wir die Substitutionen (1) als eine Gruppe von Collineationen desjenigen Raumes R_{n-1} in sich interpretieren, in dem wir uns früher die Normalcurve C_n gelegen dachten. Hierbei würde man sagen müssen, *dass das einzelne Coordinatenpolyeder immer durch die $n\varphi(n)$ bez. $n\varphi(2n)$ oder $n\varphi(4n)$ Operationen einer gewissen in der Gesamtgruppe enthaltenen Untergruppe in sich übergeführt wird.* Die in Rede stehende Collineationsgruppe könnte man nun weiter mit den $2n^2$ Collineationen der Normalcurve C_n in sich zu einer umfassenderen Gruppe combinieren und würde solcherweise allgemein zu Verhältnissen gelangen, wie wir sie oben (p. 252 u. f.) für $n = 3$ ausführlich beschrieben haben*). Wir gehen auf dieselben hier nicht noch einmal besonders ein und verweisen auch betreffs der Beziehung dieser Gegenstände auf die früher (p. 2 u. f.) allgemein den elliptischen Functionen zu Grunde gelegten gruppentheoretischen Principien auf unsere Auseinandersetzungen über $n = 3$. Vielmehr bleiben wir hier einzig bei den Modulsubstitutionen und damit bei den in den voraufgegangenen Paragraphen gewonnenen Gruppen $G_{n\varphi(n)\psi(n)}$.

Für einige unter den mod. n bez. mod. $2n$ incongruenten Modulsubstitutionen können wir die Wirkung auf die X_α besonders leicht angeben. Es sind dies die Substitutionen:

$$\omega' \equiv \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega_2' \equiv \alpha^{-1}\omega_2 \quad (\text{mod. } n \text{ bez. } 2n),$$

bei denen, um es nochmals geometrisch auszusprechen, das Coordinatenpolyeder der X_α in sich selbst transformiert wird. Bei der bekannten

*) Dabei wäre es wohl zweckmässig, der geometrischen Betrachtung nicht die elliptische *Curve* zu Grunde zu legen, welche durch die Verhältnisse der X_α vorgestellt wird, insofern man allein das u als einen Parameter betrachtet, sondern gleich das *zweifach ausgedehnte Gebilde*, welches durch die Verhältnisse der X_α definiert wird, insofern wir in ihnen alle drei (homogen vorkommende) Grössen u, ω_1, ω_2 als Parameter ansehen. Dieses Gebilde geht dann durch die sämtlichen Operationen der im Texte genannten Gruppe in sich über. — Im Falle $n = 3$ fällt das in Rede stehende Gebilde schlechtweg mit der Ebene der X_α zusammen.

Wirkung der Substitution S (cf. Formel (15) p. 296 und (12) p. 299) werden wir nämlich alle diese X_α-Substitutionen leicht hinschreiben können, wenn wir angegeben haben, wie sich X_α bei Ausübung von

$$(2) \qquad \omega_1' \equiv a\omega_1, \quad \omega_2' \equiv a^{-1}\omega_2, \quad (\text{mod. } n \text{ bez. } 2n)$$

verhält, eine Operation, die wir für den Augenblick U nennen mögen*). Die Fälle ungerader n behandeln wir nun auf Grund der Darstellung (10) p. 279 für die X_α; wir sehen unmittelbar, dass der Substitution U die X_α-Substitution

$$(3) \qquad X_\alpha' = \pm X_{a\alpha}$$

entsprechen muss, wobei der möglicherweise eintretende Zeichenwechsel von den $\wp'$-Teilwerten in (10) p. 279 herrührt. In der That ist das noch unentschieden gelassene Vorzeichen in (3) identisch mit dem fraglichen Vorzeichen in der Formel:

$$(4) \qquad \prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \wp'_{0,a\mu} = \pm \prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \wp'_{0,\mu}.$$

Für gerades n gelangt man vermöge einiger Zwischenrechnungen auf Grund der Formeln von p. 287 gleichfalls wieder zur Gestalt (3) der X_α-Substitution U. Dass übrigens für die vorgelegte Modulsubstitution das Vorzeichen der rechten Seite von (3) unabhängig von α für alle n Grössen X_α dasselbe ist, schliesst man leicht aus früheren Formeln. Setzt man nämlich in $X_\alpha'(u) = k \cdot X_{a\alpha}(u)$ für u den Wert $u + \frac{a\omega_1}{n}$, so kommt unter Benutzung von (12) und (III) p. 263 u. f. nach kurzer Rechnung $X'_{\alpha-1} = kX_{a(\alpha-1)}$; man halte diesen Umstand für später fest.

Das fragliche Vorzeichen in (3) bez. (4) wollen wir jetzt nicht mehr allgemein, sondern nur in demjenigen Falle bestimmen, der von jeher unsere besondere Berücksichtigung verdient hat, nämlich für ungerade Primzahlen $n = q$. Für diesen Fall bemerke man, dass mit $\mu = 1, 2, \cdots, \frac{q-1}{2}$ auch $a\mu$ ein System von $\frac{q-1}{2}$ Zahlen durchläuft, von denen keine einer anderen, sowie auch keine einer negativ genommenen anderen modulo q congruent ist. Ist daher $e_\mu = +1$ oder $= -1$, je nachdem der absolut kleinste Rest von $a\mu$ modulo q positiv oder negativ ist, so werden die $\frac{q-1}{2}$ Zahlen $a\mu e_\mu$, modulo q reduciert,

*) Man wird die jetzige Substitution U kaum mit der im ersten Bande p. 58 u. f. so benannten Modulsubstitution verwechseln.

von der Reihenfolge abgesehen auf $1, 2, \cdots, \frac{q-1}{2}$ zurückkommen. Da überdies

$$\wp'_{0, a\mu} = e_\mu \wp'_{0, a\mu e_\mu}$$

ist, so ergiebt Formel (4):

$$(5) \qquad \prod_{\mu=1}^{\frac{q-1}{2}} e_\mu \cdot \wp'_{0, a\mu e_\mu} = \prod_{\mu=1}^{\frac{q-1}{2}} e_\mu \cdot \prod_{\mu=1}^{\frac{q-1}{2}} \wp'_{0,\mu} = \pm \prod_{\mu=1}^{\frac{q-1}{2}} \wp'_{0,\mu},$$

während andrerseits, wie wir eben sahen,

$$\prod_{\mu=1}^{\frac{q-1}{2}} a\mu e_\mu = a^{\frac{q-1}{2}} \prod_{\mu=1}^{\frac{q-1}{2}} \mu \cdot \prod_{\mu=1}^{\frac{q-1}{2}} e_\mu \equiv \prod_{\mu=1}^{\frac{q-1}{2}} \mu, \text{ (mod. } q),$$

$$\prod_{\mu=1}^{\frac{q-1}{2}} e_\mu \equiv a^{\frac{q-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{q}\right), \text{ (mod. } q)$$

ist, unter $\left(\frac{a}{q}\right)$ das Legendre'sche Zeichen verstanden. *Im Falle einer ungeraden Primzahl $n = q$ ist daher die Wirkung der Modulsubstitution U auf die X_α angegeben durch die Formel:*

$$(6) \qquad X_\alpha' = \left(\frac{a}{q}\right) X_{a\alpha}.$$

Wählen wir also, was zweckmässig ist, a als Primitivwurzel von q, so gilt in (3) für diesen Fall das untere Zeichen.

Bei der wohlbekannten Structur der zur homogenen Hauptcongruenzgruppe q^{ter} Stufe gehörenden endlichen $G_{q(q^2-1)}$ lässt sich jetzt die gesamte $G_{q(q^2-1)}$ der X_α-Substitutionen übersichtlich aufschreiben. Bereits in I p. 705 haben wir für $q = 7$ die gesamten incongruenten Substitutionen aus S, T, U in der hier in Betracht kommenden Weise hergestellt. Genau wie damals bilden wir jetzt:

$$(7) \quad S^\mu U^\nu, \quad S^\lambda T S^\mu U^\nu; \quad \lambda, \mu = 0, 1, \cdots, q-1; \quad \nu = 0, 1, \cdots, q-2$$

oder explicite geschrieben:

$$(8) \quad S^\mu U^\nu \equiv \begin{pmatrix} a^\nu, & \mu a^{-\nu} \\ 0, & a^{-\nu} \end{pmatrix}, \quad S^\lambda T S^\mu U^\nu \equiv \begin{pmatrix} a^\nu \lambda, & a^{-\nu}(\lambda\mu - 1) \\ a^\nu, & a^{-\nu}\mu \end{pmatrix}, \text{ (mod. } q)$$

und haben damit die gesamte Gruppe der mod. q incongruenten Substitutionen angegeben. *Dieser Aufzählung entsprechend findet man als fertige Gestalt der X_α-Gruppe für ein primzahliges $n = q$:*

$$(9) \quad (S^\mu U^\nu) \qquad X_\alpha' = (-1)^\nu \varepsilon^{-\mu\frac{\alpha(q-\alpha)}{2}} X_{a^\nu \alpha},$$

$$(10)\quad (S^\lambda T S^\mu U^\nu)\quad X_\alpha' = (-1)^\nu \cdot \frac{i^{\frac{q-1}{2}}}{\sqrt{q}} \sum_{\beta=0}^{q-1} \varepsilon^{-\alpha\beta - \lambda\frac{\alpha(q-\alpha)}{2} - \mu\frac{\beta(q-\beta)}{2}} X_{\nu\beta}.$$

Hierbei sind die unter (9) aufgeführten Substitutionen diejenigen, welche das singuläre Coordinatenpolyeder der X_α in sich transformieren.

§ 10. Excurs über die Summen von Gauss.

Aus den Überlegungen am Anfang des Kapitels wussten wir, dass die X_α-Substitutionen S und T durch Combination und Wiederholung nur zu einer endlichen Zahl unterschiedener neuer Substitutionen führen können. Mittlerweile haben wir die Coefficienten der X_α-Substitutionen S, T aus der Irrationalität $\sqrt{n}$ und Einheitswurzeln aufgebaut und müssten daraufhin auch äusserlich die Endlichkeit der X_α-Gruppe aus Eigenschaften dieser Substitutionscoefficienten einsehen können. Statt dessen dürfen wir aber auch die Sache gerade umkehren und aus der Endlichkeit der X_α-Gruppe Eigenschaften der Substitutionscoefficienten der X_α-Substitutionen folgern. Thatsächlich hat dieser Standpunkt Interesse; denn wir erhalten solchergestalt jene Relationen wieder, welche Gauss in der Theorie der Kreisteilung aufstellte, und die sich auf die sogenannten Gauss'schen Summen beziehen[*]. Die Kenntnis dieser Summen ist ohnedies für uns wünschenswert, und wir benutzen dieserhalb die vorliegende Gelegenheit, dieselben abzuleiten[**].

Indem wir zuvörderst n als eine beliebige *ungerade* Zahl voraussetzen, berechnen wir uns aus (15) und (16) p. 296 durch Combination die Wirkung der Substitution (ST) auf X_α. Die entspringende Formel wiederholen wir einmal und finden insbesondere für X_0:

$$(1)\qquad (STST)\qquad X_0' = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} \sum_{\beta=0}^{n-1} \left\{ X_\beta \cdot \sum_{\alpha=0}^{n-1} \varepsilon^{-\alpha\beta - \frac{\alpha(n-\alpha)}{2}} \right\}.$$

Nun ist $STST = TS^{-1}$, und also muss die Substitution (1) identisch sein mit der nachfolgenden:

$$(2)\qquad (TS^{-1})\qquad X_0' = \frac{i^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}} \sum_{\beta=0}^{n-1} X_\beta \cdot \varepsilon^{\frac{\beta(n-\beta)}{2}}.$$

---

[*] Man sehe die Originalschrift: *Summatio quarumdam serierum singularium*, Ges. Werke, Bd. 2 p. 9, sowie weiter Dirichlet-Dedekind, *Zahlentheorie*, Supplement 1.

[**] Die im Texte zu gebende Entwicklung der Gauss'schen Summen rührt vom Herausgeber her.

Setzen wir also z. B. die in (1) und (2) rechter Hand als Coefficienten von X_0 eintretenden Ausdrücke einander gleich, so folgt:

$$(3) \qquad (-i)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n} = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \varepsilon^{-\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}}.$$

Das einzelne Glied dieser Reihe ändert sich nicht, wenn wir α um ein Vielfaches von n ändern. Hiervon machen wir Gebrauch, indem wir $\alpha \equiv 2\alpha'$ substituieren und nun α' ein Restsystem mod. n durchlaufen lassen. Unterdrücken wir dann gleich wieder den oberen Index bei α' und schreiben statt des ε ausführlich seine Bedeutung, *so kommt als Gauss'sche Summenformel im Falle eines ungeraden n:*

$$(4) \qquad (-i)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n} = \sum_{\alpha=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi}{n}\cdot 2\alpha^2},$$

wobei $\sqrt{n}$ natürlich gerade wie in den X_α-Substitutionen *positiv* zu nehmen ist.

Ganz ähnlich verfahren wir im Falle einer beliebigen *geraden* Zahl n. Aus (12) und (13) p. 299 entspringt durch Combination als Substitution $(ST)^2$ für X_0:

$$(STST) \quad X_0' = \frac{1}{n}\,\varepsilon^{\frac{n}{4}} \sum_{\beta=0}^{n-1}\left(X_\beta \cdot \sum_{\alpha=0}^{n-1} \varepsilon^{-\alpha\beta+\frac{1}{2}\alpha^2}\right),$$

während man andrerseits für TS^{-1} die Gestalt findet:

$$(TS^{-1}) \qquad X_0' = \frac{-1}{\sqrt{n}}\,\varepsilon^{-\frac{n}{8}} \sum_{\beta=0}^{n-1} X_\beta\,\varepsilon^{-\frac{1}{2}\beta^2}.$$

Indem man hier wieder die beiden Coefficienten von X_0 rechter Hand identisch setzt, *entspringt als eine Gauss'sche Summenformel für gerades n die nachfolgende:*

$$(5) \qquad \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{n} = \sum_{\alpha=0}^{n-1} e^{\frac{\pi i}{n}\alpha^2}$$

oder in etwas anderer Gestalt:

$$(6) \qquad \sqrt{n} = e^{-\frac{\pi i}{4}} \sum_{\alpha=0}^{n-1} e^{\frac{\pi i}{n}\alpha^2}.$$

Offenbar können wir Formel (5) auch in die Form setzen:

$$\frac{1+i}{2}\sqrt{2n} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{2n-1} e^{\frac{2\pi i}{2n}\cdot\alpha^2}.$$

Schreiben wir hier statt $2n$ gleich wieder n, *so wird n eine beliebige durch 4 teilbare Zahl sein; für alle diese n gilt die Formel:*

$$(7) \qquad (1+i)\sqrt{n} = \sum_{\alpha=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi}{n}\alpha^2}.$$

Die Formel (4) pflegt man zunächst in einer etwas anderen Gestalt anzugeben. Schreiben wir im Anschluss an Dirichlet-Dedekind l. c.

$$(8) \qquad \varphi(p, n) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} e^{p\cdot\frac{2i\pi}{n}\cdot\alpha^2},$$

so ist es der Wert von $\varphi(2, n)$, welchen Formel (4) angiebt, wogegen man für gewöhnlich zunächst $\varphi(1, n)$ zu bestimmen pflegt. Wir wollen hier aber im Anschluss an diese Bemerkung unsere Entwicklung für die *ungeraden* n dahingehend etwas weiter ausdehnen, dass wir überhaupt den Wert von $\varphi(p, n)$ für irgend welches gegen n relativ prime p angeben wollen; in der That werden wir später die entstehenden Formeln nötig haben. Wir müssen dabei schrittweise verfahren, indem wir n erstlich als ungerade Primzahl q, sodann als Potenz q^ν einer ungeraden Primzahl q, endlich als beliebige ungerade Zahl annehmen. Zugleich müssen wir bei dieser Entwicklung noch neben dem gewöhnlichen Legendre'schen Zeichen das gleichfalls in der Theorie der quadratischen Reste gebrauchte Jacobi'sche Zeichen benutzen, an dessen Definition wir hier kurz erinnern. Ist die Zerlegung der ungeraden Zahl n in ihre Primfactoren durch

$$n = q \cdot q' \cdot q'' \cdots$$

gegeben, wo natürlich die $q, q', \ldots$ in beliebigen Reihen identisch sein dürfen, so schreiben wir mit Jacobi*):

$$(9) \qquad \left(\frac{p}{n}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q'}\right)\left(\frac{p}{q''}\right)\cdots,$$

p dabei in der bisherigen Bedeutung einer beliebigen gegen n primen Zahl gebraucht. Die Gesetze, welche für das Jacobi'sche Zeichen (9) gelten, sehe man in Dirichlet-Dedekind p. 104 u. f. der 3. Aufl. nach; wir merken insbesondere an:

$$(10) \qquad \left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}, \quad \left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}},$$

des weiteren aber die für *ungerades* p gültige Formel:

$$(11) \qquad \left(\frac{p}{n}\right)\left(\frac{n}{p}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}},$$

welche das verallgemeinerte Reciprocitätsgesetz zum Ausdruck bringt.

Nach dieser Zwischenbemerkung kehren wir zu unserer vorhin

*) Man sehe die Monatsberichte der Berliner Akademie von 1837.

aufgeworfenen Frage nach dem Werte von $\varphi(p, n)$ zurück und wählen n zuvörderst als ungerade *Primzahl* $n = q$. Hier besteht die Gleichung:

$$(12) \qquad \sum_{\alpha=0}^{q-1} e^{p \cdot \frac{2i\pi}{q}\alpha^2} = \left(\frac{p}{q}\right) \sum_{\alpha=0}^{q-1} e^{\frac{2i\pi}{q}\alpha^2},$$

wie man im Falle eines quadratischen Restes p von q unmittelbar sieht, während man bei einem Nichtreste p nur auf die Identität $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{q-1} = 0$ zu recurrieren braucht. Setzen wir $p = 2$, so folgt aus (12) und (4):

$$\varphi(2, q) = i^{\frac{q^2-1}{4}} \cdot \varphi(1, q) = (-i)^{\frac{q-1}{2}} \sqrt{q}.$$

Indem wir hieraus $\varphi(1, q)$ berechnen, dann aber gleich aufs neue (12) anwenden, entspringt das Resultat:

$$(13) \qquad \varphi(p, q) = \left(\frac{p}{q}\right) i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} \sqrt{q}.$$

Ist zweitens n *Primzahlpotenz* q^ν mit $\nu > 1$, so zerlegen wir die Reihe $\varphi(p, q^\nu)$ in zwei Teile, wie folgt:

$$\varphi(p, q^\nu) = \sum_\alpha e^{p \cdot \frac{2i\pi}{q^\nu}\alpha^2} + q \sum_{\beta=0}^{q^{\nu-2}-1} e^{p \cdot \frac{2i\pi}{q^{\nu-2}} \cdot \beta^2}.$$

Hierbei bezieht sich die Summe über α auf alle $q^{\nu-1}(q-1)$ modulo q^ν incongruenten und gegen q relativ primen Zahlen α. Die Zahlen $p\alpha^2$ durchlaufen dabei mod. q^ν zweimal das System derjenigen

$$\frac{1}{2} q^{\nu-1}(q-1)$$

Zahlen, die in Bezug auf q im quadratischen Charakter mit p übereinstimmen*). Eben dieserhalb kann die fragliche Summe bei wechselndem p nur zwei verschiedene Werte annehmen, deren einen wir erhalten, wenn wir für p einen Rest R von q einsetzen, während der andere für einen Nichtrest $p = N$ entspringt; überdies sieht man leicht, dass die beiden in Rede stehenden Werte nur im Zeichen unterschieden sind, ein Umstand, auf welchen wir sogleich zurückkommen. Vorab setzen wir die letzte Gleichung in die Gestalt:

$$(14) \qquad \varphi(p, q^\nu) = \sum_\alpha e^{p \cdot \frac{2i\pi}{q^\nu}\alpha^2} + q \cdot \varphi(p, q^{\nu-2})$$

und ziehen aus (13) den Schluss, dass $\varphi(p, q)$ bei wechselnden p auch nur die beiden Werte $\varphi(R, q)$ und $\varphi(N, q)$ annimmt, während $\varphi(p, 1)$ direct gleich 1 ist. Durch Recursion folgt jetzt aus (14): *Auch* $\varphi(p, q^\nu)$

*) Cf. Dirichlet-Dedekind, p. 81 u. f. der 3. Aufl.

nimmt bei jedem beliebigen ν den wechselnden Werten p gegenüber nur die zwei Werte $\varphi(R, q^\nu)$ und $\varphi(N, q^\nu)$ an.

Um diese Werte zu bestimmen, folgern wir aus (14) die neue Recursionsformel:

$$(15) \qquad \varphi(R, q^\nu) + \varphi(N, q^\nu) = q\,\{\varphi(R, q^{\nu-2}) + \varphi(N, q^{\nu-2})\}$$

und erinnern zugleich an:

$$\varphi(R, q) + \varphi(N, q) = 0, \qquad \varphi(R, 1) + \varphi(N, 1) = 2.$$

Hier ist also zu unterscheiden, ob ν gerade oder ungerade ist; schreiben wir demnach $\nu = 2\mu$ bez. $= 2\mu + 1$, so liefert (15):

$$(16) \qquad \varphi(R, q^{2\mu}) + \varphi(N, q^{2\mu}) = 2q^\mu,$$

$$(17) \qquad \varphi(R, q^{2\mu+1}) + \varphi(N, q^{2\mu+1}) = 0.$$

Da das Quadrat einer ungeraden Zahl mod. 8 mit 1 congruent ist, so folgt aus (4) als Wert von $\varphi(2, q^{2\mu})$ einfach q^μ, d. i. gerade die Hälfte der rechten Seite von (16). Man hat also aus (16) und (17) den Schluss zu ziehen:

$$\varphi(N, q^\nu) = (-1)^\nu \varphi(R, q^\nu),$$

wofür wir auch schreiben können:

$$\varphi(p, q^\nu) = \left(\frac{p}{q}\right)^\nu \varphi(1, q^\nu).$$

Kehren wir zur Bezeichnung $q^\nu = n$ zurück, so tritt jetzt rechter Hand das Jacobi'sche Zeichen ein:

$$(18) \qquad \varphi(p, n) = \left(\frac{p}{n}\right) \varphi(1, n).$$

Hier setze man endlich $p = 2$, benutze den aus (4) hervorgehenden Wert von $\varphi(2, n)$, sowie andrerseits die Formel (10). Es ergiebt sich daraufhin der Wert $\varphi(1, n)$, sowie dann weiter durch nochmalige Benutzung von (18) *die für Primzahlpotenzen n allgemein gültige Formel:*

$$(19) \qquad \varphi(p, n) = \left(\frac{p}{n}\right) i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \sqrt{n};$$

dieselbe begreift die Gleichung (13) als Specialfall in sich.

Die Sachlage ist nun die, *dass die Formel* (19) *überhaupt für beliebige ungerade Zahlen n in Gültigkeit bleibt.* Sind nämlich m und n ungerade, relative Primzahlen und p prim gegen mn, so wird die ganze Zahl γ gerade ein volles Restsystem mod. mn durchlaufen, wenn wir

$$\gamma = m\alpha + n\beta$$

setzen und α ein volles Restsystem mod. n, β aber ein solches mod. m durchlaufen lassen. Daraus folgt:

$$(20)\quad \varphi(p, mn) = \sum_{\alpha,\beta} e^{p \cdot \frac{2i\pi}{mn}(m^2\alpha^2 + n^2\beta^2)} = \sum_{\alpha} e^{mp \cdot \frac{2i\pi}{n}\alpha^2} \cdot \sum_{\beta} e^{np \cdot \frac{2i\pi}{m}\beta^2},$$

wofür wir auch schreiben können:

$$(21)\qquad \varphi(p, mn) = \varphi(mp, n) \cdot \varphi(np, m).$$

Man setze nun, dass (19) für unsere jetzigen m, n gültig sei; alsdann ist offenbar Formel (21) in anderer Gestalt geschrieben:

$$\varphi(p, mn) = \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{m-1}{2}\right)^2} \left(\frac{p}{mn}\right)\sqrt{mn}.$$

Wendet man hier endlich noch Formel (11) an, so folgt:

$$\varphi(p, mn) = \left(\frac{p}{mn}\right) i^{\left(\frac{mn-1}{2}\right)^2} \sqrt{mn},$$

womit unsere Behauptung der allgemeinen Gültigkeit von (19) für ungerade Zahlen n sich bestätigt hat.

Analoge Entwicklungen könnte man an die für gerade n gültigen Formeln (6) und (7) knüpfen; wir haben dies aber für unsere ferneren Zwecke nicht unbedingt nötig.

§ 11. Isomorphe Beziehung der X_α-Gruppe auf sich selbst bei Ersatz von ε durch ε^p.

Als eine erste Anwendung des eben beendeten Excurses über die Gauss'schen Summen entwickeln wir hier eine bemerkenswerte Art, die X_α-Gruppe holoedrisch isomorph auf sich selbst zu beziehen. Wir müssen zu dem Zweck wieder eine kleine arithmetische Betrachtung vorausschicken.

Die Coefficienten der X_α-Substitutionen enthielten an irrationalen Bestandteilen neben den n^{ten} Einheitswurzeln im Falle eines ungeraden n auch noch die Irrationalität $(-i)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}$, bei geradem n jedoch einfach $\sqrt{n}$. *Wir können diese beiden Irrationalitäten selbst wieder durch Einheitswurzeln ausdrücken.* Bei ungeradem n geschieht dies einfach durch Formel (4) des vorigen Paragraphen; bei geradem n könnten wir die Formel (6) brauchen, ziehen indessen einen indirecten Weg vor. Man nenne nämlich m den grössten ungeraden Teiler von n und schreibe $n = 2^\nu \cdot m$; man setze alsdann im Falle einer geraden Zahl ν:

$$(1)\qquad \sqrt{n} = 2^{\frac{\nu}{2}} \cdot i^{\frac{m-1}{2}} \cdot \left(i^{-\frac{m-1}{2}}\sqrt{m}\right),$$

dagegen für einen ungeraden Exponenten ν:

$$(2)\qquad \sqrt{n} = 2^{\frac{\nu-1}{2}} \cdot \left(e^{\frac{\pi i}{4}} + e^{-\frac{\pi i}{4}}\right) \cdot i^{\frac{m-1}{2}} \cdot \left(i^{-\frac{m-1}{2}}\sqrt{m}\right).$$

Da m ungerade ist, so können wir jedesmal die letzte Klammer in (1) und (2) durch m^{te} Einheitswurzeln ausdrücken; insgesamt ist also in (1) bez. (2) ein Ausdruck von $\sqrt{n}$ in n^{ten} bez. $4n^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln gewonnen, je nachdem n durch 4 teilbar oder das Doppelte einer ungeraden Zahl ist.

Führt man nun die für $(-i)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}$ bez. $\sqrt{n}$ angegebenen Ausdrücke in die X_α-Substitutionen ein, *so sind die Coefficienten dieser Substitutionen numerisch rational aus der Einheitswurzel* $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ *oder* $e^{\frac{2i\pi}{2n}}$ *oder* $e^{\frac{2i\pi}{4n}}$ *aufgebaut, je nachdem n ungerade oder durch 4 teilbar oder endlich das Doppelte einer ungeraden Zahl ist.* Man wolle jetzt für den Augenblick von der Bedeutung der X_α als Functionen von u, ω_1, ω_2 ganz absehen, fasse diese Grössen vielmehr nur als n Variabele auf, welche die charakteristischen, eine Gruppe bildenden Substitutionen mit numerischen Coefficienten erfahren. In diesen Substitutionen denken wir uns dann die gerade zu Grunde liegende Einheitswurzel $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ bez. $e^{\frac{2i\pi}{2n}}$, $e^{\frac{2i\pi}{4n}}$ durch irgend eine andere primitive Einheitswurzel $e^{p\cdot\frac{2i\pi}{n}}$ bez. $e^{p\cdot\frac{2i\pi}{2n}}$ etc. des gleichen Grades ersetzt, und man wird alsdann ohne weiteres aus der Irreducibilität der Kreisteilungsgleichung den Schluss ziehen, *dass die so entspringenden neuen X_α-Substitutionen wiederum eine Gruppe bilden, welche mit der ursprünglichen X_α-Gruppe holoedrisch isomorph ist**).

Um wenigstens die Erzeugenden dieser neuen X_α-Gruppe ausführlich anzugeben, werden wir die Irrationalität $(-i)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}$ bez. $\sqrt{n}$ doch nicht explicit durch ihren Ausdruck in Einheitswurzeln ersetzen wollen; wir untersuchen vielmehr gleich, wie sich die fragliche Irrationalität bei dem vorzunehmenden Ersatze der Einheitswurzel verhält. Für ungerades n geben die Entwicklungen des vorigen Paragraphen hier unmittelbar die Antwort, dass $(-i)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}$ bei Ersatz von $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ durch $e^{p\cdot\frac{2i\pi}{n}}$ den Factor $\left(\frac{p}{n}\right)$ bekommen muss; die Erzeugenden S, T der neuen Gruppe sind also für *ungerades n:*

*) Dieser Ersatz der Einheitswurzel in den Substitutionscoefficienten durch eine primitive Einheitswurzel desselben Grades wurde zuerst von Hrn. Kronecker verwandt, und zwar in der Theorie der Jacobi'schen Gleichungen; man sehe Kronecker's Mitteilungen über algebraische Arbeiten in den Berliner Monatsberichten von 1861.

$$(3)\begin{cases} (S) & X_\alpha' = \varepsilon^{-p\cdot\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}} X_\alpha, \\ (T) & X_\alpha' = \dfrac{i^{\frac{n-1}{2}}}{\left(\frac{p}{n}\right)\sqrt{n}} \sum\limits_{\beta=0}^{n-1} \varepsilon^{-p\cdot\alpha\beta} X_\beta. \end{cases}$$

Im Falle eines *geraden* n ist natürlich p ungerade, und hier müssen wir vorerst auf die Formeln (1) und (2) zurückgreifen. Um auf (1) einzugehen, so wird beim Ersatz von $e^{\frac{2i\pi}{2n}}$ durch $e^{p\cdot\frac{2i\pi}{2n}}$ offenbar $i^{\frac{m-1}{2}}$ den Factor $(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{m-1}{2}}$ bekommen, $(-i)^{\frac{m-1}{2}}\sqrt{m}$ aber den Factor $\left(\frac{p}{m}\right)$. Die Irrationalität $\sqrt{n}$ geht also in sich selbst, multipliciert mit

$$(4)\qquad (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{m-1}{2}}\left(\frac{p}{m}\right) = \left(\frac{m}{p}\right) = \left(\frac{n}{p}\right)$$

über, wobei man die in (4) vollzogene Umgestaltung dieses Factors sofort vermöge (11) p. 306 verificiert. Von (2) aus kommt man durch eine analoge Überlegung leicht zu dem gleichen Resultat und hat also als Erzeugende der neuen X_α-Gruppe im Falle eines geraden n:

$$(5)\begin{cases} (S) & X_\alpha' = \varepsilon^{p\cdot\left(\frac{n}{8}+\frac{\alpha^2}{2}\right)} X_\alpha, \\ (T) & X_\alpha' = \dfrac{-1}{\left(\frac{n}{p}\right)\sqrt{n}} \sum\limits_{\beta=0}^{n-1} \varepsilon^{-p\cdot\alpha\beta} X_\beta. \end{cases}$$

Es ist nun sehr bemerkenswert, dass die Substitutionen der neuen aus (3) bez. (5) entspringenden X_α-Gruppe in ihrer Gesamtheit von den Substitutionen der ursprünglichen Gruppe gar nicht verschieden sind; einzig die Anordnung ist eine andere geworden, *so dass wir hier gerade so viele isomorphe Beziehungen der X_α-Gruppe auf sich selbst kennen gelernt haben, als es mod. n bez. $2n$ oder $4n$ incongruente, gegen den Zahlmodul n bez. $2n$, $4n$ relativ prime Zahlen p giebt.* Die hierbei eintretende Frage aber ist, ob diese isomorphen Beziehungen der X_α-Gruppe auf sich selbst von der Art sind, wie wir sie in I (cf. p. 261) durch Transformation vermöge der Modulsubstitutionen herstellten; wir werden für diesen Fall hernach offenbar auch sagen können, dass die fragliche Beziehung der X_α-Gruppe auf sich selbst durch Transformation mit einer in dieser Gruppe selbst enthaltenen Substitution darstellbar ist. Um hierüber zu entscheiden, bemerke man, dass beim einzelnen p der Substitution S ihre p^{te} Potenz S^p zugeordnet ist. Die Transformation könnte also nur durch eine solche Modulsubstitution V geschehen sein,

die derselben Untergruppe $\Gamma_{\psi(n)}$ angehört, wie S*). Da überdies S natürlich mit sich selbst gleichberechtigt ist, so werden wir V als eine Modulsubstitution annehmen dürfen, die mod. n bez. (im Falle eines geraden n) mod. $2n$ mit

$$\omega_1' \equiv a\omega_1, \quad \omega_2' \equiv d\omega_2$$

congruent ist. Transformiert man jetzt die ursprüngliche Gruppe durch dieses V, so folgen aus (3) p. 302 nach leichter Zwischenrechnung als Erzeugende der transformierten Gruppe die Substitutionen (3) bez. (5), wenn wir uns in denselben d^2 an Stelle von p geschrieben denken. So haben wir das Resultat erhalten: *Nur wenn p mod. n mit einem Quadrate congruent ist, lässt sich die dem p zugehörige isomorphe Beziehung der X_α-Gruppe auf sich selbst durch Transformation vermöge einer ihrer eigenen Substitutionen herstellen.* Ist also im speciellen n eine Primzahl, so kann die Hälfte aller $(n-1)$ isomorphen Beziehungen in der hiermit gekennzeichneten Weise bewirkt werden. Erwähnen wir endlich noch als besonders einfache Eigenschaft der Primzahlen n der Form $4h+3$, dass für sie die noch rückständigen $\frac{n-1}{2}$ Beziehungen durch Transformation vermöge gewisser Modulsubstitutionen *zweiter* Art erzielt werden können**).

§ 12. Die Substitutionsgruppen der Modulformen z_α, y_α und die bei ungeradem n auftretenden biquadratischen Relationen der z_α.

Die einfachen gruppentheoretischen Eigenschaften der Functionen $X_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2)$, welche wir mittlerweile aufgefunden haben, liefern uns nun auch für die Modulsysteme z_α, y_α, x_α etc., die wir aus den X_α ableiteten, wichtige Eigenschaften. In der That entspringt ohne weiteres der für alles Folgende fundamentale Satz: *Jedes der fraglichen Systeme von Modulformen substituiert sich bei Ausübung einer beliebigen Modulsubstitution geschlossen linear mit numerischen Coefficienten.* Wir wollen diesen Satz für die einzelnen Modulsysteme specificieren, indem wir dabei insbesondere jedesmal die erzeugenden Substitutionen S und T der entspringenden Substitutionsgruppe namhaft machen.

Um wieder mit den *ungeraden* n zu beginnen, so hatten wir hier erstlich *das System der* $\frac{n-1}{2}$ *Modulformen* n^{ter} *Stufe* $z_\alpha(\omega_1, \omega_2)$ *von der Dimension* $\frac{3n-1}{2}$. Die Wirkung der Substitutionen S und T giebt

*) Man sehe die Entwicklungen in I p. 460 u. f.

**) Man vgl. hierüber I p. 445.

man vermöge der Gleichungen (13) p. 267 aus (15) und (16) p. 296 leicht an; wir finden:

$$(1)\qquad (S)\qquad z_\alpha' = \varepsilon^{-\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}} z_\alpha,$$

$$(2)\qquad (T)\qquad -\sqrt{n}\cdot z_\alpha' = i^{\frac{n-1}{2}} \sum_{\beta=1}^{\frac{n-1}{2}} (\varepsilon^{\alpha\beta} - \varepsilon^{-\alpha\beta}) z_\beta.$$

Daran reiht sich *das System der* $\frac{n+1}{2}$ *Modulformen* $y_0, y_1, \ldots, y_{\frac{n-1}{2}}$ *von der Dimension* $\frac{3n-3}{2}$. Ihr Verhalten gegenüber S und T ist gegeben durch:

$$(3)\qquad (S)\qquad y_\alpha' = \varepsilon^{-\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}} y_\alpha,$$

$$(4)\qquad (T)\quad \sqrt{n}\cdot y_\alpha' = i^{\frac{n-1}{2}} \left(y_0 + \sum_{\beta=1}^{\frac{n-1}{2}} (\varepsilon^{\alpha\beta} + \varepsilon^{-\alpha\beta}) y_\beta \right).$$

Es ist hier weiter die Frage, ob die aus (1), (2) bez. (3), (4) entspringende Gruppe linearer z_α- bez. y_α-Substitutionen auf die X_α-Gruppe holoedrisch oder meroedrisch isomorph bezogen ist. Soll letzteres der Fall sein, so muss in der $G_{n\varphi\psi}$ der modulo n incongruenten homogenen Modulsubstitutionen eine ausgezeichnete Untergruppe enthalten sein, deren Substitutionen sämtliche z_α bez. y_α unverändert lassen. Es folgt aber aus der Eigenart der X_α (vgl. insbesondere (II) p. 264 und (3) p. 267) leicht, dass diese ausgezeichnete Untergruppe nur aus den Substitutionen T^2 und 1 bestehen kann, und gegenüber T^2 zeigen die z_α, y_α das nachfolgende Verhalten:

$$(T^2)\qquad z_\alpha' = (-1)^{\frac{n+1}{2}} z_\alpha,\quad y_\alpha' = (-1)^{\frac{n-1}{2}} y_\alpha,$$

wie aus ihrer Dimension ohne weiteres folgt. Darin liegt das Resultat: *Ist n eine ungerade Zahl der Form $n = 4h + 1$, so ist die z_α-Gruppe von der Ordnung $n\varphi(n)\psi(n)$, die y_α-Gruppe aber von der Ordnung $\frac{1}{2}n\varphi(n)\psi(n)$; ist $n = 4h - 1$, so haben wir umgekehrt eine $G_{\frac{1}{2}n\varphi\psi}$ von z_α-Substitutionen und eine $G_{n\varphi\psi}$ von y_α-Substitutionen.* Dass die hier wiederholt auftretende $G_{\frac{1}{2}n\varphi\psi}$ mit der Gruppe modulo n unterschiedener nicht-homogener Modulsubstitutionen holoedrisch isomorph ist, brauchen wir kaum noch zu betonen.

Für die Modulformen x_α, w_α etc. kommen abwechselnd immer wieder dieselben Verhältnisse zu Tage, wie bei z_α und y_α. Wir brauchen demnach hier, sowie auch sogleich bei geradem n, die soeben aus-

gesprochenen Sätze nicht nochmals für die x_α etc. besonders zu formulieren. —

Bei *geradem n* kennen wir erstlich *das System der* $\frac{n+2}{2}$ *Modulformen* $(-2)^{\text{ter}}$ *Dimension* $z_0, z_1, \ldots, z_{\frac{n}{2}}$ *der Stufe* $2n$ *bez.* $4n$ und schreiben aus (12) und (13) p. 299 unter Rücksichtnahme auf (15) p. 267 als Wirkung der Substitutionen S, T auf dieselben ab:

$$(5)\quad (S)\qquad z_\alpha' = \varepsilon^{\frac{n}{8}+\frac{\alpha^2}{2}} z_\alpha,$$

$$(6)\quad (T)\qquad -\sqrt{n}\cdot z_\alpha' = z_0 + (-1)^\alpha z_{\frac{n}{2}} + \sum_{\beta=1}^{\frac{n-2}{2}} (\varepsilon^{\alpha\beta} + \varepsilon^{-\alpha\beta})\, z_\beta .$$

Daran reiht sich *das System der* $\frac{n-2}{2}$ *Grössen* $y_1, y_2, \ldots, y_{\frac{n-2}{2}}$ *der Dimension* -3 *und der Stufe* $2n$ *bez.* $4n$, für welche wir entsprechend das Verhalten finden:

$$(7)\quad (S)\qquad y_\alpha' = \varepsilon^{\frac{n}{8}+\frac{\alpha^2}{2}} y_\alpha,$$

$$(8)\quad (T)\qquad \sqrt{n}\cdot y_\alpha' = \sum_{\beta=1}^{\frac{n-2}{2}} (\varepsilon^{\alpha\beta} - \varepsilon^{-\alpha\beta})\, y_\beta .$$

Hier ist die z_α*-Gruppe stets hemiedrisch, die* y_α*-Gruppe aber holoedrisch isomorph auf die Gruppe der* X_α*-Substitutionen bezogen.* —

Unter unseren beiden Arten von Modulsystemen z_α, y_α sind es namentlich die z_α-Systeme, welche sich durch ausserordentlich einfache Eigenschaften auszeichnen; wir werden das bei unseren späteren Untersuchungen noch wiederholt erfahren. Dieser Umstand ist wohl namentlich darin begründet, *dass die* z_α *im Innern des Polygons* n^{ter} *Stufe nicht nur allenthalben endlich sondern auch von Null verschieden sind,* wie aus ihrer Darstellung durch die ϑ-Functionen (cf. Formel (2) p. 281 und (2) p. 290) ohne weiteres hervorgeht. Hierüber hinaus ziehen wir gleich noch für die zu den *ungeraden n* gehörenden z_α ein wichtiges Ergebnis aus den in (5) p. 268 aufgestellten quadratischen Relationen zwischen den $X_\alpha(u)$. *Indem wir nämlich in den hiermit citierten Formeln* $u=0$ *schreiben, ergeben sich biquadratische Relationen, durch welche die* z_α *der ungeraden n an einander geknüpft sind; die allgemeine Gestalt dieser Relationen ist:*

$$(9)\qquad z_{\alpha_1+\alpha_2} z_{\alpha_3+\alpha_4} z_{\alpha_2-\alpha_1} z_{\alpha_4-\alpha_3} + z_{\alpha_1+\alpha_3} z_{\alpha_2+\alpha_4} z_{\alpha_3-\alpha_1} z_{\alpha_2-\alpha_4} + z_{\alpha_1+\alpha_4} z_{\alpha_2+\alpha_3} z_{\alpha_4-\alpha_1} z_{\alpha_3-\alpha_2} = 0.$$

Wir werden später wiederholt auf diese Formel zurückkommen und werden in ihr insbesondere für $n = 7$ eben jene biquadratische Gleichung wiedererhalten, durch welche wir in I die bei der siebenten Stufe ausführlich untersuchte Curve 4[ter] Ordnung der z_α darstellten (cf. I p. 701).

Man könnte nunmehr wieder ganz unabhängig von der functionentheoretischen Bedeutung der z_α, y_α an die Gestalt der Substitutionen, welche die einzelnen Grössensysteme erleiden, ein Reihe von Betrachtungen knüpfen; wir könnten z. B. das in obigen Formeln auftretende ε wieder durch ε^p ersetzen etc. Wir unterlassen das hier und fügen nur noch ein paar historische Bemerkungen hinzu. Natürlich tritt keine einzige dieser Gruppen als solche in expliciter Gestalt in den älteren Arbeiten auf, da früher der Gruppenbegriff nicht herrschte. Gleichwohl ist zu betonen, dass für die Gruppe der $\frac{n+1}{2}$ Grössen bei ungeradem n bereits in Jacobi'schen Entwicklungen alle Ansätze beisammen sind; man sehe die *„suite des notices sur les fonctions elliptiques"* von 1828*), wo Jacobi $\frac{n+1}{2}$ Grössen $A_0, A_1, \ldots, A_{\frac{n-1}{2}}$ angiebt, aus denen sich die Wurzeln der Multiplicatorgleichung in einfachster Weise zusammensetzen**); aus den bezüglichen Formeln Jacobi's würde man unsere y_α-Substitutionen der Gestalt nach ohne weiteres entwickeln können***). Dem gegenüber ist die z_α-Gruppe, in welcher die *Differenzen* $(\varepsilon^\nu - \varepsilon^{-\nu})$ den Typus für die Substitutionscoefficienten abgeben, erst durch Hrn. Klein aufgefunden worden. Man bemerke in der That, *dass wir hier für $n = 5$ einfach mit den Ikosaedersubstitutionen zu thun haben* (cf. I p. 631 (10)), *dass wir andrerseits für $n = 7$ direct auf jene ternären Substitutionen zurückkommen, welche die in* I *untersuchten drei Moduln z_α der 7[ten] Stufe erfahren* (cf. I p. 705). Es sind dies die beiden Fälle der in Rede stehenden Substitutionsgruppe der z_α, die sich zuerst dargeboten haben. Dass es aber möglich sei, die Formeln der z_α-Substitutionen, wie sie von diesen beiden particulären Fällen her bekannt waren, für beliebige ungerade n zu verallgemeinern (wo alsdann die Gruppe (1), (2) entsprang) wurde von Hrn. Klein im Verlaufe der Abhandlung *„Über die Auflösung gewisser Gleichungen vom 7[ten] und 8[ten] Grade"* Math. Ann. Bd. 15 (1879) angegeben. Das Substitutions-

---

*) Werke Bd. 1 p. 255 u. f.

**) Man sehe für $n = 5$ die Entwicklungen in I p. 645, für $n = 7$ aber I p. 723.

***) Vgl. auch die verschiedenen Ausführungen über „Jacobi'sche Gleichungen" in Ikos. p. 147, 149, 212.

system der X_α und damit die Zusammengehörigkeit der Substitutionsgruppen der $\frac{n+1}{2}$ und $\frac{n-1}{2}$ Grössen ergab sich alsdann aus der Theorie der Normalcurven. Endlich konnten die bei geradem n eintretenden z_α- und y_α-Gruppen aus den bezüglichen Entwicklungen von Hrn. Hurwitz*) unmittelbar abgeleitet werden.

Die Frage, welche sich an die durchlaufenen Entwicklungen unmittelbar anschliesst, ist nun, wie sich die jetzt auf analytischem Wege (nämlich aus ihren Reihenentwicklungen) definierten Moduln z_α, y_α, sowie dann auch weiter die x_α etc. in den niedersten Fällen n zu den in I Abschnitt 3 studierten Modulformen dieser Stufenzahlen n verhalten mögen. Inzwischen schieben wir diese Untersuchung hinaus; denn, obschon namentlich die z_α überall Modulformen von besonderer Einfachheit sind, so giebt es doch noch andere sehr einfache und demnach besonders wichtige Moduln n^{ter} Stufe, deren Kenntnis wir uns jetzt vorab verschaffen wollen.

*) Man sehe die p. 260 genannte Abhandlung.

Drittes Kapitel.

Bildung neuer Functionen n^{ter} Stufe durch bilineare Verbindungen der X_α.

Die von den elliptischen Normalcurven gelieferten Functionen X_α haben wir in erster Linie deshalb betrachtet, um aus ihnen Modulformen z_α, y_α etc. von einfachem gruppentheoretischen Verhalten abzuleiten. Wir werden jetzt neue Functionen n^{ter} Stufe von u, ω_1, ω_2 bilden, aus denen wir dann hernach in genau entsprechender Weise Modulformen n^{ter} Stufe herstellen. Diese neuen Functionen und Modulformen n^{ter} Stufe werden sich in gruppentheoretischer Beziehung aufs directeste an die Grössen des vorigen Kapitels anschliessen, wie denn überhaupt betont sein mag, dass die X_α-Gruppe in ihrer allgemeinen Gestalt von § 11 des vorigen Kapitels, sowie im Anschluss daran die viererlei verschiedenen Gruppengestalten von § 12 ebenda hinfort die fundamentalste Rolle spielen werden.

Was die Herstellungsart unserer neuen Functionen angeht, so werden wir dabei nicht etwa aufs neue fremde Hülfsmittel heranholen: die Functionen X_α sind es vielmehr selbst, welche in eigenartigen *bilinearen* Verbindungen die fraglichen Functionen liefern. Wir werden diese bilinearen Ausdrücke sogleich (in § 1) an ein paar einfachsten Beispielen erläutern, um danach die allgemeine Bildungsweise derselben vorzubringen. Die für diese Entwicklungen in Betracht kommenden Litteraturnachweise werden wir zwischendurch namhaft machen. Wir bemerken jedoch gleich zum voraus, dass die bisherigen X_α und deshalb auch die z_α, y_α etc. sich ungezwungen selbst wieder in den Kreis der neuen Grössen einordnen; es handelt sich also im Grunde nur um eine Erweiterung der bisherigen Resultate.

Ein anderer Gesichtspunkt kommt hinzu: Die *analytischen Darstellungen* der X_α, z_α, y_α etc., wie sie durch die Formeln des vorigen Kapitels gegeben werden, sind noch nicht in solchem Grade durchgebildet, dass sie die einfachste erreichbare Structur aufwiesen. Es ist vielmehr erst in diesem Kapitel, wo wir für die gesamten zu be-

trachtenden Grössen n^{ter} Stufe äusserst durchsichtige analytische Bildungsgesetze angeben werden, welche in einer merkwürdigen Beziehung zu den *ganzzahligen binären quadratischen Formen* stehen. Es muss jedoch sogleich gesagt werden, dass diese Beziehung zu den binären quadratischen Formen wesentlich mitbegründet ist durch den particulären Entwicklungsgang, den unsere Darstellung nimmt. In der That würden uns *trilineare* X_α-Verbindungen in ganz gleicher Weise zu *ternären* quadratischen Formen hinführen u. s. w., wie wir denn auch eine einzelne ϑ-Reihe mit den „*unären*" quadratischen Formen in Beziehung setzen können.

Die allgemeine Frage nach analytischen Bildungsgesetzen der Modulformen ist übrigens noch in mehreren anderen Arten der Behandlung zugänglich, und wir mögen hier die Gelegenheit benutzen, einige historische Bemerkungen in dieser Richtung einzuschalten.

Vor allen Dingen: Während wir hier stets mit Potenzreihen nach r arbeiten, könnte man auch für die Moduln höherer Stufen solche Entwicklungen nach Teilbruchreihen anstreben, wie wir sie in I p. 151 für g_2 und g_3 angaben. Wir würden uns so denjenigen Massnahmen annähern, welche Hr. Poincaré*) ganz allgemein in der Theorie der automorphen Functionen zur Verwendung bringt. Der Grundgedanke dieser Entwicklungen, etwa für unsere Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe $\Gamma_{\mu(n)}$ ausgesprochen, ist der folgende: Man wähle eine rationale Form $F(\omega_1, \omega_2)$ und bilde, allen unendlich vielen Substitutionen $1, v_1, v_2, \ldots$ der $\Gamma_{\mu(n)}$ entsprechend, die Ausdrücke $F(\omega_1, \omega_2)$, $F(v_1(\omega_1, \omega_2))$, $F(v_2(\omega_1, \omega_2))$, ... Haben wir $F(\omega_1, \omega_2)$ so auswählen können, dass die Summe aller dieser Ausdrücke eine absolut convergente Reihe darstellt, die überdies als Function von ω_1, ω_2 nicht identisch verschwindet, so wird uns diese Reihe eine Modulform n^{ter} Stufe darstellen. — Diesen Ansatz, der für die allgemeine Theorie der automorphen Functionen von grösster Bedeutung ist, insofern man noch kein anderes durchgreifendes Bildungsgesetz für dieselben besitzt, konnten wir in unserem Falle umgehen, da uns die Theorie der doppeltperiodischen Functionen durchgebildete Hülfsmittel ohne weiteres zur Verfügung stellte. Wir würden eben, um Formeln zu haben, mit denen man bequem rechnen kann, bei allgemeinen Stufenzahlen mit den Poincaré'schen Reihen immer erst noch diejenige Umwandlung in Potenzreihen nach r vornehmen müssen, welche Hr. Hurwitz für die erste Stufe an den speciellen Eisenstein'schen Reihen wirklich vollzogen hat**).

---

*) Man sehe die bez. Nachweise in I p. 762.

**) Man vgl. den ersten Teil der in I wiederholt genannten Arbeit von Hrn. Hurwitz in Bd. 18 der Mathem. Ann. (1881).

Ferner aber: ist es uns auf irgend welche Weise gelungen, Modulformen n^{ter} Stufe zu bilden, so gelingt es leicht, aus ihnen solche Grössen zusammenzusetzen, welche bei den Substitutionen der ω_1, ω_2 ihrerseits die Substitutionen der X_α (oder verwandte Substitutionen) erleiden. Es geschieht dies durch ein einfaches combinatorisches Princip, welches Hr. Klein in Bd. 15 der Math. Ann. (1879) aufstellt*), und von dem dann auch Hr. Poincaré bei seinen allgemeineren Untersuchungen Gebrauch macht**); man hat bei Anwendung desselben nur zuzusehen, dass die entstehenden Ausdrücke nicht identisch verschwinden. Den hiermit bezeichneten Ansatz hat bezüglich der X_α und verwandter Grössensysteme Hr. Morera in Bd. 25 der Math. Ann. verfolgt (1884), indem er als Ausgangsformen n^{ter} Stufe die Teilwerte irgendwelcher doppeltperiodischer Functionen wählt***). Inzwischen scheint es, dass einige der von ihm aufgebauten Ausdrücke identisch verschwinden; jedenfalls ist die Sache noch nicht so weit entwickelt, dass von hier aus der directe Übergang zu unseren X_α etc. möglich wäre.

Die mannigfachen Entwicklungen endlich, durch welche Hr. Kronecker neuerdings†) die Theorie der Modulfunctionen bereichert hat, können wir leider nur nennen. Dieselben stehen allerdings in unmittelbarster Beziehung zu unserer Gesamtauffassung; indessen würde eine ausführliche Besprechung zu weit von unseren zunächst vorliegenden Zielen ablenken.

§ 1. Die zwei- und drei-gliedrigen Bilinearverbindungen B_α der X_α.

Da wir weiterhin immer mit den X_α verschiedener Ordnungen n zu thun haben, so ist es notwendig, das n mit in die Bezeichnung der Function X_α aufzunehmen; wir wollen in diesem Sinne des genaueren $X_\alpha^{(n)}$ schreiben, so oft es zur Unterscheidung wünschenswert ist.

Wir verstehen jetzt zunächst unter n eine beliebige *ungerade* Zahl und ziehen die zwei Grössen $X^{(2)}$, sowie andrerseits die $2n$ Functionen $X^{(2n)}$ heran. Wir bilden uns dann den folgenden zweigliedrigen Aus-

*) *Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen siebenten und achten Grades.*

**) Acta Mathematica. Bd. 5.

***) *Über einige Bildungsgesetze in der Theorie der Teilung und Transformation der elliptischen Functionen.*

†) Man sehe insbesondere die neueren Bände der Monatsberichte der Berliner Akademie (seit 1885), in welchen Hr. Kronecker die gemeinten Untersuchungen in einer grossen Reihe kleinerer Mitteilungen entwickelt hat, die immer den gleichen Titel „*Zur Theorie der elliptischen Functionen*“ tragen.

druck, der in jeder dieser beiden Grössenreihen linear und homogen ist:

(1) $$X_0^{(2)} X_{2\alpha}^{(2n)} + X_1^{(2)} X_{2\alpha+n}^{(2n)}.$$

Um an das Wort Bilinearverbindung zu erinnern, bezeichnen wir diesen Ausdruck kurz durch B_α, des genaueren aber (und zum Unterschiede von weiterhin eintretenden Bildungen ähnlicher Art) durch $B_\alpha^{(2,n)}$. Als Argumente ω_1, ω_2 der Grössenreihe $X^{(2n)}$ denken wir die nämlichen, wie in $X^{(2)}$. Dagegen ist wünschenswert, das Argument u in der einen unserer beiden X_α-Reihen nicht sogleich mit dem Argumente u in den Grössen des anderen Systems identisch zu setzen. Indem B_α solchergestalt eine Function der *vier* Grössen u_1, u_2, ω_1, ω_2 wird, behalten wir uns eine etwas grössere Beweglichkeit für unsere analytischen Massnahmen vor. Wir können jetzt z. B. gleich u_1 für sich gleich Null setzen und legen also für die nähere Untersuchung die Grössen vor:

(2) $$B_\alpha = z_0 X_{2\alpha}^{(2n)} + z_1 X_{2\alpha+n}^{(2n)},$$

wo z_0 und z_1 die beiden zu $n = 2$ gehörenden Moduln des vorigen Kapitels sind.

Man überzeuge sich erstlich, *dass es gerade n unterschiedene Grössen B_α giebt;* denn indem wir den unteren Index in (2) um n vermehren, wird nach Formel (I) p. 264 die Grösse B_α unverändert bleiben.

Wir untersuchen demnächst, welches Verhalten die n Grössen B_α bei der Ausübung der Modulsubstitution T zeigen. Die Grössen z_0, z_1 substituieren sich hierbei in der folgenden Art:

$$-\sqrt{2}\, z_0' = z_0 + z_1, \quad -\sqrt{2}\, z_1' = z_0 - z_1,$$

während man das Verhalten der $X^{(2n)}$ aus der Formel (13) p. 299 abzuschreiben hat, indem man in derselben $2n$ an Stelle von n setzt. Es geht demgemäss B_α durch T über in

$$B_\alpha' = \frac{1}{2\sqrt{n}} \left\{ (z_0 + z_1) \sum_{\beta=0}^{2n-1} \varepsilon^{-\alpha\beta} X_\beta^{(2n)} + (z_0 - z_1) \sum_{\beta=0}^{2n-1} (-1)^\beta \varepsilon^{-\alpha\beta} X_\beta^{(2n)} \right\},$$

wobei ε die gewohnte Bedeutung von $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ hat. Da aber n ungerade ist, so zieht sich die rechte Seite der letzten Gleichung sofort zusammen in

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\beta=0}^{n-1} \varepsilon^{-2\alpha\beta} (z_0 X_{2\beta}^{(2n)} + z_1 X_{2\beta+n}^{(2n)}),$$

und damit folgt das Ergebnis:

(3) (T) $$B_\alpha' = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\beta=0}^{n-1} \varepsilon^{-2\alpha\beta} B_\beta.$$

Bei Ausübung von S zeigen unsere Grössen z, X das Verhalten:

$$z_0' = e^{\frac{\pi i}{4}} z_0, \quad z_1' = e^{\frac{3\pi i}{4}} z_1, \quad X_\alpha'^{(2n)} = e^{\frac{\pi i}{4} + \frac{\pi i \alpha^2}{2n}} \cdot X_\alpha^{(2n)} \ldots$$

Man findet also als Wirkung von S auf die B_α:

$$(4) \qquad B_\alpha' = i\varepsilon^{\alpha^2} \cdot z_0 X_{2\alpha}^{(2n)} + i^{-n} \varepsilon^{\alpha^2} z_1 X_{2\alpha+n}^{(2n)}.$$

Es wird sich demgemäss B_α bis auf einen Factor reproducieren, wenn wir über die ungerade Zahl n jetzt noch die fernere Voraussetzung machen, dass sie von der Form $(4h+3)$ ist; in der That wird nun

$$(5) \qquad (S) \qquad B_\alpha' = i\varepsilon^{\alpha^2} B_\alpha.$$

Schon jetzt ist deutlich, dass sich das System der B_α gegenüber allen Modulsubstitutionen geschlossen linear substituiert. *Wir kommen aber geradezu zur X_α-Gruppe aus § 11 des vorigen Kap., und zwar zur Gruppe mit $p=2$ zurück, wenn wir die B_α noch mit dem Factor $\Delta^{-\frac{1}{4}}$ normieren;* Potenzen der zwölften Wurzel aus Δ werden wir ja den Moduln eines einzelnen Systems immer zusetzen dürfen, ohne die wesentliche Eigenschaft eines solchen Systems (sich geschlossen linear zu substituieren) dadurch zu stören. Zum Beleg der ausgesprochenen Behauptung nenne man die normierten B_α etwa $\overline{B}_\alpha$, eine Bezeichnung, die wir in der Folge bei ähnlichen Gelegenheiten immer wieder verwenden wollen. Es findet sich alsdann mit Rücksicht auf I p. 624 (4):

$$(6) \begin{cases} (S) \qquad \overline{B}_\alpha' = \varepsilon^{\alpha^2} \overline{B}_\alpha. \\ (T) \qquad \overline{B}_\alpha' = -\dfrac{i}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{\beta=0}^{n-1} \varepsilon^{-2\alpha\beta} \overline{B}_\beta; \end{cases}$$

das sind aber in der That die Substitutionen (3) p. 311 für $n = 4h+3$ und $p=2$. Fassen wir demnach zusammen: *Für alle ungeraden Zahlen n der Gestalt $n = 4h+3$ erfahren die mit $\Delta^{-\frac{1}{4}}$ normierten Bilinearverbindungen:*

$$(7) \qquad \overline{B}_\alpha^{(2,n)} = B_\alpha^{(2,n)} \cdot \Delta^{-\frac{1}{4}}$$

die X_α-Substitutionen mit $p=2$.

Wir versuchen nun, ähnliche Entwicklungen mit *drei*gliedrigen X_α-Verbindungen anzustellen. Zu diesem Ende nehmen wir n *prim gegen* 3 an und bilden uns genau nach Analogie von (1) den Ausdruck:

$$(8) \qquad X_0^{(3)} X_{3\alpha}^{(3n)} + X_1^{(3)} X_{3\alpha+n}^{(3n)} + X_2^{(3)} X_{3\alpha+2n}^{(3n)},$$

wobei wir jedoch gleich wieder das Argument u_1 der ersten Grössenreihe $X_\alpha^{(3)}$ gleich Null setzen. Dann werden, wie wir wissen (p. 267), $X_1^{(3)}$ und $-X_2^{(3)}$ einander gleich, und zwar gleich der einen, für $n=3$

auftretenden Grösse z_1, während X_0 einfach verschwindet. Es gilt also, die Ausdrücke:

(9) $$B_\alpha = z_1\,(X_{3\alpha+n}^{(3n)} - X_{3\alpha-n}^{(3n)})$$

der näheren Untersuchung zu unterziehen, *als deren Anzahl man sogleich wieder n abzählt.*

Die Formeln (1), (2) p. 313 nehmen für den vorliegenden Fall die einfache Gestalt an:

(10) $$(S)\quad z_1' = \varrho^2 z_1, \qquad (T)\quad z_1' = z_1,$$

woran wir weiter unten noch ausführlicher zu knüpfen haben. Einstweilen benutzen wir diese Formeln, um das Verhalten der n Grössen (9) bei S und T festzustellen und beginnen wieder mit der letzteren Substitution. Wir mögen zur Abkürzung den numerischen Factor, welcher in den X_α-Substitutionen T, nämlich in (16) p. 296 und (13) p. 299, rechter Hand vor dem Summenzeichen steht, durch (n) bezeichnen; dann findet man für T:

$$B_\alpha' = (3n)\cdot z_1 \cdot \sum_{\beta=0}^{3n-1}\left(e^{-\frac{2i\pi}{3n}(3\alpha+n)\beta}X_\beta^{(3n)} - e^{-\frac{2i\pi}{3n}(3\alpha-n)\beta}X_\beta^{(3n)}\right),$$

was sich sofort zusammenziehen lässt in:

$$B_\alpha' = -(3n)\,z_1\cdot\sum_{\beta=0}^{3n-1}(\varrho^\beta - \varrho^{-\beta})\cdot\varepsilon^{-\alpha\beta}X_\beta^{(3n)}.$$

Alle Glieder mit durch 3 teilbarem β werden hier verschwinden; die zurückbleibenden $2n$ Glieder teilen wir in zwei Classen, je nachdem $\beta \equiv +1$ oder $\equiv -1$ (mod. 3) ist. Wir bewirken dies dadurch, dass wir einmal $3\beta + n$, dann aber $3\beta - n$ an Stelle von β setzen und β hierbei immer ein Restsystem mod. n durchlaufen lassen. Nehmen wir endlich noch auf die offenbar gültige Gleichung:

(11) $$\varrho^n - \varrho^{-n} = \left(\frac{n}{3}\right)\cdot i\sqrt{3}$$

Rücksicht, so wird die letzte Gleichung übergehen in:

(12) $$B_\alpha' = -\left(\frac{n}{3}\right)i\sqrt{3}\cdot(3n)\sum_{\beta=0}^{n-1}\varepsilon^{-3\alpha\beta}\cdot z_1\,(X_{3\beta+n}^{(3n)} - X_{3\beta-n}^{(3n)}).$$

Damit ist das Ergebnis gewonnen, dass die in (9) definierten B_α bei Ausübung von T die Substitution erfahren:

(13) $$B_\alpha' = -\left(\frac{n}{3}\right)i\sqrt{3}\cdot(3n)\cdot\sum_{\beta=0}^{n-1}\varepsilon^{-3\alpha\beta}B_\beta.$$

Weiter setze man nun erstlich n als eine *ungerade* Zahl voraus; dann ist:

$$(3n) = \frac{i^{\frac{3n-1}{2}}}{\sqrt{3n}} \text{ und also } -\left(\frac{n}{3}\right) i\sqrt{3}\cdot(3n) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n}{3}\right)\cdot\frac{i^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}},$$

so dass wir mit Rücksicht auf die Formel (11) p. 306 die Substitution (13) in die fertige Gestalt umzusetzen haben:

$$(14) \qquad (T) \qquad B_\alpha' = \frac{i^{\frac{n-1}{2}}}{\left(\frac{3}{n}\right)\sqrt{n}}\cdot\sum_{\beta=0}^{n-1}\varepsilon^{-3\alpha\beta}B_\beta.$$

Um gleich die Wirkung der Substitution S auf die B_α im Falle eines ungeraden n festzustellen, haben wir obige Formel (10) sowie andrerseits Formel (15) p. 296 zu benutzen. Eine leichte Zwischenrechnung ergiebt alsdann:

$$B_\alpha' = \varrho^{2-n}\cdot\varepsilon^{-3\cdot\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}}B_\alpha.$$

Um zu den X_α-Substitutionen und damit zu Grössen n^{ter} Stufe zurück zu gelangen, werden wir hier nötigenfalls mit $\sqrt[3]{\Delta}$ normieren; wir schreiben mit Rücksicht auf I p. 624 (3):

$$(15) \qquad \left.\begin{array}{ll} \bar{B}_\alpha = B_\alpha\Delta^{-\frac{1}{3}} & \text{für } n\equiv 1 \\ \bar{B}_\alpha = B_\alpha & \text{für } n\equiv 2 \end{array}\right\} \pmod{3}.$$

Die somit normierten dreigliedrigen Bilinearverbindungen $\bar{B}_\alpha^{(3,n)}$ *erfahren die* X_α-*Substitutionen mit* $p = 3$ *und bilden als solche ein System von* n *Functionen* n^{ter} *Stufe.*

Man specificiere zweitens Formel (13) für *gerade* n. Da wird

$$-\left(\frac{n}{3}\right)\cdot i\sqrt{3}\cdot(3n) = -i\cdot\frac{-1}{\left(\frac{n}{3}\right)\sqrt{n}},$$

während man andrerseits für die Wirkung von S auf B_α leicht berechnet:

$$(S) \qquad B_\alpha' = -i\cdot\varrho^{2-n}\cdot\varepsilon^{3\left(\frac{n}{8}+\frac{\alpha^2}{2}\right)}B_\alpha.$$

Zu den Formeln (5) p. 311 wird man somit zurückgelangen, wenn man folgende Normierungen vornimmt:

$$(16) \qquad \left.\begin{array}{ll} \bar{B}_\alpha = B_\alpha\Delta^{-\frac{1}{12}} & \text{für } n\equiv 1 \\ \bar{B}_\alpha = B_\alpha\Delta^{\frac{1}{4}} & \text{für } n\equiv 2 \end{array}\right\} \pmod{3}.$$

Die n *solchergestalt gebildeten Grössen* $\bar{B}_\alpha$ *erfahren dann wieder gegenüber den Modulsubstitutionen die* X_α-*Substitutionen ihres* n *mit* $p = 3$.

Das Grössensystem (15), welches sich auf die ungeraden, durch

3 nicht teilbaren Zahlen n bezieht, wurde wesentlich in der hier vorliegenden Gestalt von Hrn. Klein in den „Normalcurven“ (man sehe Formel (126) in § 15) eingeführt. Es gelang durch diese n Grössen die Verallgemeinerung jener Modulsysteme, welche wir in I bei $n = 5$ und $n = 7$ durch A bezeichneten, und welche uns seinerzeit die gestaltlich sehr einfachen Resolventen der A lieferten. Wir kommen sogleich weiter unten auf diese Gegenstände nochmals zurück. Vorab haben wir auseinander zu setzen, in welcher Weise durch Hrn. Hurwitz die in diesem Paragraphen skizzierten Entwicklungen verallgemeinert sind*).

§ 2. Die drei Arten I, II, III von p-gliedrigen Bilinearverbindungen $B_\alpha^{(p,n)}$ der X_α.

Bei der Verallgemeinerung der bisherigen Überlegung schlagen wir ein Analogieverfahren ein. Wir verstehen unter p *irgend eine gegen die Ordnung n relativ prime Zahl* und schliessen die im vorigen Paragraphen behandelten Werte $p = 2, 3$, sowie endlich auch den Wert $p = 1$ gar nicht aus. Wir holen uns dann die beiden Grössensysteme:

$$X_\alpha^{(p)}(u_1 \mid \omega_1, \omega_2), \quad X_\beta^{(np)}(u_2 \mid \omega_1, \omega_2) \tag{1}$$

heran und bilden aus ihnen mit Hrn. Hurwitz**) den bilinearen Ausdruck:

$$B_\alpha^{(p,n)} = \sum_{\lambda=0}^{p-1} X_\lambda^{(p)} X_{p\alpha+nq\lambda}^{(np)}. \tag{2}$$

Derselbe geht für $p = 2$, $q = 1$, sowie für $p = 3$, $q = 1$ in die Ausdrücke (1) und (8) des vorigen Paragraphen über; im allgemeinen Falle behalten wir uns noch vor, über die ganze Zahl q zweckmässig zu verfügen. Da man aus (I) p. 264 sofort $B_{n+\alpha} = B_\alpha$ folgert, *so ist die Gesamtzahl unterschiedener Grössen* (2) *gerade wieder n.*

---

*) Man kann übrigens die bilinearen Verbindungen der X_α, um die es sich hier handelt, auch aus dem allgemeinen combinatorischen Ansatz des Hrn. Klein erhalten, von welchem in der Einleitung zum vorliegenden Kapitel kurz die Rede war. So thut es Hr. Hurwitz in seiner ursprünglichen Darstellung, indem er von der Thatsache ausgeht, dass die Substitutionsgruppen der $X_\alpha^{(3)}$, $X_\alpha^{(n)}$, $X_\alpha^{(3n)}$ durch ihre Beziehung auf die Modulgruppe isomorph auf einander bezogen sind. Inzwischen wird hierdurch die wirkliche Berechnung der in Betracht kommenden Bilinearformen in keiner Weise vereinfacht, und wir lassen es also im Texte bei der directen Aufsuchung von Bilinearformen bewenden.

**) *„Über endliche Gruppen linearer Substitutionen, welche in der Theorie der elliptischen Transcendenten auftreten“*, Math. Ann. Bd. 27 (1885).

Wir gehen nun gleich zur gruppentheoretischen Untersuchung der Grössen (2), und es erledigt sich hier die Substitution T fast ebenso leicht, wie in den particulären Betrachtungen des § 1. Man hat nach (16) p. 296 bez. (13) p. 299:

$$B_\alpha' = (p)(np) \sum_{\lambda=0}^{p-1} \sum_{\nu=0}^{p-1} \sum_{\mu=0}^{np-1} e^{-\frac{2i\pi}{p}\lambda\nu - \frac{2i\pi}{np}(p\alpha + nq\lambda)\mu} X_\nu^{(p)} X_\mu^{(np)},$$

eine Formel, die man bei etwas anderer Anordnung ihrer rechten Seite sofort in die Gestalt setzt:

$$B_\alpha' = (p)(np) \sum_{\mu,\nu} \left\{ \varepsilon^{-\alpha\mu} X_\nu^{(p)} X_\mu^{(np)} \cdot \sum_{\lambda=0}^{p-1} e^{-\frac{2i\pi}{p}(\mu q + \nu)\lambda} \right\}.$$

Alle diejenigen Glieder der Summe über μ, ν, für welche $\mu q + \nu$ nicht $\equiv 0 \pmod{p}$ ist, werden infolge der in diesem Falle verschwindenden Summe über λ zum Ausfall kommen; ist jedoch $\mu q + \nu \equiv 0 \pmod{p}$, so ist die Summe über λ einfach gleich p. Also das Resultat:

$$B_\alpha' = p \cdot (p)(np) \sum_{\mu=0}^{np-1} \varepsilon^{-\alpha\mu} X_{-\mu q}^{(p)} X_\mu^{(np)}. \tag{3}$$

Nun wird offenbar μ ein volles Restsystem mod. np durchlaufen, falls wir $\mu = p\beta + n\gamma$ schreiben und β ein Restsystem mod. n, γ aber ein solches mod. p durchlaufen lassen. Substituieren wir aber den so gemeinten Wert von μ in (3), so kommt:

$$B_\alpha' = p \cdot (p)(np) \sum_{\beta=0}^{n-1} \left(\varepsilon^{-p\cdot\alpha\beta} \sum_{\gamma=0}^{p-1} X_{-nq\gamma}^{(p)} X_{p\beta+n\gamma}^{(np)} \right).$$

Nun ist es zweckmässig, die ganze Zahl q prim gegen p anzunehmen; dann nämlich wird mit γ auch $\lambda = -nq\gamma$ ein Restsystem mod. p durchlaufen. Hierbei ist die mod. p zu λ gehörende Zahl γ

$$\gamma \equiv -\lambda \cdot (nq)^{-1} \pmod{p}, \tag{4}$$

so dass sich die letzte Gleichung in die neue Gestalt setzt:

$$B_\alpha' = p \cdot (p)(np) \sum_{\beta=0}^{n-1} \left(\varepsilon^{-p\cdot\alpha\beta} \cdot \sum_{\lambda=0}^{p-1} X_\lambda^{(p)} X_{p\beta - n\lambda\cdot(nq)^{-1}}^{(np)} \right).$$

Der Vergleich mit (2) zeigt, dass die Summe über λ in der letzten Formel direct $B_\beta^{(p,n)}$ darstellt, *sofern wir uns jetzt entschliessen, für* q *eine der Congruenz:*

$$nq^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p} \tag{5}$$

genügende ganze Zahl zu wählen. Daraufhin liefert in der That die letzte Formel das vorläufige Resultat:

$$(6) \qquad (T) \qquad B_\alpha' = p\cdot(p)(np)\sum_{\beta=0}^{n-1}\varepsilon^{-p\alpha\beta}B_\beta.$$

Die Bedingung (5), an welche wir fortan die Zahl q gebunden denken, hat zur Folge, dass unsere allgemeine Erörterung den Fall $p=3$, wie wir ihn im vorigen Paragraphen behandelten, noch nicht im vollen Umfange umfasst; es ist nämlich für $q=1$, $p=3$ zufolge (5) n als eine Zahl der Gestalt $n=3h+2$ vorausgesetzt, eine Annahme, die dem vorigen Paragraphen nicht zu Grunde lag. Man bemerkt leicht als Ursache für die grössere Tragweite unserer damaligen Entwicklung, dass wir das Argument u_1 der $X^{(3)}$ von vornherein mit Null identisch setzten. Dagegen sind die für den Fall $p=2$ im vorigen Paragraphen erzielten Resultate im vollen Umfange in den jetzigen allgemeinen Entwicklungen einbegriffen; man halte diese Sachlage für die späteren Anwendungen fest.

Sollen wir jetzt gleich in der Discussion des allgemeinen Ansatzes (2) weitergehen, so haben wir hierbei drei Fälle zu unterscheiden, welche genau den drei verschiedenartigen Bilinearverbindungen (9), (15), (16) des vorigen Paragraphen entsprechen. Als Verallgemeinerung von (9) § 1 betrachten wir die $B_\alpha^{(p,n)}$ von *gerader Gliederanzahl* und als Verallgemeinerungen von (15), (16) § 1 die $B_\alpha^{(p,n)}$ von *ungerader Gliederzahl,* bei denen n *bez. ungerade oder gerade* ist; wir bezeichnen diese Fälle in der Folge mit I, II, III.

Sei jetzt zunächst:

I. $p\equiv 0$ (*mod.* 2), $n\equiv 1$ (*mod.* 2).

Unter dieser Voraussetzung ist für die Wirkung von S auf die einzelnen Glieder von B_α die Formel (12) p. 299 zu benutzen. Ihrzufolge geht das einzelne dieser Glieder in sich selbst multipliciert mit:

$$(7) \qquad e^{\frac{2\pi i}{p}\left(\frac{p}{8}+\frac{\lambda^2}{2}\right)+\frac{2i\pi}{np}\left(\frac{np}{8}+\frac{(p\alpha+nq\lambda)^2}{2}\right)} = i\cdot\varepsilon^{p\cdot\frac{\alpha^2}{2}}\cdot e^{\frac{\lambda^2\pi i}{p}(1+nq^2)}$$

über. Dieser Factor wird aber nur dann von λ unabhängig sein, wenn wir an Stelle von (5) noch genauer schreiben:

$$(8) \qquad nq^2+1\equiv 0 \pmod{2p}.$$

Setzen wir also voraus, *dass im Falle eines geraden p die Zahl q dieser Bedingung gemäss gewählt ist,* was insbesondere zur Folge hat, *dass n eine ungerade Zahl der Gestalt $n=4h+3$ sein muss.* Indem weiter der numerische Factor auf der rechten Seite von (6) für unseren vorliegen-

den Fall einfach $\frac{1}{\sqrt{n}}$ giebt, haben wir zusammenfassend:

$$(9)\quad \begin{cases} (S) & B_\alpha' = i \cdot \varepsilon^{-p \cdot \frac{\alpha(n-\alpha)}{2}} B_\alpha, \\ (T) & B_\alpha' = i \cdot \dfrac{i^{\frac{n-1}{2}}}{\left(\frac{p}{n}\right)\sqrt{n}} \sum_{\beta=0}^{n-1} \varepsilon^{-p \cdot \alpha\beta} B_\beta. \end{cases}$$

Den Factor auf der rechten Seite der ersten Gleichung wird man unmittelbar bestätigt finden; für den Factor auf der rechten Seite der Substitution T müssen wir offenbar zeigen, dass

$$(10)\qquad \left(\frac{p}{n}\right) = i^{\frac{n+1}{2}}$$

ist, und dies geschieht in folgender Art: Man verstehe unter t den grössten ungeraden Teiler von p und schreibe $p = 2^\nu t$. Da nach (8) offenbar $-n$ quadratischer Rest von t ist, so folgt unter Benutzung von (11) p. 306:

$$1 = \left(\frac{-n}{t}\right) = (-1)^{\frac{t-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2}} \left(\frac{t}{n}\right) = \left(\frac{t}{n}\right);$$

daraus ergiebt sich weiter unter Rücksicht auf (10) p. 306

$$(11)\qquad \left(\frac{p}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^\nu = (-1)^{\nu \cdot \frac{n^2-1}{8}}.$$

Ist jetzt $\nu > 1$, so folgt aus (8) $n = 8h + 7$, so dass sich (10) unmittelbar aus (11) bestätigt; zu dem gleichen Resultat gelangt man leicht auch im Falle $\nu = 1$.

Zur Fortschaffung der Factoren i auf den rechten Seiten von (9) normiere man jetzt noch mit dem reciproken Werte von $\sqrt[4]{\Delta}$; man findet so das Endergebnis: *Für eine ungerade Zahl n der Gestalt $n = 4h + 3$ bilden die normierten Bilinearverbindungen:*

$$(12)\qquad \bar{B}_\alpha = B_\alpha \cdot \Delta^{-\frac{1}{4}}$$

der geraden Gliederanzahl p ein System von n Grössen, das bei Ausübung der Modulsubstitutionen die X_α-Substitutionen (3) *p.* 311 *für $p = p$ erfährt.*

II. $p \equiv 1$ (*mod.* 2), $n \equiv 1$ (*mod.* 2).

Für das Verhalten der einzelnen Glieder von B_α hat man im vorliegenden Falle II aus (15) p. 296 das Ergebnis, dass $X_\lambda^{(p)} X_{p\alpha+nq\lambda}^{(np)}$ bei Ausübung von S den Factor annimmt:

$$e^{\frac{\pi i}{p}(\lambda^2 - \lambda p) + \frac{\pi i}{np}((p\alpha + n\lambda q)^2 - np(p\alpha + n\lambda q))} = \varepsilon^{-p \cdot \frac{\alpha(n-\alpha)}{2}},$$

wie man unter Rücksicht auf (5) leicht feststellt; der auftretende Factor ist also, wie man sieht, von λ unabhängig. Andrerseits liefert der numerische Factor vor dem Summenzeichen (6) den Wert:

$$p\cdot(p)(np) = p\cdot\frac{i^{\frac{p-1}{2}}}{\sqrt{p}}\cdot\frac{i^{\frac{np-1}{2}}}{\sqrt{np}} = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}}\cdot\frac{i^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

Aus (5) folgt aber unter Rücksicht auf das verallgemeinerte Reciprocitätsgesetz (11) p. 306:

$$1 = \left(\frac{-n}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\cdot(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}\left(\frac{p}{n}\right).$$

Benutzen wir dies, *so folgt als Verhalten der B_α bei S und T:*

$$(13)\begin{cases} (S) \qquad B_\alpha' = \varepsilon^{-p\cdot\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}}B_\alpha, \\ (T) \qquad B_\alpha' = \dfrac{i^{\frac{n-1}{2}}}{\left(\frac{p}{n}\right)\sqrt{n}}\cdot\sum_{\beta=0}\varepsilon^{-p\cdot\alpha\beta}B_\beta. \end{cases}$$

Die zum Falle II *gehörenden B_α erfahren demnach ohne weitere Normierung die X_α-Substitutionen* (3) *p.* 311 *für $p = p$.*

III. $p\equiv 1$ (*mod.* 2), $n\equiv 0$ (*mod.* 2).

Nun sind beide Formeln (15) p. 296 und (12) p. 299 bei Untersuchung der Substitution S zu berücksichtigen. Man wird die Rechnung, deren Resultat wir in Formel (14) angeben, leicht nach dem Muster der voraufgehenden Entwicklungen erledigen. Der Specialwert von $p\cdot(p)(np)$ im gegenwärtigen Falle ist:

$$p\cdot(p)(np) = -p\cdot\frac{i^{\frac{p-1}{2}}}{\sqrt{p}}\cdot\frac{1}{\sqrt{np}} = i^{\frac{p-1}{2}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{n}},$$

und weiter bestätigt man leicht:

$$1 = \left(\frac{-n}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{n}{p}\right), \qquad (-1)^{\frac{p-1}{2}} = \left(\frac{n}{p}\right).$$

Als Verhalten der B_α bei S und T ergiebt sich solchergestalt:

$$(14)\begin{cases} (S) \qquad B_\alpha' = (-i)^{\frac{p-1}{2}}\cdot\varepsilon^{p\left(\frac{n}{8}+\frac{\alpha^2}{2}\right)}B_\alpha, \\ (T) \qquad B_\alpha' = (-i)^{\frac{p-1}{2}}\dfrac{-1}{\left(\frac{n}{p}\right)\sqrt{n}}\cdot\sum_{\beta=0}^{n-1}\varepsilon^{-p\cdot\alpha\beta}B_\beta. \end{cases}$$

Um zu Grössen n^{ter} Stufe zurückzugelangen, ist demnach Normierung mit $\sqrt{\Delta}$ am Platze; *wir werden hier schreiben:*

$$(15) \qquad \bar{B}_\alpha = B_\alpha \cdot \Delta^{\frac{p-1}{8}};$$

die so normierten $\bar{B}_\alpha$ erfahren in der That wieder genau die X_α-Substitutionen (5) *p.* 311 mit $p = p$. —

Es sind hiermit alle die Grössen, um welche es sich im vorliegenden Kapitel überhaupt handelt, in ihrem gruppentheoretischen Verhalten vollständig charakterisiert. Wir werden nun analytische Darstellungen unserer Grössensysteme studieren, und zwar beginnen wir dabei mit den dreigliedrigen Verbindungen des vorigen Paragraphen, um hernach in gleicher Weise die allgemeinen, jetzt gebildeten Systeme der $B_\alpha^{(p,n)}$ zu behandeln. Führen wir hier gleich vorläufig ein Hauptergebnis dieser neuen Untersuchungen an: Zuvörderst haben wir (den wechselnden Werten von p entsprechend) bei jedem einzelnen n unendlich viele Grössensysteme $B_\alpha^{(p,n)}$ gebildet: *es wird sich zeigen, dass alle diese, beim Einzelwert n eintretenden Systeme nur auf eine* e n d l i c h e, *mit arithmetischen Mitteln wohlzuumgrenzende Anzahl unterschiedener Functionensysteme zurückkommen.* —

§ 3. Analytische Entwicklungen für die Modulformen A_α bei ungeradem gegen 3 primen n.

Des leichteren Überblicks wegen beschreiben wir die weiterhin im Laufe dieses Kapitels immer wieder zur Verwendung kommenden Massnahmen zuvörderst an einem speciellen Beispiel und wählen hierzu die bei *ungeradem n und* $p = 3$ eintretenden B_α, weil dieses Grössensystem besonders wichtig ist. Dabei mögen wir hier die Entwicklung von vornherein insofern particularisieren, dass wir auch u_2, das erste Argument in den $X^{(3n)}$, mit Null identisch setzen*). Die für $u_2 = 0$ aus den normierten Bilinearverbindungen $B_\alpha^{(3,n)}$ entspringenden Modulfunctionen n^{ter} Stufe mögen wir durch A_α bezeichnen, wobei wir uns natürlich vorbehalten, die A_α des einzelnen Systems, falls es

*) Nebenher merken wir uns wenigstens für $n = 1$ die Darstellung der einen hier eintretenden Function $B(u \mid \omega_1, \omega_2)$ an; abgesehen von numerischen Factoren, sowie Wurzeln aus Δ, erhalten wir aus (3) p. 277 leicht die Reihenentwicklung:

$$\sqrt{\frac{6\pi}{\omega_2}} \cdot e^{\frac{3\eta_2}{2\omega_2}u^2} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m r^{\frac{(6m+1)^2}{24}} \cos(6m+1)\frac{\pi u}{\omega_2}.$$

Hr. Kiepert hat diese Reihe zuerst aufgestellt und wiederholt zum Ausgangspunkt ausgedehnter Untersuchungen gemacht; man vergl. Crelle's Journal Bd. 87 p. 213 (1879) oder auch Math. Ann. Bd. 26 p. 408 (1885), man sehe auch „Normalcurven" § 19.

zweckmässig erscheint, noch mit einer numerischen Grösse oder auch mit einer Potenz von Δ als Factor zu normieren.

Die Werte der noch nicht normierten $B_\alpha^{(3,n)}$ für $u_2 = 0$ sind:

$$(1) \qquad g_1^{(3)}\left(g_{n+3\alpha}^{(3n)} + g_{n-3\alpha}^{(3n)}\right);$$

es ist demgemäss $A_{-\alpha} = A_\alpha$, *und die* A_α *bilden ein System von* $\frac{n+1}{2}$ *Moduln* n^{ter} *Stufe.* Die A_α-Substitutionen werden somit die Gestalt der unter (3) und (4) p. 313 mitgeteilten y_α-Substitutionen haben, nur dass wir hier natürlich den Wert 3 der Zahl p zu berücksichtigen haben. Um also die Erzeugenden der A_α-Gruppe nochmals ausführlich anzugeben, so ist:

$$(2) \quad \begin{cases} (S) \qquad A_\alpha' = \varepsilon^{-3\cdot\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}} A_\alpha, \\ (T) \quad \left(\frac{3}{n}\right) A_\alpha' = \frac{i^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}} \left(A_0 + \sum_{\beta=1}^{\frac{n-1}{2}} (\varepsilon^{3\alpha\beta} + \varepsilon^{-3\alpha\beta}) A_\beta\right). \end{cases}$$

Vorläufig sei bemerkt, dass wir hier für $n = 5$ und $n = 7$ gerade zu den Substitutionen (4) in I p. 644 bez. (10) in I p. 725 zurückkommen, wenn wir nur $2A_0$ für A_0 in (2) eintragen; mag diese Bemerkung einstweilen den Gebrauch der Bezeichnung A_α rechtfertigen.

Wir gehen nun zu unserem eigentlichen Ziele, analytische Darstellungen für die A_α zu entwickeln, müssen jedoch gleich eine allgemeine Bemerkung zur Regelung der Bezeichnungsweise vorausschicken. Die wesentlichsten Bestandteile in den Darstellungen (2) p. 277 und p. 287 der X_α sind eine ϑ-Reihe und eine ungerade Potenz von $\sqrt[8]{\Delta}$, Bestandteile, die nur erst in ihrem Producte X_α Grössen n^{ter} Stufe geben, während jeder einzelne für sich genommen überhaupt nicht eindeutig in den Perioden ω_1, ω_2 ist. Nun handelt sich's aber bei unseren $B_\alpha^{(p,n)}$ immer um quadratische Verbindungen der X_α, in deren analytischem Ausdruck somit nur noch Potenzen von $\sqrt[4]{\Delta}$ vorkommen. Diese können wir aber, ohne aus dem Bereich *eindeutiger* Modulformen hinauszugehen, fortlassen und erhalten dann infolge des Ausdrucks der rechten Seite von (2) p. 277 bez. 287, von unwesentlichen Bestandteilen abgesehen, *für* (1) *das Product zweier ϑ-Reihen mit* ω_2^{-1} *multipliciert. Auf diese Grössen* $(-1)^{\text{ter}}$ *Dimension sollen unsere analytischen Darstellungen immer abzielen,* was sich als zweckmässig erweisen wird. Dieselben sind dann allerdings der n^{ten} Stufe, allgemein zu reden, nur erst adjungiert, indem sie erst wieder durch Normierung mit einer ganzen Potenz von $\sqrt[4]{\Delta}$, gelegentlich auch von $\sqrt[12]{\Delta}$, in Grössen der n^{ten} Stufe

selbst übergehen; welches aber diese Potenz ist, wird im Einzelfalle unmittelbar evident, wenn wir nur ein einzelnes Glied einer zugehörigen Reihenentwicklung in Bezug auf den Exponenten von r betrachten.

Für den ersten Factor des Ausdrucks (1) liefert (3) p. 281 die Reihe:

$$z_1^{(3)} = i\,\Delta^{-\frac{3}{8}} \cdot \sqrt{\frac{6\pi}{\omega_2}} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^m r^{\frac{(6m+1)^2}{24}}.$$

Hier können wir aber offenbar auch $(6m-1)$ im Zähler des Exponenten von r schreiben. Lässt man also η alle ganzen Zahlen der Gestalt $(6m \pm 1)$ durchlaufen, worauf alsdann

$$6m = \eta - \left(\frac{\eta}{3}\right), \quad (-1)^m = (-1)^{\frac{1}{2}\left[\eta - \left(\frac{\eta}{3}\right)\right]}$$

wird, so entspringt für $z_1^{(3)}$ die Darstellung:

$$(3) \quad z_1^{(3)}\Delta^{\frac{3}{8}} = \frac{i\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}} \sum (-1)^{\frac{1}{2}\left[\eta - \left(\frac{\eta}{3}\right)\right]} \cdot r^{\frac{\eta^2}{24}}, \quad \eta \equiv \pm 1 \pmod{6},$$

wobei η alle ganzen (positiven und negativen) Zahlen zu durchlaufen hat, die mod. 6 der schon in (3) angemerkten Bedingungen genügen.

Für das in der Klammer von (1) stehende Binom liefert (3) p. 281 die Darstellung:

$$i\,\Delta^{\frac{3n}{8}} \cdot \left(z_{n+3\alpha}^{(3n)} + z_{n-3\alpha}^{(3n)}\right) =$$
$$= \sqrt{\frac{6n\pi}{\omega_2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+\alpha} \left\{ r^{\frac{((6m+1)n-6\alpha)^2}{24n}} + r^{\frac{((6m-1)n-6\alpha)^2}{24n}} \right\}.$$

In ähnlicher Weise wie vorhin schreiben wir nun zur Abkürzung ξ für $(6m \pm 1)n - 6\alpha$, so dass ξ alle ganzen, den Bedingungen

$$(4) \qquad \xi \equiv \pm 1 \pmod{6}, \quad \xi \equiv -6\alpha \pmod{n}$$

genügenden Zahlen zu durchlaufen hat. Es wird aber

$$m + \alpha \equiv \frac{\xi \mp n}{2} \equiv \frac{\xi - n\left(\frac{\xi}{3}\right)}{2}, \pmod{2},$$

was man leicht noch überführt in die Gestalt:

$$m + \alpha \equiv \frac{1}{2}\left[\xi - \left(\frac{\xi}{3}\right)\right] + \frac{n-1}{2}, \pmod{2}.$$

Die letzte Gleichung nimmt daraufhin die übersichtliche Gestalt an:

$$(5) \left(\frac{-1}{n}\right) \cdot \frac{i}{\sqrt{3n}}\Delta^{\frac{3n}{8}} \cdot \left(z_{n+3\alpha}^{(3n)} + z_{n-3\alpha}^{(3n)}\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}} \sum (-1)^{\frac{1}{2}\left[\xi - \left(\frac{\xi}{3}\right)\right]} \cdot r^{\frac{\xi^2}{24n}},$$

wobei ξ den Congruenzen (4) unterworfen ist.

Bei der Gestalt von (3) und (5) multiplicieren wir, um Grössen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension zu erhalten, die $\frac{n+1}{2}$ Ausdrücke (1) mit dem Factor:

$$-\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{3\sqrt{n}}(\sqrt[3]{\Delta})^{3\cdot\frac{n+1}{2}}.$$

Die so entspringenden $\frac{n+1}{2}$ Moduln $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension mögen gleich selbst wieder A_α heissen, wobei wir ihnen gegenüber die zu Moduln n^{ter} Stufe normierten Grössen (1) auch wohl durch $\bar{A}_\alpha$ bezeichnen. Mit Rücksicht auf

$$(-1)^{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\xi}{3}\right)+\left(\frac{\eta}{3}\right)\right]} = -\left(\frac{\xi\eta}{3}\right)$$

folgt aus (3) und (5):

$$A_\alpha = \frac{\pi}{\omega_2}\sum_{\xi,\eta}(-1)^{\frac{\xi+\eta}{2}}\left(\frac{\xi\eta}{3}\right)r^{\frac{\xi^2+n\eta^2}{24n}}. \tag{6}$$

Hier kommt bei der Summation neben ξ, η immer auch noch das Zahlenpaar ξ, $-\eta$ zur Geltung, die doch beide ein und denselben Betrag für die rechte Seite von (6) liefern; man ziehe deshalb unter beiden Paaren etwa nur dasjenige heran, für welches ξ mit η mod. 3 congruent ist. Dann wird das Legendre'sche Zeichen unter der Summe (6) einfach gleich 1, es ist aber die rechte Seite dieser Gleichung dann noch mit dem Factor 2 zu versehen. *Als endgültige Darstellungen der A_α und also mittelbar auch der in* (1) *und* (2) *gemeinten normierten $\bar{A}_\alpha$ haben wir so erreicht:*

$$A_\alpha = \frac{2\pi}{\omega_2}\sum_{\xi,\eta}(-1)^{\frac{\xi+\eta}{2}}r^{\frac{\xi^2+n\eta^2}{24n}}, \tag{7}$$

wobei ξ und η alle den Congruenzen:

$$\xi \equiv -6\alpha \pmod{n}, \quad \xi \equiv \eta \equiv \pm 1 \pmod{6} \tag{8}$$

genügenden Paare ganzer Zahlen durchlaufen sollen.

In (7) haben wir ein einfachstes Beispiel für eine Art von Reihenentwicklungen vor uns, wie sie in der Folge immer wieder auftreten werden. Als charakteristisches Merkmal dieser Entwicklung sehen wir an, *dass im Zähler des Exponenten von r eine ganzzahlige binäre quadratische Form* (*hier die Hauptform*) *der negativen Determinante $D = -4n$ steht**). Als quadratische Verbindungen von ϑ-Reihen werden die in Rede stehenden Potenzentwicklungen *im Bereiche der ganzen*

*) Über das Auftreten gerade der *binären* quadratischen Formen vgl. man die bereits in der Einleitung zum vorliegenden Kapitel (p. 318) gegebenen Bemerkungen.

positiven ω-Halbebene unbedingt convergent sein, ein Umstand, den man für die Folge festhalten wolle.

Will man die einzelne Reihe (7) *nach ansteigenden Potenzen* von r umordnen, so schreibe man:

$$(9) \qquad \mathsf{A}_\alpha = \frac{2\pi}{\omega_2} \sum_m{}' \chi(m)\, r^{\frac{m}{24n}}.$$

Die Summe rechter Hand bezieht sich dabei auf alle diejenigen ganzen Zahlen m, *welche Darstellungen in der Gestalt* $\xi^2 + n\eta^2$ *durch ganze den Bedingungen* (8) *genügende Zahlen* ξ, η *zulassen;* diese Zahlen m werden offenbar alle gerade und (für die einzelne Reihe) alle unter einander mod. $24n$ congruent. *Der Entwicklungscoefficient* $\chi(m)$ *aber ist eine eindeutig von* m *abhängende ganze Zahl, welche durch die Summe*

$$(10) \qquad \chi(m) = \sum{}' (-1)^{\frac{\xi+\eta}{2}}, \quad m = \xi^2 + n\eta^2$$

zu definieren ist. Man hat also folgende arithmetische Erklärung dieser Entwicklungscoefficienten: *Es giebt* $\chi(m)$ *den Überschuss der Anzahl derjenigen unter den gekennzeichneten Darstellungen von* m, *bei welchen* ξ *und* η *mod.* 4 *incongruent sind, über die Anzahl der anderen Darstellungen an**).

§ 4. Analytische Darstellung und Mannigfaltigkeit der im Falle I eintretenden $B_\alpha^{(p,n)}$. Einführung der $\mathsf{X}_\alpha(u, v)$**).

Wir unternehmen jetzt, die Untersuchungen des vorigen Paragraphen ganz allgemein für die Bilinearverbindungen des § 2 durchzuführen, und beginnen wieder mit dem Falle einer *geraden* Gliederanzahl p. Die in (2) p. 324 gegebenen B_α hatten wir für diesen Fall durch Zusatz des reciproken Wertes von $\sqrt[4]{\Delta}$ zu $\overline{B}_\alpha$ normiert, und wir erinnern zugleich noch an die Congruenz (8) p. 326, welche wir in die Gleichung mit ganzzahligem s umsetzen mögen:

$$(1) \qquad nq^2 + 1 = 2ps.$$

Beide X_α-Systeme, welche die vorliegenden B_α zusammensetzen,

*) Potenzentwicklungen vom Charakter der Reihe (9) bez. (7) hat Hr. Hurwitz in die Theorie der Modulfunctionen eingeführt, und zwar zunächst zur Darstellung der Integrale erster Gattung (worauf wir im folgenden Abschnitte eingehen); man vergl. die Note „*Zur Theorie der Modulargleichungen*" in den Göttinger Nachrichten von 1883. Diese „Potenzreihen mit arithmetischen Coefficienten" sind hier und in der Folge ganz allgemein vom Herausgeber zur Darstellung ganzer algebraischer Modulformen zur Verwendung gebracht.

**) Cf. Hurwitz l. c. § 12.

gehören geraden Ordnungen an, so dass wir für dieselben die Formel (3) p. 287 heranzuziehen haben. Die Zähler in den Exponenten von r, welche bei $X_\lambda^{(p)}$ und $X_{p\alpha+nq\lambda}^{(np)}$ auftreten, mögen wir gleich abgekürzt bezeichnen; wir schreiben etwa:

$$(2) \qquad m_1 p - \lambda = M_1, \quad m_2 np - p\alpha - nq\lambda = M_2,$$

wobei sich der Summationsbuchstabe m_1 auf die $X^{(p)}$, m_2 dagegen auf die $X^{(np)}$ bezieht. Indem wir in entsprechender Schreibweise:

$$(3) \qquad e^{\frac{2\pi i u_1}{\omega_2}} = z_1, \quad e^{\frac{2\pi i u_2}{\omega_2}} = z_2$$

setzen, kommt nun durch einfache Ausmultiplication als erster Ausdruck für die normierten $\overline{B}_\alpha$ der folgende:

$$\frac{1}{p\sqrt{n}}\overline{B}_\alpha = \frac{2\pi}{\omega_2} e^{\frac{p\eta_2}{2\omega_2}(u_1^2+nu_2^2)} \sum_{\lambda, m_1, m_2} r^{\frac{M_1^2 n + M_2^2}{2np}} z_1^{M_1} z_2^{M_2};$$

derselbe lässt sich durch einfache Umgestaltung in eine sehr elegante Form überführen.

Zu diesem Ende bemerke man, dass M_1 gerade einfach das System aller (positiven und negativen) ganzen Zahlen η durchläuft; für bestimmtes η ist dann λ (als kleinster, nicht negativer Rest von $-\eta$ mod. p), sowie damit auch m_1 eindeutig bestimmt. Andrerseits hat M_2 folgenden Wert:

$$M_2 = nq\eta + p(m_2 n - \alpha - m_1 qn),$$

wobei wir das in die Klammer eingeschlossene Trinom jetzt abgekürzt ξ nennen; offenbar hat dann ξ beim einzelnen η noch einfach alle ganzen Zahlen zu durchlaufen, die mod. n mit $-\alpha$ congruent sind. Mit Hülfe der neuen Summationsbuchstaben ξ, η hat man:

$$M_1^2 n + M_2^2 = (p\xi + nq\eta)^2 + n\eta^2,$$
$$M_1^2 n + M_2^2 = 2p\left(\frac{p}{2}\xi^2 + nq\xi\eta + ns\eta^2\right).$$

Was hier in der letzten Klammer steht, *ist eine ganzzahlige binäre quadratische Form* (P, Q, R) *der Determinante* $D = -n$; zufolge (1) ist diese Form *ursprünglich*, und sie hat übrigens einen ungeraden mittleren Coefficienten; wir mögen die fragliche Form fortan abgekürzt durch:

$$(4) \qquad f(\xi, \eta) = \frac{p}{2}\xi^2 + nq\xi\eta + ns\eta^2$$

bezeichnen.

Zur Erzielung einer weiteren Vereinfachung unterziehen wir jetzt die u_1, u_2 einer linearen Transformation, indem wir setzen:

(5) $$u_1 = u + \frac{nq}{p} v, \quad u_2 = -\frac{v}{p}.$$

Dann wird offenbar:

$$\frac{p}{2}(u_1^2 + n u_2^2) = f(u, v), \quad M_1 u_1 + M_2 u_2 = \eta u - \xi v.$$

Indem wir die gewonnenen Ausdrücke in obige vorläufige Darstellung von $\overline{B}_\alpha$ eintragen, kommt eine Gestalt dieser Darstellung, welche an die bilineare Verbindung der X_α gar nicht mehr erinnert. Um dem zu entsprechen, führe man die neue Bezeichnung ein:

(6) $$B_\alpha'^{(p,n)}(u_1, u_2 \mid \omega_1, \omega_2) = p\sqrt{n} \cdot \mathsf{X}_\alpha^{(p,n)}(u, v \mid \omega_1, \omega_2).$$

Als endgültige analytische Darstellung unserer Grössensysteme mit geradem p erhalten wir solcherweise:

(7) $$\mathsf{X}_\alpha(u, v) = \frac{2\pi}{\omega_2} e^{\frac{\eta_2}{\omega_2} f(u,v)} \sum_{\xi,\eta} r^{\frac{f(\xi,\eta)}{n}} e^{\frac{2\pi i}{\omega_2}(\eta u - \xi v)},$$

wobei sich die Summation auf alle ganzzahligen, allein der Bedingung:

(8) $$\xi \equiv -\alpha \pmod{n}$$

genügenden Combinationen ξ, η bezieht.

In (7) haben wir ein Resultat erreicht, das sich der Qualität nach unmittelbar an die Formel (7) des vorigen Paragraphen anschliesst. Indessen haben wir hier doch sehr viel allgemeinere Verhältnisse, insofern die drei ganzen Zahlen p, q, s, abgesehen davon, dass die erste gerade sein muss, einzig der Bedingung (1) zu genügen haben. Es kann geradezu *jeder* Classe ursprünglicher Formen

(9) $$(P, Q, R) \quad \text{mit} \quad D = Q^2 - 4PR = -n$$

eine Form $f(\xi, \eta)$ unserer Gestalt (4) entnommen werden. In der That hat es nach bekannten Sätzen der Arithmetik*) keine Schwierigkeit, der einzelnen Classe eine Form (9) zu entnehmen, deren erster Coefficient relativ prim gegen n ist. Von ihr gehe man dann durch Ausübung von S^ν zur äquivalenten Form:

(10) $$(P', Q', R') = (P, 2\nu P + Q, \nu^2 P + \nu Q + R)$$

und bestimme ν derart, dass Q' durch n teilbar wird, worauf dann auch R' ein Multiplum von n ist. Daraufhin schreibe man:

$$2P' = p, \quad \frac{Q'}{n} = q, \quad \frac{R'}{n} = s$$

und hat in der That eine für (7) brauchbare Form $f(\xi, \eta)$ erreicht.

Um bei dieser Sachlage die Gesamtmannigfaltigkeit der bei vorliegendem $n = 4h + 3$ eintretenden Functionensysteme (7) zu begreifen,

*) Cf. Dirichlet-Dedekind, 3. Aufl. p. 232.

haben wir das gegenseitige Verhältnis solcher zwei Systeme zu betrachten, die zu äquivalenten Formen f und f' gehören. Hierbei müssen wir vorab die Äquivalenz dieser beiden Formen f und f' gesondert untersuchen; denn es handelt sich hier nicht um eine Äquivalenz schlechtweg, sondern (infolge der particulären Gestalt (4) unserer Formen) um eine relative Äquivalenz bezüglich einer gewissen Congruenzgruppe n^{ter} Stufe. Um nicht mit der Bezeichnung des unteren Index α in (7) zu collidieren, benennen wir die vier Coefficienten einer Modulsubstitution V durch lateinische Buchstaben, was natürlich nur vorübergehend der Fall sein soll. Die Äquivalenz der Form $f' = (\frac{1}{2}p', nq', ns')$ mit f wird alsdann zum Ausdruck gebracht durch die Formeln:

$$(11) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}p' = \frac{1}{2}pa^2 + nqac + nsc^2, \\ nq' = pab + nq(ad + bc) + 2nscd, \\ ns' = \frac{1}{2}pb^2 + nqbd + nsd^2. \end{cases}$$

Für die Substitution V folgert man hieraus sofort, dass $b \equiv 0 \pmod{n}$ die hinreichende und notwendige Bedingung zum Bestehen der Gleichungen (11) ist; also das Resultat: *Die relative Äquivalenz unserer Formen f wird durch die Substitutionen V der durch $b \equiv 0 \pmod{n}$ definierten Congruenzgruppe $\Gamma_{\psi(n)}$ der n^{ten} Stufe vermittelt.*

Man wähle nun eine beliebige Substitution V mit $b \equiv 0 \pmod{n}$ wirklich aus und setze daraufhin, indem man vor allem die u, v mit ξ, η cogredient annimmt:

$$(12) \qquad \begin{cases} \xi' = a\xi + b\eta, \quad \eta' = c\xi + d\eta, \\ u' = au + bv, \quad v' = cu + dv. \end{cases}$$

Wir schreiben in Anlehnung an (11) sodann $f(\xi', \eta') = f'(\xi, \eta)$ und merken an:

$$(13) \qquad \eta' u' - \xi' v' = \eta u - \xi v.$$

Unter Benutzung der Summationsbuchstaben ξ', η' bilde man genau nach der Vorschrift (7) bez. (8)

$$(14) \qquad X_{\alpha u}(u', v') = \frac{2\pi}{\omega_2} e^{\frac{\eta_2}{\omega_2} f(u', v')} \sum_{\xi', \eta'} e^{\frac{f(\xi', \eta')}{n}} e^{\frac{2\pi i}{\omega_2}(\eta' u' - \xi' v')}$$

mit der Summationsbedingung:

$$(15) \qquad \xi' \equiv -a\alpha \pmod{n}$$

und benenne übrigens das zur quadratischen Form f' gehörende Functionssystem (7) durch X_α'. Formel (14) schreibt sich unter Rücksicht auf (12) und (13) um in:

$$(16) \qquad \mathsf{X}_{a\alpha}(u', v') = \frac{2\pi}{\omega_2} e^{\frac{\eta_2}{\omega_2} f'(u,v)} \sum_{\xi,\eta} r^{\frac{f'(\xi,\eta)}{n}} e^{\frac{2\pi i}{\omega_2}(\eta u - \xi v)},$$

während entsprechend die Congruenz (15) zu transformieren ist in:

$$(17) \qquad \xi' = a\xi + b\eta \equiv a\xi \equiv -a\alpha, \quad \xi \equiv -\alpha \pmod{n}.$$

Der Vergleich mit (7) *und* (8) *giebt somit das wichtige Resultat:*

$$(18) \qquad \mathsf{X}_\alpha'(u, v) = \mathsf{X}_{a\alpha}(au + bv, cu + dv).$$

Der wesentliche Zweck, zu welchem wir die $\mathsf{X}_\alpha(u, v)$ späterhin brauchen werden, ist der, dass wir (gerade wie oben bei den X_α selbst) X_α in eine Reihe nach ansteigenden Potenzen von u und v entwickeln und die dabei auftretenden Entwicklungscoefficienten als Modulformen n^{ter} Stufe einführen wollen. Die Glieder $\varkappa^{\text{ter}}$ Dimension liefern beim einzelnen α, wie man sieht, $\varkappa + 1$ Moduln, und nun ist sofort evident, dass dieselben eine lineare homogene Substitution erfahren, wenn wir u und v linear transformieren. Auf eine derartige Substitution kommt also, abgesehen von einer Permutation der unteren Indices α, der Übergang von den X_α zu X_α' hinaus; wir werden im Sinne unserer späteren Entwicklungen den so charakterisierten Übergang als irrelevant und demgemäss die X_α' von den X_α nur als unwesentlich verschieden ansehen. Indem aber weiter ein gleichzeitiger Zeichenwechsel von η und u von (7) aus gleichfalls auf kein wesentlich neues X_α führt, haben wir als wichtiges Resultat erhalten: *Die Gesamtzahl wesentlich verschiedener bei $n = 4h + 3$ auftretender Grössensysteme X_α ist sicher nicht grösser als die Anzahl ambiger Classen ursprünglicher Formen (P, Q, R) der Determinante $D = -n$, vermehrt um die halbe Anzahl der nicht-ambigen Classen dieser Art.*

Wir haben diesen Satz indirect formuliert, weil wir hier ja noch keineswegs haben beweisen können, dass die zu verschiedenen Formclassen gehörenden Grössensysteme X_α nun auch thatsächlich wesentlich verschieden sind. Jedenfalls aber hat der bilineare Process des § 2 für die geraden p wirklich zu einem endlichen, für die Einzelwerte n leicht zu erschöpfenden Kreise von Systemen X_α hingeführt. Untersuchen wir nun, ob ähnliche Verhältnisse auch in den beiden Fällen ungerader p vorliegen!

§ 5. Analytische Darstellungen der in den Fällen II, III auftretenden B_α bez. $\mathsf{X}_\alpha(u, v)$*).

Der analytische Teil der eben beschriebenen Untersuchungen überträgt sich auf die beiden Fälle II und III des § 2 ohne Mühe. Man

*) Cf. Hurwitz l. c. § 10 und 14.

kleide hier gleich die in Kraft tretende Congruenz (5) p. 325 in die Gestalt:

$$nq^2 + 1 = ps \tag{1}$$

und bemerke übrigens vorab, dass die Vermehrung von q um p die Functionen B_α in keiner Weise modificiert, was man mit Hülfe von (I) p. 264 am Ausdruck (2) p. 324 der B_α sofort verificiert. Wir machen hiervon dahingehend Gebrauch, dass wir q stets mod. 2 mit n congruent wählen: *es ist also q im Falle II eine ungerade, im Falle III aber eine gerade Zahl.* Wir behandeln nun beide Fälle gesondert und beginnen mit:

II. $p \equiv 1 \pmod{2}, \quad n \equiv q \equiv 1 \pmod{2}$.

Hier tritt sowohl für $X^{(p)}$ wie $X^{(np)}$ die Formel (3) p. 277 in Kraft; wir gebrauchen als bezügliche Summationsbuchstaben m_1 und m_2 und benutzen z_1 und z_2 wieder in der Bedeutung (3) § 4. Die Zähler in den Exponenten von r in den Reihen für $X_\lambda^{(p)}$, $X_{p\alpha+qn\lambda}^{(np)}$ werden jetzt:

$$M_1 = (2m_1 + 1)p - 2\lambda, \quad M_2 = (2m_2 + 1)pn - 2p\alpha - 2nq\lambda, \tag{2}$$

und wir erhalten durch leichte Rechnung:

$$\frac{1}{p\sqrt{n}}\left(\sqrt[4]{\Delta}\right)^{p \cdot \frac{n+1}{2}} B_\alpha = \tag{3}$$

$$= \frac{2\pi}{\omega_2} e^{\frac{p\,\eta_2}{2\omega_2}(u_1^2 + n u_2^2)} \sum_{\lambda, m_1, m_2} (-1)^{\alpha + m_1 + m_2} r^{\frac{nM_1^2 + M_2^2}{8np}} z_1^{\frac{M_1}{2}} z_2^{\frac{M_2}{2}},$$

wobei sich die Summe über λ auf die Zahlen $0, 1, \cdots, p-1$ bezieht, während m_1 und m_2 unabhängig von einander alle ganzen Zahlen durchlaufen.

Wir gehen nun genau wie vorhin weiter und bemerken zunächst, dass M_1 offenbar gerade einfach das System aller *ungeraden* ganzen Zahlen η durchläuft. Mit gegebenem η sind dann wieder λ und m_1 fest bestimmt, während

$$M_2 = nq\eta + 2p\left(m_2 n - m_1 nq + n\frac{1-q}{2} - \alpha\right)$$

wird; die hier in der Klammer eingeschlossene ganze Zahl, die wir wieder ξ nennen, hat dann bei stehendem η noch alle ganzen, der Bedingung $\xi \equiv -\alpha \pmod{n}$ genügenden Zahlwerte anzunehmen. Wir wollen also in (3), um es nochmals zusammenzufassen, eintragen:

$$M_1 = \eta, \quad M_2 = nq\eta + 2p\xi, \tag{4}$$

wobei die den η, ξ aufzuerlegenden Bedingungen sind:

$$\eta \equiv 1 \pmod{2}, \quad \xi \equiv -\alpha \pmod{n}. \tag{5}$$

Der erste Schritt bei der daraufhin an der Formel (3) zu vollziehenden Umgestaltung ist, dass wir mit Rücksicht auf (1):

$$(6) \qquad nM_1^2 + M_2^2 = 2p \cdot f(\xi, \eta)$$

setzen, wo $f(\xi, \eta)$ eine abgekürzte Bezeichnung ist für die binäre quadratische Form:

$$(7) \qquad f(\xi, \eta) = 2p\xi^2 + 2nq\xi\eta + \frac{ns}{2}\eta^2.$$

Auf der anderen Seite unterziehen wir wieder u_1, u_2 einer linearen Transformation, nämlich:

$$(8) \qquad u_1 = u + \frac{nq}{2p}v, \quad u_2 = -\frac{v}{2p},$$

und finden daraufhin:

$$(9) \qquad M_1u_1 + M_2u_2 = \eta u - \xi v.$$

Endlich ist aber hier noch auf das Vorzeichen des einzelnen Gliedes der Summe (3) Rücksicht zu nehmen. In diesem Betracht folgern wir aus (2) unter Rücksicht auf die Bedingungen II leicht:

$$pM_1 + npM_2 \equiv 2(\alpha + m_1 + m_2) + 2, \text{ (mod. 4)},$$

während man aus (4) berechnet:

$$pM_1 + npM_2 \equiv p\eta + pq\eta + 2n\xi \equiv 2\xi + q + 1, \text{ (mod. 4)}.$$

Durch Combination dieser beiden Congruenzen folgt also:

$$(10) \qquad \alpha + m_1 + m_2 \equiv \xi + \frac{q-1}{2}, \text{ (mod. 2)}.$$

Um die B_α wieder zu Functionen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension von u, v, ω_1, ω_2 zu normieren, schreiben wir jetzt:

$$(11) \qquad \left(\frac{-1}{q}\right)\frac{1}{p\sqrt{n}} B_\alpha \cdot (\sqrt[4]{\Delta})^{p \cdot \frac{n+1}{2}} = \mathrm{X}_\alpha(u, v \mid \omega_1, \omega_2).$$

Indem wir dann die in (6), (9) und (10) vorbereitete Rechnung zusammenfassen, *kommt als endgültige analytische Darstellung der* X_α *und also mittelbar auch der* B_α *im Falle* II *die folgende:*

$$(12) \qquad \mathrm{X}_\alpha(u, v) = \frac{2\pi}{\omega_2} e^{\frac{\eta_2}{4\omega_2} f(u, v)} \sum_{\xi, \eta} (-1)^\xi r^{\frac{f(\xi, \eta)}{4n}} e^{\frac{\pi i}{\omega_2}(\eta u - \xi v)},$$

wobei die Congruenzen (5) *als Summationsbedingungen in Kraft treten.* Diese Formel schliesst sich gestaltlich offenbar genau an die Formel (7) des vorigen Paragraphen an.

Wir erledigen endlich den Fall:

III. $p \equiv 1$ (mod. 2), $n \equiv q \equiv 0$ (mod. 2),

wo die Formeln (3) p. 277 und (3) p. 287 neben einander zu verwenden sind. Hier ist zu setzen:

$$(13)\qquad M_1 = (2m_1 + 1)p - 2\lambda, \quad M_2 = m_2 np - p\alpha - nq\lambda,$$

worauf wir alsdann in üblicher Weise den Ansatz erhalten:

$$(14)\qquad \frac{i}{p\sqrt{n}} B_\alpha \cdot (\sqrt[4]{\Delta})^{\frac{p-1}{2}} =$$

$$= \frac{2\pi}{\omega_2} e^{\frac{p\eta_2}{2\omega_2}(u_1^2 + nu_2^2)} \sum_{\lambda, m_1, m_2} (-1)^{\lambda + m_1} r^{\frac{nM_1^2 + 4M_2^2}{8np}} z_1^{\frac{M_1}{2}} z_2^{M_2}.$$

Man schreibe weiter:

$$(15)\qquad M_1 = \eta, \quad 2M_2 = nq\eta + 2p\xi$$

und zeigt wie vorhin ohne Mühe, dass wir gerade alle Glieder der Reihe (14) erhalten, wenn wir für ξ, η alle, den Bedingungen (5) genügenden ganzzahligen Combinationen nehmen. Aus den beiden Gestalten (13) und (15) von M_1 zieht man leicht noch die Folgerung:

$$\lambda + m_1 \equiv \frac{\eta - 1}{2} + \frac{p-1}{2}, \quad (\text{mod. } 2),$$

während die Gleichungen (7) und (8) zur Definition der Form f und der Variabelen u, v für den vorliegenden Fall unverändert bestehen bleiben sollen. Wenn wir endlich noch:

$$(16)\qquad \left(\frac{-1}{p}\right) \frac{i}{p\sqrt{n}} B_\alpha \cdot (\sqrt[4]{\Delta})^{\frac{p-1}{2}} = \mathsf{X}_\alpha(u, v \mid \omega_1, \omega_2)$$

setzen, so ist folgendes das Resultat unserer Rechnung: *Im Falle* III *ist die endgültige Darstellung der* X_α *und somit auch der* B_α *gegeben durch:*

$$(17)\qquad \mathsf{X}_\alpha(u, v) = \frac{2\pi}{\omega_2} e^{\frac{\eta_2}{4\omega_2} \cdot f(u, v)} \sum_{\xi, \eta} (-1)^{\frac{\eta - 1}{2}} r^{\frac{f(\xi, \eta)}{4n}} e^{\frac{\pi i}{\omega_2}(\eta u - \xi v)},$$

wobei sich die Summation auf alle, den Bedingungen (5) *genügenden ganzzahligen Combinationen* ξ, η *bezieht.*

An die jetzt beendete analytische Untersuchung schliessen sich nun wieder, wie in § 4, arithmetische Betrachtungen, welche zum Ziele haben, die Gesamtheit der beim einzelnen $\varkappa$ eintretenden Functionensysteme unserer Art zu umgrenzen. Diese Untersuchung gestaltet sich hier etwas umständlicher, insofern sich nämlich für die Fälle II und III im Grunde die nämlichen arithmetischen Complicationen einstellen, denen wir seinerzeit beim Übergang von der Transformation erster Stufe zu derjenigen höherer Stufen begegneten. Wir müssen dieserhalb schrittweise vorwärtsgehen und handeln zuvörderst von den im Falle II und III eintretenden quadratischen Formen $f(\xi, \eta)$ und ihrer relativen Äquivalenz.

§ 6. Untersuchung der in den Fällen II und III eintretenden quadratischen Formen $f(\xi, \eta)$ und ihrer relativen Äquivalenz.

In den beiden Fällen II und III wurde die Geichung

$$(1) \qquad nq^2 + 1 = ps$$

zu Grunde gelegt, so dass die binäre quadratische Form:

$$(2) \qquad f(\xi, \eta) = 2p\xi^2 + 2nq\xi\eta + \frac{ns}{2}\eta^2$$

vor allen Dingen stets *ganzzahlig* ist; denn für II, wo n ungerade ist, wurde ja auch q ungerade gewählt, so dass s durch 2 teilbar ist. Der mittlere Coefficient von f ist gegenwärtig eine gerade Zahl; man könnte demnach die Theorie der quadratischen Formen (a, b, c) in der Gauss'schen Gestalt in Anwendung bringen, wo dann f die Determinante $D = -n$ aufweisen würde. Inzwischen ist es der Gleichmässigkeit halber erwünscht, bei den Formen (P, Q, R) zu verbleiben, *so dass die Form $f(\xi, \eta)$ eine solche der Determinante $D = -4n$ wird.*

Da p ungerade und zufolge (1) relativ prim gegen n und q ist, so ist die Form (2) entweder ursprünglich oder sie hat den Teiler 2, je nachdem ns das Doppelte einer ungeraden Zahl oder durch 4 teilbar ist. Im Falle II ist s mod. 4 mit $(n + 1)$ congruent; es folgt also im speciellen: *Im Falle der ungeraden n ist $f(\xi, \eta)$ ursprünglich oder vom Teiler 2, je nachdem n mod. 4 mit 1 oder 3 congruent ist.* Da weiter s für III ungerade ist, *so wird im Falle der geraden n die Form (2) ursprünglich oder vom Teiler 2 sein, je nachdem n mod. 4 mit 2 oder 0 congruent ist.* Natürlich geben die Formen vom Teiler 2 durch 2 gehoben allemal ursprüngliche Formen der Determinante $D = -n$.

Hiernächst handeln wir von der relativen Aquivalenz der Formen (2) und gehen etwa durch Ausübung der Substitution:

$$(3) \qquad (V) \qquad \xi' = a\xi + b\eta, \quad \eta' = c\xi + d\eta$$

zur äquivalenten Form f' mit den Zahlen p', q', s' und übrigens von der Gestalt (2) über. Es ist alsdann, ausführlich geschrieben:

$$(4) \qquad \begin{cases} 2p' = 2pa^2 + 2nqac + \frac{ns}{2}c^2, \\ nq' = 2pab + nq(ad + bc) + \frac{ns}{2}cd, \\ \frac{ns'}{2} = 2pb^2 + 2nqbd + \frac{ns}{2}d^2, \end{cases}$$

und es gilt jetzt, gerade wie im Falle I des § 4 (p. 336), die zum Bestehen dieser drei Gleichungen notwendigen Bedingungen für die Substi-

tution V zu entwickeln. Hierbei müssen wir auf unsere Fallunterscheidung zurückkommen und setzen erstlich wieder:

II. $p \equiv 1 \pmod{2}, \quad n \equiv q \equiv 1 \pmod{2}.$

Da p' prim gegen n sein soll, so muss das Gleiche von der Zahl a gelten, und somit verlangt die zweite Gleichung (4), dass $b \equiv 0 \pmod{n}$ sei. Dies ist aber im allgemeinen noch nicht hinreichend. Damit nämlich p' ungerade wird, ist mit Rücksicht auf die offenbar bestehende Congruenz $s \equiv p(n+1) \pmod{8}$, erforderlich und hinreichend, dass

$$(5) \qquad 2a^2 + 2ac + \frac{n+1}{2}c^2 \equiv 2, \pmod{4}$$

erfüllt ist. Ist nun $n = 8h + 3$, so besteht (5) für den ersten und dritten Coefficienten a, c jeder Substitution V; ist jedoch $n = 4h + 1$ oder $8h + 7$, so muss, wie man leicht sieht, c eine gerade Zahl sein. Hiermit werden dann zugleich auch die zweite und dritte Gleichung (4) in richtiger Weise erfüllt. Durch $c \equiv 0 \pmod{2}$ ist aber eine wohlbekannte Congruenzgruppe Γ_3 zweiter Stufe charakterisiert, welche mit der durch $b \equiv 0 \pmod{n}$ bestimmten $\Gamma_{\psi(n)}$ eine Untergruppe $\Gamma_{3\psi(n)}$ gemein hat. Wir haben demnach das Resultat: *Für $n = 8h + 3$ bilden die Substitutionen V, welche die relative Äquivalenz von f und f' vermitteln, die durch $b \equiv 0 \pmod{n}$ definierte $\Gamma_{\psi(n)}$ der n^{ten} Stufe; für $n = 4h + 1$ oder $n = 8h + 7$ dagegen bilden diese Substitutionen V die durch $b \equiv 0 \pmod{n}$, $c \equiv 0 \pmod{2}$ bezeichnete $\Gamma_{3\psi(n)}$ der $2n^{\text{ten}}$ Stufe.*

Ein wenig umständlicher gestaltet sich die Erledigung des Falles

III. $p \equiv 1 \pmod{2}, \quad n \equiv q \equiv 0 \pmod{2}.$

Man benenne hier durch v diejenigen unter den Substitutionen V, welche *gerades* c haben und bestimme zuvörderst die von den v gebildete Untergruppe. Wir sagen gleich, dass diese Untergruppe durch:

$$(6) \qquad 2b \equiv 0 \pmod{n}, \quad c \equiv \frac{4b}{n} \pmod{4}$$

vollständig definiert sei. Da nämlich zufolge der beiden letzten Congruenzen c gerade und $2b$ Vielfaches von n ist, so ist a als erster Coefficient der Modulsubstitution V prim gegen n; eben deshalb wird alsdann zufolge der ersten Gleichung (4) mit p auch p' prim gegen n sein. Überdies hat noch die zweite Congruenz (6) zur Folge, dass q' eine gerade Zahl ist; unsere Congruenzen sind also jedenfalls ausreichend. Umgekehrt zeigt man aber auch leicht die Notwendigkeit der Congruenzen (6) für die gesuchten v. — Durch (6) ist nun, allgemein

zu reden, eine Congruenzgruppe $2n^{\text{ter}}$ Stufe definiert, und es reducieren sich die Substitutionen v mod. $2n$ auf die Typen:

$$(7)\qquad v \equiv \begin{pmatrix} a, & e\cdot\frac{n}{2} \\ 2e+4f, & a^{-1}+a^{-1}ne^2 \end{pmatrix} \pmod{2n};$$

hierbei hat a ein System incongruenter, gegen $2n$ primer Zahlen zu durchlaufen, e aber ein volles Restsystem mod. 4 und f ein ebensolches mod. $\frac{n}{2}$. Die Gesamtzahl mod. $2n$ unterschiedener (homogener) Substitutionen v ist dieserhalb $2n\varphi(2n)$, so dass der Index der Untergruppe der v:

$$2n\varphi(2n)\psi(2n) : 2n\varphi(2n) = \psi(2n) = 2\psi(n)$$

wird: *Die Untergruppe der jetzt in Betracht kommenden Sustitutionen* (3) *mit* $c \equiv 0$ (*mod.* 2) *ist demgemäss eine* $\Gamma_{2\psi(n)}$.

Giebt es noch weitere Substitutionen V, welche unserem Probleme genügen, so mögen wir erstlich diejenigen unter ihnen herausgreifen, welche *gerades* d und also ungerade b, c haben; diese Substitutionen nennen wir v_1. Da b und übrigens p, s und s' ungerade sind, so liefert die dritte Gleichung (4), mod. 4 reduciert, $\frac{n}{2} \equiv 2p$. *Substitutionen* v_1 *können demnach nur eintreten, wenn* n *von der Gestalt* $n = 8h + 4$ *ist.* Als notwendige und ausreichende Bedingungen für v_1 folgert man dann weiter:

$$(8)\qquad a \equiv 0 \pmod{2},\quad a + d \equiv 0 \pmod{4},\quad b \equiv 0 \left(\text{mod. } \frac{n}{4}\right),$$

was man im einzelnen leicht bestätigen wird. Die Substitutionen v_1 haben also die Gestalt:

$$(9)\qquad v_1 \equiv \begin{pmatrix} 2e, & f\cdot\frac{n}{4} \\ c, & 4g-2e \end{pmatrix} \pmod{n},$$

womit auch evident ist, dass thatsächlich für $n = 8h + 4$ Substitutionen dieser Art vorkommen. Die Anzahl der v_1 brauchen wir gar nicht abzuzählen; da nämlich im gegenwärtigen Falle $n = 8h + 4$ offenbar $v_1 \equiv T$, $v \equiv 1$ (mod. 2) ist, so werden irgend zwei Substitutionen v_1 combiniert ein v, irgend ein v_1 mit einem v zusammen aber wieder eine Substitution v_1 geben. Dieses aber heisst: *Die* v_1 *und* v *zusammen bilden eine Untergruppe* $\Gamma_{\psi(n)}$, *in welcher die* $\Gamma_{2\psi(n)}$ *der Substitutionen* v *eine ausgezeichnete Untergruppe des Index* 2 *ist.*

Nun könnten letzten Endes noch Substitutionen V vorkommen, für welche *sowohl* c *als* d *ungerade* Zahlen sind; diese Substitutionen wollen wir v_2 nennen. Dividiert man die mit 2 multiplicierte zweite

Gleichung (4) durch n, so wird evident, dass $(4ab:n)$ eine ungerade Zahl ist. Da nun eine der Zahlen a, b im vorliegenden Falle gerade sein muss, *so können Substitutionen v_2 nur für die durch* 8 *teilbaren n eintreten.* Nehmen wir aber diese Bedingung erfüllt an, so liefert die erste Gleichung (4) die Bedingung $a \equiv 1 \pmod{2}$, und wir finden durch mühelose Fortsetzung der Betrachtung als notwendige und zureichende Bedingungen für v_2:

$$(10)\quad a \equiv 1 \pmod{2},\quad 2b \equiv \frac{n}{2} \pmod{n},\quad c \equiv b - \frac{4b}{n} \pmod{4}.$$

Wir unterlassen, die ausführliche Gestalt von v_2 hinzuschreiben, bemerken aber, dass gegenwärtig:

$$(11)\qquad v_2 \equiv \begin{pmatrix}1, & 0\\ 1, & 1\end{pmatrix},\quad v \equiv \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix},\quad \pmod{2}$$

ist. Das hier für die v_2, v zu Tage tretende Resultat stimmt also auf Grund bekannter Sätze über die Congruenzgruppen zweiter Stufe mit dem im vorigen Falle gewonnenen Satze genau überein. Wir formulieren dasselbe demnach nicht besonders, geben vielmehr gleich folgenden zusammenfassenden Schlusssatz:

Die Substitutionen V, welche im Falle III *eines geraden n die relative Äquivalenz der Formen $f(\xi, \eta)$ herstellen, bilden die durch* (6) *definierte $\Gamma_{2\psi(n)}$, falls n das Doppelte einer ungeraden Zahl ist; sie bilden die $\Gamma_{\psi(n)}$ der durch* (6) *definierten v und der durch* (8) *definierten v_1, falls n durch* 4, *aber nicht durch* 8 *teilbar ist; sie bilden endlich die $\Gamma_{\psi(n)}$ der durch* (6) *definierten v im Verein mit den durch* (10) *definierten v_2, falls n durch* 8 *teilbar ist. In den beiden letzten Fällen bilden die in $\Gamma_{\psi(n)}$ enthaltenen Substitutionen v eine $\Gamma_{2\psi(n)}$, welche innerhalb ihrer $\Gamma_{\psi(n)}$ eine ausgezeichnete Untergruppe des Index* 2 *ist.* —

Schliesslich bleibt uns in der vorliegenden arithmetischen Zwischenbetrachtung nur noch nachzuweisen übrig, *dass auch in jeder Formclasse, die nach den im Anfang des Paragraphen formulierten Sätzen in Betracht kommt, Formen $f(\xi, \eta)$ der Gestalt* (2) *sich finden.* Auch diese Untersuchung gestaltet sich hier etwas umständlicher, als die entsprechende des § 4, da bei den eben bestimmten Gruppen neben dem Zahlmodul n immer noch der Zahlmodul 2 bez. 4 besonders auftritt. Stets gelingt es übrigens, mit Hülfe des auch im Falle I benutzten Satzes zum Ziele zu kommen, dass sich nämlich aus einer ursprünglichen Classe immer eine solche Form auswählen lässt, deren erster Coefficient prim gegen $2n$ ist.

Zunächst erledigen sich leicht die Fälle $n \equiv 0, 3 \pmod{4}$, da hier die Formclassen vom Teiler 2 in Betracht kommen, welche durch

2 gehoben ursprüngliche Formen der Determinante $-n$ geben. Aus der einzelnen Classe derartiger Formen wähle man sich zunächst eine solche specielle Form, deren erster Coefficient $P = p$ prim gegen $2n$ ist. Der zweite Coefficient Q ist alsdann mod. 2 offenbar mit n congruent; wendet man also S^ν an, so lässt sich ν so bestimmen, dass

$$Q' = 2\nu p + Q \equiv 0 \pmod{2n} \text{ oder } \pmod{n}$$

zutrifft, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Schreiben wir daraufhin $Q' = nq$, so wird $q \equiv n \pmod{2}$. Nun hat doch unsere so erhaltene Form (p, nq, R) die Determinante n, so dass

$$n^2q^2 - 4pR = -n$$

ist und also n in $4R$ aufgeht. Benennen wir den Quotienten von $4R$ und n durch s, so ist in $\left(p,\ nq,\ \frac{ns}{4}\right)$ thatsächlich eine Form erreicht, die mit 2 multipliciert die Gestalt (2) ergiebt.

Ist $n \equiv 1 \pmod{4}$, so haben wir mit den ursprünglichen Classen der Determinante $-4n$ zu thun. Der einzelnen solchen entnehmen wir zuvörderst eine Form (P, Q, R), deren dritter Coefficient R prim gegen $2n$ ist. Es lässt sich dann eine äquivalente Form finden, mit demselben R, deren mittlerer Coefficient $Q' = Q + 2\nu R$ durch geeignete Wahl des ν offenbar prim gegen n gemacht werden kann. Q' wird gerade sein; sollte diese Zahl aber durch 4 teilbar sein, so nehmen wir die eben gemeinte Zahl ν um n grösser, worauf Q' das Doppelte einer ungeraden gegen n primen Zahl ist. Zufolge der Gleichung

$$Q'^2 - 4P'R = -4n \tag{12}$$

ist mit Q' auch P' prim gegen n; reducieren wir aber diese Gleichung mod. 16, so kommt:

$$4 - 4P'R \equiv -4 \pmod{16},$$
$$P'R \equiv 2 \equiv P' \pmod{4},$$

so dass P' das Doppelte einer ungeraden, gegen n primen Zahl p ist. Jetzt gehe man noch von $(2p, Q', R)$ zur Form:

$$(2p,\ 4\nu p + Q',\ R')$$

über und wird durch geeignete Bestimmung des ν sofort eine Form der Gestalt (2) erreicht haben.

Es bleibt allein noch der Fall $n = 4h + 2$ mit den ursprünglichen Classen der Determinante $-4n$. Indem wir genau wie soeben verfahren, wählen wir aus der einzelnen Classe zuvörderst eine Form mit einem gegen $2n$ primen R. Es giebt alsdann eine äquivalente Form mit dem gleichen R und $Q' = Q + 2\nu R$, wobei wir mühelos

v so bestimmen können, dass Q' prim gegen $\frac{n}{2}$ aber durch 4 teilbar ist. Die jetzt wieder gültige Gleichung (12) reduciere man mod. 16 und wird finden, dass P' das Doppelte einer ungeraden gegen $\frac{n}{2}$ primen Zahl p ist. Von hier aus gelangt man nun ohne weiteres in gewohnter Art zum Schlusse. —

§. 7. Von der Mannigfaltigkeit der im Falle II auftretenden Functionssysteme $\mathsf{X}_\alpha(u, v)$.

Die Sätze des vorigen Paragraphen werden wir jetzt benutzen, um in den Fällen II und III beim einzelnen n die Gesamtmannigfaltigkeit der Functionssysteme X_α in ähnlicher Weise zu charakterisieren, wie dies schon oben für den Fall I geschah. Wir verfahren dabei genau so, wie in § 4 beim Falle I, d. h. wir transformieren simultan die Summationsbuchstaben und die Variabeln u, v in einem ersten X_α-System vermöge einer jetzt in Betracht kommenden Substitution V (für welche wir die bisherige Bezeichnungsweise beibehalten); indem wir die ξ, η in den Summationsbedingungen mit transformieren, wird wieder am Werte des X_α nichts geändert; daraufhin sehen wir nach, ob die neue Gestalt der X_α vielleicht wieder unmittelbar zu den X_α' der transformierten Form $f'(\xi, \eta) = f(\xi', \eta')$ hinführt oder nicht.

Um zuvörderst vom Falle II zu handeln, so bildeten da die Substitutionen V im allgemeinen die durch $b \equiv 0 \pmod{n}$, $c \equiv 0 \pmod{2}$ definierte $\Gamma_{3\psi}$. Nur im Falle $n = 8h + 3$ stellte die $\Gamma_{3\psi}$ erst den dritten Teil aller V, da die V jetzt mod. 2 keinen Einschränkungen unterliegen. Die Γ_3 der zweiten Stufe mit $c \equiv 0 \pmod{2}$ besitzt nun ein Polygon F_3, welches in Fig. 71, I p. 289, dargestellt ist; ein zugehöriges Repräsentantensystem besteht aus den Substitutionen:

$$v_0 \equiv 1, \quad v_1 \equiv \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 \equiv \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} \pmod{2}.$$

Ist $n = 8h + 3$, so haben wir dieserhalb neben den Substitutionen V der $\Gamma_{3\psi}$ noch zwei weitere Classen von Substitutionen V_1, V_2 auszuüben, die durch die Bedingungen definiert sind:

$$(1) \qquad \begin{cases} (V_1) \quad b \equiv 0 \pmod{n}, \quad c \equiv 1, \quad d \equiv 0 \pmod{2}, \\ (V_2) \quad b \equiv 0 \pmod{n}, \quad c \equiv 1, \quad d \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

Man schreibe nun gerade wie in (14) p. 336:

$$\mathsf{X}_{a\alpha}(u', v') = \frac{2\pi}{\omega_2} e^{\frac{\eta_2}{4\omega_2} f(u', v')} \sum_{\xi', \eta'} (-1)^{\xi'} r^{\frac{f(\xi', \eta')}{4n}} e^{\frac{\pi i}{\omega_2}(\eta' u' - \xi' v')},$$

$$\xi' \equiv -a\alpha \pmod{n}, \quad \eta' \equiv 1 \pmod{2}.$$

Geht man zu den ursprünglichen ξ, η zurück und beachtet, dass b durch n teilbar, a also prim gegen n ist, so folgt:

$$(2)\qquad \mathsf{X}_{a\alpha}(u', v') = \frac{2\pi}{\omega_2} e^{\frac{\eta_2}{4\omega_2}f'(u,v)} \sum (-1)^{a\xi+b\eta} r^{\frac{f'(\xi,\eta)}{4n}} e^{\frac{\pi i}{\omega_2}(\eta u - \xi v)},$$

$$(3)\qquad \xi \equiv -\alpha \pmod{n},\quad c\xi + d\eta \equiv 1 \pmod{2}.$$

Ist nunmehr V erstlich eine Substitution der $\Gamma_{3\psi}$, so ist:

$$c\xi + d\eta \equiv d\eta \equiv \eta \equiv 1,\quad a\xi + b\eta \equiv \xi + b \pmod{2},$$

und also führt der Vergleich mit (12) und (5) § 5 hier direct auf:

$$\mathsf{X}_\alpha'(u, v) = (-1)^b \mathsf{X}_{a\alpha}(au + bv, cu + dv),$$

so dass die zu den beiden Formen f, f' gehörigen X_α-Systeme wieder nur unwesentlich verschieden sind)*.

Es bleibt uns jetzt zweitens allein noch die Discussion der im Falle $n = 8h + 3$ zur Geltung kommenden Substitutionen V_1, V_2 der $\Gamma_{\psi(n)}$. Wenden wir aber eine dieser Substitutionen an, so zeigt die rechte Seite von (2) unter Rücksicht auf die zugehörigen Summationsbedingungen *nicht* die Gestalt der X_α, so dass nunmehr die X_α der Form f' nicht auf diejenigen der Form f zurückkommen. Wir werden hier vielmehr (den Bedingungen (1) der Substitution V_1 entsprechend) noch die Functionen $\mathsf{X}_\alpha^{(1)}$ der Form f durch:

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathsf{X}_\alpha^{(1)}(u, v) = \dfrac{2\pi}{\omega_2} e^{\frac{\eta_2}{4\omega_2}f(u,v)} \displaystyle\sum_{\xi,\eta} (-1)^\eta r^{\frac{f(\xi,\eta)}{4n}} e^{\frac{\pi i}{\omega_2}(\eta u - \xi v)}, \\ \xi \equiv -\alpha \pmod{n},\quad \xi \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

definieren, andrerseits aber die Functionen $\mathsf{X}_\alpha^{(2)}$ (den Bedingungen (1) der Substitution V_2 entsprechend) durch:

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathsf{X}_\alpha^{(2)}(u, v) = \dfrac{2\pi}{\omega_2} e^{\frac{\eta_2}{4\omega_2}f(u,v)} \displaystyle\sum_{\xi,\eta} (-1)^\xi r^{\frac{f(\xi,\eta)}{4n}} e^{\frac{\pi i}{\omega_2}(\eta u - \xi v)}, \\ \xi \equiv -\alpha \pmod{n},\quad \xi + \eta \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

Dann aber ist es eine ganz einfache Betrachtung, welche uns für V_1 zu der Formel:

$$(7)\qquad \mathsf{X}_{a\alpha}(u', v') = (-1)^a \mathsf{X}'^{(1)}_\alpha(u, v)$$

führt, für V_2 aber zu:

$$(8)\qquad \mathsf{X}_{a\alpha}(u', v') = (-1)^b \mathsf{X}'^{(2)}_\alpha(u, v).$$

Die beiden durch (5) und (6) definierten Grössenreihen stellen natürlich keineswegs neue Functionssysteme dar; sie sind vielmehr,

*) Vgl. die bezügliche Überlegung p. 337.

was eben durch (7) und (8) zum Ausdruck kommt, Functionen X_α, gebildet für gewisse mit f äquivalente Formen, und werden demnach selbstverständlich auch als Functionen von ω_1, ω_2 das gruppentheoretische Verhalten der X_α teilen. Aber um im Falle $n = 8h + 3$ alle wesentlich unterschiedenen X_α-Systeme zu erlangen, genügt es jetzt nicht mehr, jeder Classe eine *einzelne* Form zu entnehmen und für sie die X_α zu bilden: *vielmehr werden wir entweder die X_α für drei Formen f, f', f'' zu bilden haben, die wohl bezüglich $\Gamma_{\psi(n)}$, nicht aber schon bezüglich $\Gamma_{3\psi(n)}$ äquivalent sein sollen, oder aber wir bilden für die eine Form f neben den X_α auch noch die beiden Functionssysteme $X_\alpha^{(1)}$, $X_\alpha^{(2)}$, wie sie in* (5) *und* (6) *definiert sind.*

Einzig der Fall $n = 3$ spielt hier eine leicht erkennbare Ausnahmerolle. Es giebt nämlich nur eine Classe von Formen $2^{-1}f(\xi, \eta)$ der Determinante $D = -3$ und die zugehörigen repräsentierenden Punkte der positiven ω-Halbebene sind die mit $\omega = \varrho$ äquivalenten Ecken (cf. I p. 250). Jetzt wird $f(\xi, \eta)$ durch drei Substitutionen V_1, V_1^2, $V_1^3 = 1$ in sich transformiert, die mod. 2 reduciert auf

$$V_1 \equiv \begin{pmatrix}1, 1\\ 1, 0\end{pmatrix}, \quad V_1^2 \equiv \begin{pmatrix}0, 1\\ 1, 1\end{pmatrix}, \quad V_1^3 \equiv 1$$

führen (cf. I p. 281). Von diesen drei Substitutionen gehört nur *eine*, nämlich $V_1^3 = 1$, der $\Gamma_{3\psi}$ an, so dass der Zusatz von V_1 und V_1^2 zu $\Gamma_{3\psi}$ die Γ_ψ herstellen wird. *Die drei quadratischen Formen f, f', f'' des im vorigen Absatze formulierten Resultates und also auch die drei zugehörigen X_α-Systeme werden demnach für $n = 3$ identisch ausfallen.*

Da im analytischen Ausdruck eines einzelnen jetzt in Rede stehenden X_α neben ξ, η immer auch die Combination $\xi, -\eta$ zu nehmen ist, so erledigt sich die *uneigentliche* Äquivalenz der Formen f sofort. Setzen wir nämlich

$$f' = \left(2p, -2nq, \frac{ns}{2}\right)$$

und nennen die zugehörige Grösse (12) p. 339 wieder X_α', so ist offenbar:

$$X_\alpha'(u, v) = X_\alpha(-u, v). \tag{9}$$

Wenn wir hiernach alles Bisherige zusammenfassen, so entspringt das folgende, wiederum indirect zu formulierende Schlussresultat: *Die Anzahl wesentlich unterschiedener X_α-Systeme bei ungeraden n und p ist nicht grösser als die Anzahl ambiger vermehrt um die halbe Anzahl nicht-ambiger ursprünglicher Formclassen der Determinante $D = -4n$ oder $D = -n$, je nachdem $n = 4h + 1$ oder $4h + 3$ ist; allein im Falle $n = 8h + 3$ mit $h > 0$ ist diese Zahl zu verdreifachen, um die obere Grenze für die Anzahl der unterschiedenen X_α-Systeme zu gewinnen.*

§ 8. Von der Mannigfaltigkeit der im Falle III auftretenden Functionssysteme $\mathsf{X}_\alpha(u, v)$.

In ganz analoger Weise erledigen wir endlich den allein noch rückständigen Fall der zu den *geraden* Zahlen n gehörenden X_α-Systeme. Wir bilden uns wieder die zu der Form $f(\xi, \eta)$ gehörenden X_α, sowie andrerseits die X_α', welche zu der mit f äquivalenten Form f' gehören. Durch eine den früheren Fällen analoge Rechnung, die wir wohl nicht ins einzelne vorzuführen brauchen, gewinnen wir von (17) p. 340 aus:

$$(1)\qquad \mathsf{X}_\alpha(u', v') = \frac{2\pi}{\omega_2} \cdot e^{\frac{\eta_2}{4\omega_2} f'(u,v)} \sum_{\xi,\eta} (-1)^{\frac{c\xi + d\eta - 1}{2}}\, r^{\frac{f'(\xi,\eta)}{4n}}\, e^{\frac{\pi i}{\omega_2}(\eta u - \xi v)}$$

mit den Summationsbedingungen:

$$(2)\qquad a\xi + b\eta \equiv -\alpha \pmod{n},\quad c\xi + d\eta \equiv 1 \pmod{2}.$$

Nun gehöre erstlich die Substitution V der in § 6 bestimmten $\Gamma_{2\psi}$ an, so ist vor allen Dingen c eine gerade Zahl, und man stellt daraufhin mit Rücksicht auf (6) p. 342 mühelos die Congruenzen fest:

$$c\xi + d\eta \equiv \eta \equiv 1 \pmod{2},$$
$$\xi \equiv -d\alpha - b \pmod{n},$$

sowie demnächst die weiteren Congruenzen:

$$2\xi \equiv 2d\alpha + 2b \equiv 2(\alpha + b) \pmod{4},$$

$$\left.\begin{aligned} c\xi + d\eta - 1 &\equiv \frac{c}{2}\cdot 2\xi + (d-1) + \eta - 1 \\ c\xi + d\eta - 1 &\equiv c(\alpha + b) + (d-1) + \eta - 1 \end{aligned}\right\} \pmod{4}.$$

Für den Fall, dass V in $\Gamma_{2\psi}$ enthalten ist, besteht demnach einfach die Relation:

$$(3)\qquad \mathsf{X}_\alpha(u', v') = (-1)^{\frac{c}{2}(b+\alpha) + \frac{d-1}{2}}\, \mathsf{X}'_{d\alpha + b}(u, v).$$

Ist n das *Vierfache einer ungeraden Zahl*, so enthält die $\Gamma_{2\psi}$ erst die Hälfte aller Substitutionen V, und hier haben wir weiter noch diejenigen V zu prüfen, welche durch die Bedingung (8) p. 343 definiert sind. Nunmehr liefert die zweite Congruenz (2)

$$\xi \equiv 1 \pmod{2},$$

die erste Congruenz (2) dagegen ist, da a nur noch prim gegen $\frac{n}{4}$ ist, in die zwei Congruenzen zu zerlegen

$$\xi \equiv -d\alpha \left(\text{mod. } \frac{n}{4}\right),\quad \eta \equiv c(a + \alpha) \pmod{4}.$$

Mit ihrer Hülfe ergiebt sich gleich weiter:

$$\left.\begin{array}{l} c\xi + d\eta - 1 \equiv \xi(c-1) + (\xi - 1) + dc(a+\alpha) \\ c\xi + d\eta - 1 \equiv (c-1) + (\xi - 1) + cd\alpha \end{array}\right\} \text{(mod. 4)}.$$

Bei dieser Sachlage sind wir genötigt, die nachfolgende neue Reihenentwicklung einzuführen:

$$(4)\qquad \begin{cases} X_\alpha^{(1)}(u, v) = \dfrac{2\pi}{\omega_2}\, e^{\frac{\eta_2}{4\omega_2} f(u,v)} \displaystyle\sum_{\xi,\eta} (-1)^{\frac{\xi-1}{2}}\, r^{\frac{f(\xi,\eta)}{4n}}\, e^{\frac{\pi i}{\omega_2}(\eta u - \xi v)}, \\ \xi \equiv -\alpha \left(\text{mod.}\ \dfrac{n}{4}\right), \quad \xi \equiv 1 \ (\text{mod.}\ 2), \quad \eta \equiv \alpha \ (\text{mod.}\ 4). \end{cases}$$

Alsdann wird nämlich zufolge der vorausgeschickten Rechnungen:

$$(5)\qquad X_\alpha(u', v') = (-1)^{\frac{c-1}{2} + \alpha \cdot \frac{d}{2}} X'^{(1)}_\beta(u, v),$$

wobei der mod. n zu nehmende Index β sich aus den Congruenzen bestimmt:

$$(6)\qquad \beta \equiv d\alpha \left(\text{mod.}\ \frac{n}{4}\right), \quad \beta \equiv c(a+\alpha) \ (\text{mod.}\ 4).$$

Merken wir uns also das Resultat: *Um für $n = 8h + 4$ alle unterschiedenen X_α-Systeme zu erhalten, entnehme man entweder der einzelnen Formclasse zwei bezüglich der $\Gamma_{\psi(n)}$, aber nicht schon bezüglich $\Gamma_{2\psi(n)}$ äquivalente Formen f, f' und bilde die beiden zugehörigen X_α-Systeme oder man bilde für die einzelne Form, etwa f, neben den X_α auch noch die Functionen $X_\alpha^{(1)}$.*

Endlich umfasst bei allen *durch* 8 *teilbaren* n die $\Gamma_{2\psi}$ wieder nur die Hälfte aller Substitutionen V, und es gilt hier noch, die Wirkung der durch (10) p. 344 definierten V zu prüfen. Hier ist unter den vier Zahlen a, b, c, d nur die zweite gerade, so dass die Bedingungen (2) nunmehr:

$$\xi \equiv \alpha, \quad \eta \equiv 1 - \alpha \ (\text{mod. } 2)$$

liefern. Wir schreiben daraufhin vor allen Dingen die zweite Congruenz (10) p. 344 genauer in der Gestalt:

$$b \equiv \varepsilon \frac{n}{4} \ (\text{mod. } n),$$

wo also ε entweder $+1$ oder -1 ist. Die erste Bedingung (2) giebt nun:

$$a\xi + \varepsilon \frac{n}{4} \eta \equiv -\alpha \ (\text{mod. } n),$$

während man andrerseits mod. 4 leicht die nachfolgenden Congruenzen bestätigen wird:

$$\begin{aligned} c\xi + d\eta - 1 &\equiv ac(b\eta - \alpha) + (d-1)\eta + \eta - 1 \\ &\equiv -ac\alpha + abc(1-\alpha) + (d-1)(1-\alpha) + \eta - 1 \\ &\equiv -\alpha(ac+1) + (2d - a - 1)(1-\alpha) + (\eta - 1 + \alpha). \end{aligned}$$

Man führe jetzt für den vorliegenden Fall die neue Reihenentwicklung ein:

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathsf{X}_\alpha^{(\varepsilon)}(u,v) = \dfrac{2\pi}{\omega_2} e^{\frac{\eta_2}{4\omega_2} f(u,v)} \sum\limits_{\xi,\eta} (-1)^{\frac{\eta-1+\alpha}{2}} r^{\frac{f(\xi,\eta)}{4n}} e^{\frac{\pi i}{\omega_2}(\eta u - \xi v)} \\ \xi + \varepsilon \cdot \dfrac{n}{4}\eta \equiv -\alpha \pmod{n}, \quad \eta \equiv 1 - \alpha \pmod{2}. \end{cases}$$

Es könnte scheinen, dass hiermit zwei verschiedene Grössensysteme eingeführt sind, den beiden Werten $\varepsilon = +1$ und $\varepsilon = -1$ entsprechend. Dies ist aber keineswegs der Fall; denn man bestätigt sofort:

$$(8)\qquad \mathsf{X}_\alpha^{(-1)}(u,v) = \mathsf{X}_\beta^{(+1)}(u,v), \quad \beta \equiv (\alpha - 1)\frac{n}{2} + \alpha \pmod{n}.$$

Von (1) und (2) aus erhält man nunmehr mit Hülfe der vorausgehend entwickelten Congruenzen:

$$(9)\qquad \mathsf{X}_\alpha(u', v') = (-1)^{\alpha\frac{ac+1}{2} + \left(d - \frac{a+1}{2}\right)(1-\alpha)} \mathsf{X}'^{(\varepsilon)}_\beta(u,v),$$

wobei sich der mod. n zu nehmende untere Index β, sowie der Zahlwert von ε aus den Congruenzen bestimmt:

$$(10)\qquad a\beta \equiv \alpha \pmod{n}, \quad a\varepsilon \equiv \frac{4b}{n} \pmod{4}.$$

Bezüglich der Erlangung aller X_α-Systeme bei $n = 8h$ gilt demnach Wort für Wort dieselbe Vorschrift wie bei $n = 8h + 4$.

Die Betrachtung der uneigentlichen Äquivalenz der Formen f führt uns zu ganz analogen Verhältnissen, wie in den Fällen I und II. Wir brauchen hierauf demnach nicht ausführlich einzugehen, formulieren vielmehr gleich folgendes abschliessende Resultat: *Ist n das Doppelte einer ungeraden Zahl, so ist die Anzahl wesentlich unterschiedener X_α-Systeme höchstens gleich der Anzahl ambiger ursprünglicher Formclassen der Determinante $D = -4n$, vermehrt um die halbe Anzahl nicht-ambiger Classen dieser Art; haben wir dagegen ein durch 4 teilbares n, so ist die Zahl der X_α-Systeme höchstens gleich der Anzahl nicht-ambiger ursprünglicher Classen der Determinante $D = -n$, vermehrt um die doppelte Anzahl der ambigen Classen dieser Art.* —

Hiermit haben wir für alle Fälle die Leistungsfähigkeit der Bilinearprocesse des § 2 erschöpfend charakterisiert.

§ 9. Von den Modulformen n^{ter} Stufe A_α, z_α, y_α, x_α, ..., die aus den allgemeinen $\mathsf{X}_\alpha(u, v)$ entspringen*).

Es lassen sich die Functionen $\mathsf{X}_\alpha(u,v)$, wie wir schon andeuteten, für die Zwecke der engeren Theorie der Modulformen in derselben

*) Die nachfolgenden Entwicklungen rühren vom Herausgeber her; das

Weise verwenden, wie die $X_\alpha(u)$ im vorigen Kapitel. Man entwickelt $\mathsf{X}_\alpha(u, v)$ in eine Reihe nach ansteigenden Potenzen von u und v und greife aus allen n, den wechselnden Werten von α entsprechenden Reihen die Coefficienten eines einzelnen Gliedes, etwa $u^\lambda v^\mu$, auf. Diese werden ein System von Modulformen der Dimension

$$(1)\qquad \nu = -1 - \lambda - \mu$$

bilden, deren gruppentheoretisches Verhalten sich wieder unmittelbar aus demjenigen der X_α ableiten lässt.

Um dies näher zu untersuchen, verabreden wir für die Potenzentwicklung von X_α die nachfolgende Bezeichnungsweise:

$$(2)\qquad \mathsf{X}_\alpha(u, v) = \mathsf{A}_\alpha + z_\alpha^{(1)} u + z_\alpha^{(2)} v + \frac{1}{2} y_\alpha^{(1)} u^2 + y_\alpha^{(2)} uv + \\ + \frac{1}{2} y_\alpha^{(3)} v^2 + \frac{1}{6} x_\alpha^{(1)} u^3 + \cdots.$$

Man bemerke vor allem, dass wir hierbei in voller Übereinstimmung mit der im vorangegangenen Kapitel gebrauchten Bezeichnungsweise geblieben sind. Erstlich ist nämlich $X^{(1)}$ nichts anderes als die ursprüngliche σ-Function, so dass $\mathsf{X}_\alpha^{(1,n)}$, abgesehen von etwaigen Normierungsfactoren, das Product:

$$\sigma(u_1) X_\alpha^{(n)}(u_2) = \left(u_1 - \frac{g_2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} u_1^5 + \cdots\right)\left(z_\alpha + y_\alpha u_2 + \frac{1}{2} x_\alpha u_2^2 + \cdots\right)$$

vorstellt, dessen Entwicklung unter Gebrauch der im vorigen Kapitel gemeinten $z_\alpha, y_\alpha, \ldots$ zu:

$$(3)\qquad \mathsf{X}^{(1,n)} = z_\alpha u_1 + y_\alpha u_1 u_2 + \frac{1}{2} x_\alpha u_1 u_2^2 + \cdots$$

führt. Wir unterlassen, hier auch noch die Substitution (8) p. 339 durchzuführen, vermöge deren wir oben die u, v einführten; denn es ist schon jetzt deutlich, dass in (3) wie in (2) die Coefficienten der linearen Glieder durch z, diejenigen der quadratischen Glieder durch y etc. bezeichnet sind. Ein von u, v unabhängiges Glied tritt in (3) nicht auf; jedoch fällt es, wie wir noch sehen werden, keineswegs bei allen $\mathsf{X}^{(p,n)}$ fort. So oft aber ein Absolutglied auftritt, stellt dasselbe eine Modulform $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension vor; wir haben dieserhalb in (2) für dieses Glied dieselbe Bezeichnung A_α gebraucht, die wir auch schon in § 3, p. 329, für Moduln der Dimension -1 anwendeten.

Die Grössen X_α rubricieren sich, insofern sie im wesentlichen die zu $p = 1$ gehörenden Functionen $\mathsf{X}^{(p,n)}$ sind, unter die Fälle II und

Gleiche gilt übrigens von den arithmetischen Untersuchungen des § 6, welche sich für eine erschöpfende Ableitung der Sätze in § 7 und 8 als erforderlich erwiesen.

III der voraufgehenden Entwicklungen. Als zugehörige binäre quadratische Form f hat man nach (2) § 6 zunächst bei *ungeradem* n:

$$f(\xi, \eta) = 2\xi^2 + 2nq\xi\eta + \frac{ns}{2}\eta^2,$$

wo q ungerade ist. Hier kann man aber sogleich zu einer äquivalenten Form mit $q = 1$ übergehen, *so dass sich als die für die Moduln* z_α, y_α, *etc. des vorigen Kapitels im Sinne der jetzigen Auffassung charakteristische quadratische Form:*

$$(4) \qquad f(\xi, \eta) = 2\xi^2 + 2n\xi\eta + \frac{n(n+1)}{2}\eta^2$$

ergiebt; für gerade n *reiht sich in derselben Bedeutung die Form an:*

$$(5) \qquad f(\xi, \eta) = 2\xi^2 + \frac{n}{2}\eta^2.$$

Bezüglich der Anzahl unterschiedener Moduln des einzelnen Systems treffen wir allgemein gerade die nämlichen Verhältnisse an, die für die speciellen $X^{(1,n)}$ aus dem vorigen Kapitel bekannt sind. Durch einen Blick auf die analytischen Darstellungen der X_α in den drei immer unterschiedenen Fällen bestätigt man nämlich:

$$X_\alpha(-u, -v) = (-1)^{n+1} X_{n-\alpha}(u, v).$$

Es treten demgemäss hier gerade wieder jene Reductionen ein, welche wir seinerzeit durch die Formeln (13) etc. p. 267 charakterisierten. *Ist also* n *ungerade, so haben wir Systeme zu je* $\frac{n+1}{2}$ *Moduln* A_α, *zu je* $\frac{n+1}{2}$ *Moduln* y_α *etc., dagegen Systeme von* $\frac{n-1}{2}$ *Grössen* z_α, x_α *etc.;* dabei sind jene Moduln immer von ungerader, diese von gerader Dimension. *Ist* n *gerade, so haben wir Systeme von* $\frac{n-2}{2}$ *Moduln* A_α, y_α *etc., dagegen Systeme von* $\frac{n+2}{2}$ *Grössen* z_α *etc.*

Die lineare Substitutionsgruppe, zu welcher ein einzelnes unserer Modulsysteme Anlass giebt, wird bei dieser Sachlage immer wieder eine der vier Gestalten darbieten, welche wir im Schlussparagraphen des vorigen Kapitels kennen lernten (p. 313); dabei werden freilich die Substitutionen S und T aus den damals angegebenen Gleichungen jetzt dadurch herzustellen sein, dass wir, allgemein zu reden, ε durch ε^p ersetzen. Im Falle II sind die Moduln des einzelnen Systems übrigens vorher erst noch durch eine geeignete Potenz von $\sqrt[\,]{\Delta}$ zu Grössen n^{ter} Stufe zu normieren, worüber im nächsten Paragraphen das Nähere angegeben wird.

Wir fügen hier endlich über den algebraischen Charakter der gewonnenen Modulformen noch folgende, für spätere Untersuchungen fundamentale Überlegung an: Die Reihenentwicklung, welche ein ein-

zelnes X_α darstellt, war bis auf multiplicative Constante eine ganze binäre Verbindung von ϑ-Reihen; als solche wird die einzelne X_α-Entwicklung für alle im „Innern" der Halbebene gelegenen Periodenquotienten $\omega_1 : \omega_2$ unbedingt convergent sein. Die einzelne unserer Modulformen kann hiernach im „Innern" des Polygons n^{ter} Stufe nicht unstetig werden. Andrerseits werden wir gleich sehen, dass die Reihenentwicklungen unserer Moduln nach r Potenzen mit negativen Exponenten überall nicht aufweisen. Demgemäss wird auch in der Polygonspitze $\omega = i\infty$ ein Unstetigkeitspunkt für keine der in Rede stehenden Modulformen sich finden können, ein Satz, den man sofort auch für die übrigen Polygonspitzen formuliert, da sich ja die Moduln des einzelnen Systems bei Ausübung irgend welcher Modulsubstitutionen stets linear reproducieren. Wir treffen hier also auf die gleichen Verhältnisse, wie seinerzeit bei den Teilwerten $\wp_{\lambda,\mu}$ und $\wp'_{\lambda,\mu}$, und da übrigens der Charakter der A_α, z_α etc. als *algebraischer* Modulformen aus dem Bisherigen unmittelbar evident ist, so gewinnen wir das Resultat: *Die Moduln* A_α, z_α, y_α *etc. sind ohne Ausnahme ganze algebraische Modulformen.* Die grosse Tragweite dieses Satzes bei unseren späteren ausführlichen Untersuchungen der Grössen A_α, z_α, ... wird man sofort ermessen.

§ 10. Reihenentwicklungen für die Modulformen A_α, z_α, y_α etc. im Falle I.

Um ausführliche analytische Darstellungen der Modulformen A_α etc. zu erhalten, wird man die Entwicklungen der $X_\alpha(u, v)$ nach ansteigenden Potenzen von u und v wirklich herstellen müssen. Dabei ist die Exponentialreihe zweimal anzuwenden, so z. B. bei (7) p. 335 erstlich für den Exponentialfactor vor dem Summenzeichen, sodann aber für die von u und v abhängende Exponentialgrösse unter dem Summenzeichen. Wir illustrieren diese Rechnungen etwa am Falle I, auf den sich die eben bereits citierte Formel (7) p. 335 bezieht.

Durch elementare Betrachtung erhalten wir zunächst:

$$
\begin{aligned}
(1) \quad X_\alpha(u, v) = \frac{2\pi}{\omega_2} \sum_{\xi,\eta} r^{\frac{f(\xi,\eta)}{n}} \Big\{ & 1 + i\frac{2\pi}{\omega_2}(\eta u - \xi v) \\
& + \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \left[\left(\frac{\eta_2\omega_2}{4\pi^2}p - \eta^2\right)u^2 + \left(\frac{\eta_2\omega_2}{2\pi^2}nq + 2\xi\eta\right)uv + \left(\frac{\eta_2\omega_2}{2\pi^2}ns - \xi^2\right)v^2\right] \\
& + \frac{i}{6}\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^3 \left[\left(\frac{3\eta_2\omega_2}{4\pi^2}p - \eta^2\right)\eta u^3 + \left(\frac{3\eta_2\omega_2}{4\pi^2}(2nq\eta - p\xi) + 3\xi\eta^2\right)u^2 v \right. \\
& \left. + \left(\frac{3\eta_2\omega_2}{2\pi^2}(ns\eta - nq\xi) - 3\xi^2\eta\right)uv^2 - \left(\frac{3\eta_2\omega_2}{2\pi^2}ns - \xi^2\right)\xi v^3\right] + \cdots \Big\}.
\end{aligned}
$$

Wenn wir uns dann noch ein paar ganz unwesentliche Änderungen in der Bezeichnungsweise erlauben wollen, *so werden im Falle* I *folgende Darstellungen der in Rede stehenden Modulformen entspringen:*

1) *für das System* $(-1)^{\text{ter}}$ *Dimension:*

$$\mathsf{A}_\alpha = \frac{2\pi}{\omega_2} \sum_{\xi, \eta} r^{\frac{f(\xi, \eta)}{n}} \tag{2}$$

mit der Bedingung: $\xi \equiv -\alpha \pmod{n}$, *die auch in den folgenden Nummern immer dieselbe bleibt;*

2) *für die beiden Systeme* $(-2)^{\text{ter}}$ *Dimension:*

$$z_\alpha^{(1)} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \sum_{\xi, \eta} \xi \cdot r^{\frac{f(\xi, \eta)}{n}}, \quad z_\alpha^{(2)} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \sum_{\xi, \eta} \eta \cdot r^{\frac{f(\xi, \eta)}{n}}; \tag{3}$$

3) *für die drei Systeme* $(-2)^{\text{ter}}$ *Dimension:*

$$\left\{\begin{aligned} y_\alpha^{(1)} &= \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^3 \left\{ \sum_{\xi, \eta} \xi^2 \cdot r^{\frac{f(\xi, \eta)}{n}} - ns \cdot \frac{\omega_2 \eta_2}{2\pi^2} \cdot \sum_{\xi, \eta} r^{\frac{f(\xi, \eta)}{n}} \right\}, \\ y_\alpha^{(2)} &= \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^3 \left\{ 2\sum_{\xi, \eta} \xi\eta \cdot r^{\frac{f(\xi, \eta)}{n}} + nq \cdot \frac{\omega_2 \eta_2}{2\pi^2} \cdot \sum_{\xi, \eta} r^{\frac{f(\xi, \eta)}{n}} \right\}, \\ y_\alpha^{(3)} &= \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^3 \left\{ \sum_{\xi, \eta} \eta^2 \cdot r^{\frac{f(\xi, \eta)}{n}} - \frac{1}{2} p \cdot \frac{\omega_2 \eta_2}{2\pi^2} \cdot \sum_{\xi, \eta} r^{\frac{f(\xi, \eta)}{n}} \right\}; \end{aligned}\right. \tag{4}$$

4) *für die vier Systeme* $(-4)^{\text{ter}}$ *Dimension:*

$$\left\{\begin{aligned} x_\alpha^{(1)} &= \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \left\{ \sum_{\xi, \eta} \xi^3 \cdot r^{\frac{f(\xi, \eta)}{n}} - \frac{3\eta_2 \omega_2}{2\pi^2} \cdot \sum_{\xi, \eta} ns\xi \cdot r^{\frac{f(\xi, \eta)}{n}} \right\}, \\ x_\alpha^{(2)} &= \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \left\{ \sum_{\xi, \eta} 3\xi^2\eta \cdot r^{\frac{f(\xi, \eta)}{n}} + \frac{3\eta_2 \omega_2}{2\pi^2} \cdot \sum_{\xi, \eta} (nq\xi - ns\eta) \cdot r^{\frac{f(\xi, \eta)}{n}} \right\}, \\ x_\alpha^{(3)} &= \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \left\{ \sum_{\xi, \eta} 3\xi\eta^2 \cdot r^{\frac{f(\xi, \eta)}{n}} - \frac{3\eta_2 \omega_2}{4\pi^2} \cdot \sum_{\xi, \eta} (p\xi - 2nq\eta) \cdot r^{\frac{f(\xi, \eta)}{n}} \right\}, \\ x_\alpha^{(4)} &= \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \left\{ \sum_{\xi, \eta} \eta^3 \cdot r^{\frac{f(\xi, \eta)}{n}} - \frac{3\eta_2 \omega_2}{4\pi^2} \cdot \sum_{\xi, \eta} p\eta \cdot r^{\frac{f(\xi, \eta)}{n}} \right\}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Mag es genügen, hier bis zur Dimension -4 gegangen zu sein.

Auf den rechten Seiten der mitgeteilten Formeln tritt innerhalb der Klammern ausser Potenzreihen nach r noch der Bestandteil $\frac{3\omega_2\eta_2}{\pi^2}$ in erster, weiterhin aber auch in höheren Potenzen auf. Wenn man will, kann man für denselben noch die Potenzentwicklung:

(6) $$\frac{3\omega_2\eta_2}{\pi^2} = 1 - 24\sum_{m=1}^{\infty}\Phi(m)\cdot r^m$$

eintragen, wo $\Phi(m)$ in gewohnter Weise die Summe aller Divisoren von m bedeutet; es ist diese Gleichung eine unmittelbare Folge aus der ersten Formel (2) in I p. 153.

Vor allem einfach haben sich die analytischen Ausdrücke für A_α und z_α gestaltet. Bereits das einzelne $y_\alpha^{(i)}$ ist aber in (4) immer durch zwei Reihen dargestellt; von beiden ist die zweite (bis auf numerische Bestandteile) für alle drei y_α die gleiche, und man sieht, dass dieselbe das Product der Grösse (6) und $\frac{\omega_2}{2\pi}A_\alpha$ vorstellt. Es bietet sich nun hier der folgende Gedankengang dar: Die drei Systeme der $y_\alpha^{(i)}$ sind von gleicher Dimension und substituieren sich vor allem *cogredient*; bilden wir also die $\frac{n+1}{2}$ Grössen:

(7) $$y_\alpha = c_1 y_\alpha^{(1)} + c_2 y_\alpha^{(2)} + c_3 y_\alpha^{(3)},$$

wo die c drei (von α unabhängige) Constante sind, *so wird in* (7) *ein System von* $\frac{n+1}{2}$ *Moduln* y_α *der Dimension* -3 *definiert sein, die wiederum mit den* $y_\alpha^{(i)}$ *cogredient sind.* Jetzt lassen sich offenbar die c in *zwei* wesentlich verschiedenen Weisen so bestimmen, dass in den Darstellungen der zugehörigen y_α der Bestandteil:

(8) $$\frac{\omega_2\eta_2}{2\pi^2}\sum_{\xi,\eta} r^{\frac{f(\xi,\eta)}{n}}$$

verschwunden ist. *Die beiden so gemeinten* y_α*-Systeme „von einfacher analytischer Darstellung" sind:*

(9) $$\begin{cases} y_\alpha = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^3 \sum_{\xi,\eta}(q\xi^2 + 2s\xi\eta) r^{\frac{f(\xi,\eta)}{n}}, \\ y_\alpha = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^3 \sum_{\xi,\eta}(p\xi\eta + nq\eta^2) r^{\frac{f(\xi,\eta)}{n}}. \end{cases}$$

Eine ganz analoge Überlegung knüpft sich an die Formelgruppe (5); hier sind jedoch die *zwei* Grössen zu eliminieren, welche aus Multiplication von (6) mit der einzelnen der in (3) enthaltenen Reihen hervorgehen. *Es finden sich so wieder zwei* x_α*-Systeme „von einfacher Darstellung", nämlich etwa:*

(10) $$\begin{cases} pq x_\alpha^{(1)} + ps x_\alpha^{(2)} - 2ns^2 x_\alpha^{(4)}, \\ p^2 x_\alpha^{(1)} - 2nps x_\alpha^{(3)} - 4n^2 qs x_\alpha^{(4)}; \end{cases}$$

im einzelnen Gliede der ausgeführten Reihenentwicklung findet sich demnach als Factor der betreffenden Potenz von r bez.

$$(11)\qquad \begin{cases} pq\cdot\xi^3 + 3ps\cdot\xi^2\eta - 2ns^2\cdot\eta^3, \\ p^2\cdot\xi^3 - 6nps\cdot\xi\eta^2 - 4n^2qs\cdot\eta^3. - \end{cases}$$

An die weiterhin folgenden Modulsysteme der Dimensionen $-5, \ldots$ lassen sich entsprechende Betrachtungen nicht mehr knüpfen. Freilich ist noch bei -5 die Anzahl der zu eliminierenden Bestandteile (nämlich 4) um eins geringer als die Zahl der Modulsysteme. Das Eliminationsresultat verschwindet indessen, wie die Rechnung zeigt, identisch. Höher hinauf wird aber die Anzahl der zu eliminierenden Grössen stets grösser als die Zahl unterschiedener Modulsysteme.

§ 11. Reihenentwicklungen der Moduln A_α etc. in den Fällen II und III. Umordnung nach ansteigenden Potenzen von r.

In den beiden Fällen der ungeraden p treffen wir ganz ähnliche Verhältnisse an, wie in dem soeben erledigten Falle. Es mag erlaubt sein, bei den Dimensionen -3 und -4 hier nur diejenigen Modulsysteme namhaft zu machen, welche sich in Ansehung der Einfachheit ihrer analytischen Darstellung an die Systeme (9) und (11) des vorigen Paragraphen anschliessen. *Wir finden dann durch elementare Rechnung als Modulsysteme des Falles* II *die nachfolgenden:*

1) *das eine System* $(-1)^{\text{ter}}$ *Dimension:*

$$(1)\qquad \mathsf{A}_\alpha = \frac{2\pi}{\omega_2}\sum_{\xi,\eta}(-1)^\xi r^{\frac{f(\xi,\eta)}{4n}};$$

2) *die beiden Systeme* $(-2)^{\text{ter}}$ *Dimension:*

$$(2)\qquad z_\alpha^{(1)} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2\sum_{\xi,\eta}(-1)^\xi\xi\cdot r^{\frac{f(\xi,\eta)}{4n}},\quad z_\alpha^{(2)} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2\sum_{\xi,\eta}(-1)^\xi\eta\cdot r^{\frac{f(\xi,\eta)}{4n}};$$

3) *die beiden Systeme* $(-3)^{\text{ter}}$ *Dimension:*

$$(3)\qquad \begin{cases} y_\alpha^{(1)} = \left(\dfrac{2\pi}{\omega_2}\right)^3\displaystyle\sum_{\xi,\eta}(-1)^\xi(2q\xi^2+s\xi\eta)\cdot r^{\frac{f(\xi,\eta)}{4n}}, \\ y_\alpha^{(2)} = \left(\dfrac{2\pi}{\omega_2}\right)^3\displaystyle\sum_{\xi,\eta}(-1)^\xi(2p\xi\eta+nq\eta^2)\cdot r^{\frac{f(\xi,\eta)}{4n}}; \end{cases}$$

4) *endlich die beiden Systeme* $(-4)^{\text{ter}}$ *Dimension, für welche wir der Kürze halber nur wieder den Factor der Potenz von* r *im einzelnen Summengliede anführen:*

$$(4)\qquad \begin{cases} (-1)^\xi(16pq\cdot\xi^3 + 12ps\cdot\xi^2\eta - ns^2\cdot\eta^3), \\ (-1)^\xi(4p^2\cdot\xi^3 - 3nps\cdot\xi\eta^2 - n^2qs\cdot\eta^3). \end{cases}$$

Als Summationsbedingung gilt in allen vier Fällen:

$$(5) \qquad \xi \equiv -\alpha \pmod{n}, \quad \eta \equiv 1 \pmod{2}.$$

Für die Anzahl unterschiedener Modulsysteme der einzelnen Art gelten natürlich die Angaben, welche wir seinerzeit bei den X_α-Systemen ausführlich formulierten. Wie wir schon dort erörterten, wird dann beim Übergang zu einer bezüglich $\Gamma_{8\psi}$ oder Γ_ψ äquivalenten Form f' das Modulsystem A_α direct in sich übergehen, während sich die beiden Systeme der z_α, wie auch die der y_α, der x_α, u. s. w. linear reproducieren. Diese Bemerkungen übertragen sich natürlich ohne weiteres auf die Modulsysteme der beiden Fälle I und III.

Während übrigens die Modulsysteme des vorigen Paragraphen ohne weiteres zur n^{ten} Stufe gehörten und als solche direct zu den bekannten Gestalten der Substitutionsgruppen (p. 313) hinführten, müssen die jetzt in Rede stehenden Systeme des Falles II zu diesem Ende erst einer Normierung mit einer geeigneten Potenz von $\sqrt[4]{\Delta}$ unterzogen werden. Wir werden etwa $\Delta^{\frac{\nu}{4}}$ hinzusetzen, wo ν eine möglichst kleine, aber nicht negative ganze Zahl ist; solchergestalt erreichen wir offenbar, dass auch die normierten Grössen *ganze* algebraische Modulformen n^{ter} Stufe sind. Den Zahlwert von ν stellen wir aus den Reihenentwicklungen (1) etc. leicht durch die Forderung fest, dass offenbar $f(\xi, \eta) + n\nu$ durch 4 teilbar sein muss; man hat also ν aus der Congruenz:

$$2p\xi^2 + 2nq\xi\eta + n\frac{s}{2}\eta^2 + n\nu \equiv 0, \pmod{4}$$

zu bestimmen. Dieselbe liefert, da p, n, q und η ungerade sind,

$$n\nu \equiv 2\xi^2 + 2\xi + 3n \cdot \frac{s}{2} \equiv -n \cdot \frac{s}{2},$$

$$\nu \equiv -\frac{1}{2}s, \pmod{4}.$$

Nun folgt aber andrerseits aus (1) p. 341

$$s \equiv p(nq^2 + 1) \equiv p(n+1), \quad \pmod{8},$$

so dass wir erhalten:

$$\nu \equiv -p \cdot \frac{n+1}{2}, \quad \pmod{4}.$$

Der Wert der ganzen Zahl ν ergiebt sich demgemäss aus der Tabelle:

$$(6) \qquad \begin{cases} n = 8h+1, & +3, & +5, & +7, \\ \nu = 2 + \left(\frac{-1}{p}\right), & 2, & 2 - \left(\frac{-1}{p}\right), & 0. \end{cases}$$

Letzten Endes haben wir für den Fall III *die nachfolgenden Modulsysteme:*

1) *das eine System* $(-1)^{\text{ter}}$ *Dimension:*

$$
(7)\qquad \mathsf{A}_\alpha = \frac{2\pi}{\omega_2}\sum_{\xi,\eta}(-1)^{\frac{\eta-1}{2}}\, r^{\frac{f(\xi,\eta)}{4n}};
$$

2) *die beiden Systeme der* $(-2)^{\text{ten}}$ *Dimension:*

$$
(8)\qquad \begin{cases} z_\alpha^{(1)} = \left(\dfrac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \displaystyle\sum_{\xi,\eta}(-1)^{\frac{\eta-1}{2}}\,\xi\cdot r^{\frac{f(\xi,\eta)}{4n}}, \\[2ex] z_\alpha^{(2)} = \left(\dfrac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \displaystyle\sum_{\xi,\eta}(-1)^{\frac{\eta-1}{2}}\,\eta\cdot r^{\frac{f(\xi,\eta)}{4n}}. \end{cases}
$$

Auch weiterhin ist gegenüber den Formeln (1) bis (4), äusserlich genommen, der einzige Unterschied der, dass an Stelle des Factors $(-1)^\xi$ unter den Summenzeichen überall $(-1)^{\frac{\eta-1}{2}}$ tritt; die Summationsbedingung (5) bleibt gleichfalls in unveränderter Gestalt bestehen. —

Um die Entwicklungen des § 3 allseitig verallgemeinert zu haben, werden wir mit den bislang mitgeteilten Reihenentwicklungen für unsere Moduln noch *Umordnungen nach ansteigenden Potenzen von* r vornehmen. Die dabei eintretenden ganzzahligen Entwicklungscoefficienten mögen wir als Functionen des jeweiligen Exponenten m wie oben jetzt allgemein durch $\chi(m)$ bezeichnen und wollen, um wenigstens eine erste nähere Unterscheidung zu besitzen, dem χ als unteren Index die Dimensionzahl der betreffenden Modulform anhängen. So erhalten wir z. B. im Falle I:

$$
(9)\qquad \mathsf{A}_\alpha = \frac{2\pi}{\omega_2}\sum_m \chi_1(m)\cdot r^{\frac{m}{n}},\quad m \equiv 2^{-1}p\alpha^2 \pmod{n},
$$

wo $\chi_1(m)$ die Anzahl derjenigen Darstellungen von m in der Gestalt:

$$
m = \frac{1}{2}p\xi^2 + nq\xi\eta + ns\eta^2
$$

ist, für welche $\xi \equiv -\alpha \pmod{n}$ ist. Oder um ein anderes Beispiel zu gebrauchen, so erhalten wir für das zweite System der z_α im Falle II:

$$
(10)\quad z_\alpha = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2\sum_m \chi_2(m)\cdot r^{\frac{m}{4n}},\ m \equiv 2p\alpha^2 + 2n\alpha + p\,\frac{n(n+1)}{2},\ (\text{mod. } 4n),
$$

wobei $\chi_2(m)$ definiert ist durch die Summe:

$$
(11)\qquad \chi_2(m) = \sum(-1)^\xi\eta,
$$

ausgedehnt über alle, den Bedingungen (5) genügenden Darstellungen von m in der Gestalt:

$$m = 2p\xi^2 + 2nq\xi\eta + \frac{ns}{2}\eta^2.$$

Man wird leicht in entsprechender Weise für die übrigen Modulsysteme Reihen nach ansteigenden Potenzen von r entwickeln und die Eigenart der dabei eintretenden Entwicklungscoefficienten, als arithmetischer Functionen der zugehörigen Exponenten m, formulieren.

Die hiermit gegebene Betrachtung der oft genannten Modulsysteme bietet übrigens noch nichts Abgeschlossenes dar. Vor allen Dingen haben wir überall nicht die Frage berührt, ob nicht das einzelne Modulsystem dadurch zum Fortfall kommt, dass die betreffenden Terme in den Potenzentwicklungen der bezüglichen $X_\alpha(u, v)$ überhaupt nicht auftreten. So fehlen im Falle $p = 1$, wie man in (3) p. 352 nachsehen wolle, die Systeme der A_α; auch werden in diesem Falle die beiden Systeme der z_α und ebenfalls diejenigen der y_α nicht wesentlich von einander verschieden sein, wie man leicht feststellt. Untersuchungen über etwaiges identisches Verschwinden der einzelnen Systeme oder über Identischwerden verschiedener Systeme lassen sich wohl zumeist nicht schwer durchführen; so z. B. beweist man leicht, dass die bei $n = 4h + 3$ eintretenden Systeme (9) der A_α niemals identisch verschwinden können, insofern die zugehörigen Entwicklungscoefficienten $\chi_1(m)$ immer wesentlich positive Zahlen sind. Inzwischen wollen wir derartige ergänzende Betrachtungen hier nicht ausführen. In der That soll es sich auch im folgenden nicht so sehr um einen systematischen Ausbau der hier besprochenen, analytischen Ergebnisse handeln; es sollen vielmehr wieder die principiellen *algebraischen* Überlegungen unserer früheren Modullehre in Kraft treten, wobei wir die Wendung auf eine *systematische Theorie der ganzen Modulformen* nehmen. Hierbei werden uns dann alle bis nun aus der Theorie der doppeltperiodischen Functionen gezogenen Ergebnisse als wertvolle Hülfsmittel der Rechnung willkommen sein.

Viertes Kapitel.

Formentheoretisch-analytische Ausführungen im Gebiete der niedersten Stufenzahlen*).

Im Voraufgehenden haben wir alle Vorbereitungen getroffen, um den am Schlusse des dritten Abschnitts in Bd. I unterbrochenen Gedankengang wieder aufzunehmen und mit Erfolg weiterzuführen. Die auf directen Riemann'schen Schlussweisen basierenden functionentheoretisch-algebraischen Ausführungen dehnten wir damals nur bis zur Stufe $n = 7$ aus. Bei den höheren Stufen konnten wir nämlich die zugehörigen Functionen nicht ohne weiteres in einer derart durchgebildeten Gestalt erkennen, dass daraufhin die endgültige Auflösung des functionentheoretischen Grundproblems für diese Stufen ausführbar gewesen wäre. Jetzt besitzen wir aber in den Teilwerten, den transformierten Moduln, endlich aber in den Grössensystemen A_α, z_α etc. des vorigen Kapitels durchaus specificierte Functionen einer beliebigen Stufenzahl, deren Werte aus den Reihenentwicklungen stets berechnet werden können; ausgerüstet mit diesen Mitteln, *werden wir der Behandlung des functionentheoretischen Grundproblems im Gebiete der Congruenzgruppen jetzt denjenigen Ausbau verleihen, der uns zur Zeit erreichbar scheint.*

Das erste in dieser Hinsicht anzustrebende Ziel wird offenbar sein müssen, dass wir für die Stufenzahlen $n \leq 7$ die Vermittlung herstellen zwischen den mit analytischer Rechnung geführten Entwicklungen der voraufgehenden Kapitel und den bezüglichen Resultaten von Bd. I. Indem wir aber hierbei überall die engste Beziehung der analytisch definierten Moduln zu jenen Grössensystemen gewahr werden, die in I jeweils als die einfachsten Modulfunctionen ihrer Stufen erkannt wurden, gewinnen unsere in dem vorliegenden Kapitel durchzuführenden Entwicklungen über die ersten sieben Stufenzahlen noch in anderer Hinsicht Bedeutung. Dadurch nämlich, dass wir die Moduln des Bd. I in den A_α, z_α etc. ausdrücken lernen, entspringen für erstere

*) Die Entwicklungen des vorliegenden Kapitels rühren, soweit andere Angaben nicht ausdrücklich gemacht sind, vom Herausgeber her.

Grössen *analytische Bildungsgesetze* in Gestalt von Potenzreihenentwicklungen nach r. Die Aufstellung derartiger expliciter Darstellungen für die Congruenzmoduln bezeichneten wir aber bereits in I p. 762 als eine auch für die niederen Stufen noch zu lösende Aufgabe der Modultheorie.

Allenthalben sind es übrigens *ganze* algebraische Modul*formen*, mit denen wir in der Folge beschäftigt sind. Wir bringen bei ihrer Betrachtung ein formentheoretisches Schlussverfahren zur Durchbildung, für welches wir in dem gleich folgenden § 1 die Grundlinien ziehen, und das, wie wir an zahlreichen Beispielen sehen werden, von ausserordentlicher Brauchbarkeit ist. Auch schon früher hatten wir wiederholt Gelegenheit, uns der Modul*formen* zu bedienen; wir können aber im Hinblick auf die künftigen Entwicklungen geradezu sagen, *dass die Durchführung der analytischen Ansätze am zweckmässigsten überall an die formentheoretischen Principien anknüpft.* Wir befinden uns in Ansehung dieser Auffassung in voller Übereinstimmung mit derjenigen Tendenz, welche zu Beginn des nächsten Abschnitts zur durchgreifenden Geltung kommen soll; wir werden dort ganz allgemein auf beliebigen Riemann'schen Flächen nicht mit algebraischen Functionen, sondern mit den zugehörigen *algebraischen Formen* operieren.

Erwähnen wir endlich noch, dass wir zwischendurch verschiedentlich Gelegenheit nehmen, arithmetische Anwendungen unserer Untersuchungen einzuschalten. Dieselben werden die Darstellung ganzer Zahlen durch quadratische Formen betreffen und basieren, wie man leicht ermessen wird, auf der zahlentheoretischen Natur der Entwicklungscoefficienten in den Potenzreihen des vorigen Kapitels.

§ 1. Principien für die Betrachtung ganzer algebraischer Modulformen.

Die Betrachtung der Modulformen war bereits in Bd. I wiederholt neben diejenige der Functionen getreten; für die erste Stufe kommen die Entwicklungen p. 117 ff. in Betracht, für die Stufen 2 bis 5 p. 615 ff. und endlich für die siebente Stufe p. 692 ff.*). War es dort der Differentiationsprocess, vermöge dessen wir aus den Modulfunctionen mittelbarer Weise Formen herstellen konnten, so treten uns die voraufgehend aus der Theorie der doppeltperiodischen Functionen entnommenen Grössen unmittelbar als Modulformen entgegen. Wenn es sich jetzt weiterhin darum handeln soll, Betrachtungen auf den Funda-

**) An letzter Stelle sehe man insbesondere die Note unter der Seite 694, deren allgemein gültige Gesichtspunkte wir hier nicht nochmals wiederholen.

mentalpolygonen oder den zugehörigen Riemann'schen Flächen anzustellen, so würden wir von den Formen sogleich durch Quotientenbildung zu den Functionen zurückgehen können. Inzwischen ist es, wie man noch sehen wird, von grösster Wichtigkeit, *die Formen unmittelbar als auf dem Polygon bez. der Fläche existierende Grössen anzusehen und in diesem Sinne mit ihnen zu arbeiten.* Einige principielle Gesichtspunkte für diese Art der Betrachtung sollen hier vorab zusammengestellt werden.

Es sollen hier einzig diejenigen Modulformen $z(\omega_1, \omega_2)$ einer Untergruppe Γ_μ in Betracht gezogen werden, welche im Innern des zugehörigen Polygons nirgends unendlich werden, Grössen, die wir, wie bislang, so auch fernerhin, als *ganze* Modulformen der Γ_μ bezeichnen. Dabei soll nicht ausgeschlossen sein, dass z sich bei den Substitutionen der Γ_μ nur erst bis auf einen Factor reproduciert; wir nannten in diesem Falle $z(\omega_1, \omega_2)$ der Untergruppe Γ_μ „adjungiert“ und behalten diese Ausdrucksweise bei. Der bei Ausübung von Substitutionen der Γ_μ auftretende Factor ist übrigens stets eine Einheitswurzel, so dass insbesondere eine gewisse Potenz von z „absolut“ zur Γ_μ gehört.

Eine ganze Modulform ist ferner, wie wir wissen, die Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten *ganze* rationale Functionen von g_2, g_3 sind, während insbesondere der Coefficient des höchsten Gliedes die Einheit ist. Es folgt daraus, dass ganze algebraische Modulformen stets eine ganzzahlige *negative* Dimension in ω_1, ω_2 aufweisen. Die einfachsten ganzen Modulformen sind natürlich g_2, g_3 und Δ; sie gehören zur ersten Stufe, während $\sqrt[12]{\Delta}$ dieser Stufe adjungiert ist.

In einem beliebigen Punkte des Polygons F_μ ist der Wert der zugehörigen Modulform z nur bis auf eine Potenz von ω_2 fixiert, sofern an der betreffenden Stelle z nicht gerade verschwindet. Dieses letztere wird natürlich stets an vereinzelten Stellen des Polygons F_μ eintreten, und wir wollen jetzt insbesondere die Anzahl einfacher Nullpunkte von z, gemessen im Polygon F_μ, als *Wertigkeit* der ganzen Modulform z bezeichnen. Das Interessante ist, dass diese Wertigkeit ganz allein von der Dimension der Form und dem Index der Untergruppe abhängt, nicht aber von der besonderen gerade vorliegenden Modulform. Es gilt nämlich der Satz: *Eine ganze algebraische Modulform z der Dimension $-\nu$, die der Untergruppe Γ_μ vom Index μ adjungiert ist, hat auf dem Polygon F_μ die Wertigkeit $\frac{\mu\nu}{12}$.*

Gehöre nämlich die k^{te} Potenz von z der Γ_μ absolut an, so werden

z^{12k} und $\Delta^{k\nu}$ zwei zur Γ_μ gehörende ganze Modulformen gleicher Dimension sein, deren Quotient somit eine Modulfunction der Γ_μ ist. Es hat nun Δ in jedem einzelnen Doppeldreieck von F_μ einen einfachen Nullpunkt (nämlich in der Spitze mit dem Winkel Null desselben, cf. I p. 128) und ist sonach auf F_μ von der Wertigkeit $k\mu\nu$. Von derselben Wertigkeit muss somit auch z^{12k} sein, so dass wir von hier aus für die Modulform z die im oben formulierten Satze angegebene Wertigkeit finden.

So oft $\mu\nu$ nicht durch 12 teilbar ist, wird die Wertigkeit von z auf F_μ eine *gebrochene* Zahl sein. Dieses der Theorie der *Modulfunctionen* eines Polygons F_μ fremde Vorkommnis ist uns demgegenüber bei den *Formen* selbst der ersten Stufe bereits seit lange bekannt. Die Modulform g_2 hatte, wie wir in I p. 128 direct nachwiesen, im einzelnen Doppeldreieck oder anders ausgesprochen in der J-Ebene bei $J=0$ einen Nullpunkt der Ordnung $\frac{1}{3}$, die Form g_3 einen Nullpunkt der Ordnung $\frac{1}{2}$ bei $J=1$; beides ist jetzt in Übereinstimmung mit unserem allgemeinen Satze.

Nullpunkte gebrochener Ordnung können nicht an jeder beliebigen Stelle der Fläche F_μ auftreten: *sie bleiben vielmehr eingeschränkt auf solche Ecken a, b, c der Einteilung von F_μ, für welche die Beziehung von F_μ auf die ω-Halbebene aufhört, eine conforme zu sein.* Des näheren werden an den Stellen a, die auf F_μ nur von zwei Elementardreiecken umgeben sind, — wir wollen dafür kurz sagen in den „Ausnahmepunkten a" — jedenfalls nur Nullpunkte der gebrochenen Ordnung $\frac{m}{2}$ auftreten können, desgleichen in den Ausnahmepunkten b Nullpunkte der Ordnung $\frac{n}{3}$, wo m und n ganze Zahlen sind. Ist nämlich z von der Dimension $-\nu$, so wird $\omega_2^\nu z$ eine eindeutige Function von ω allein sein, die sich als solche in der Umgebung einer im „Innern" der Halbebene gelegenen Stelle ω_0 nach *ganzen* Potenzen von $(\omega-\omega_0)$ entwickeln lässt. Aus diesem Umstande ergeben sich die mitgeteilten Sätze unmittelbar.

Betrachtungen der letzteren Art sind von folgendem, weiterhin oft zur Verwendung kommenden allgemeinen Princip beherrscht: *Sind z und z' zwei zu der gleichen Dimension gehörende, der Γ_μ adjungierte Modulformen, welche gegenüber den Erzeugenden der Γ_μ das gleiche multiplicative Verhalten zeigen, und verschwindet z in einem Ausnahmepunkte a, b oder c der Fläche F_μ in gebrochener Ordnung, so muss z' an eben dieser Stelle gleichfalls in gebrochener Ordnung verschwinden, und zwar so, dass die Differenz der beiderlei Ordnungen eine* ganze *Zahl wird.* Der Beweis dieses Satzes wird unmittelbar aus dem Umstande evident,

dass der Quotient von z und z' eine algebraische Function der Fläche F_μ ist. Beispiele für die ausgesprochene Regel werden wir weiter unten in grosser Zahl kennen lernen. Es verdient übrigens sogleich bemerkt zu werden, dass in einer Ecke c von F_μ eine *absolut* zur Γ_μ gehörende Form z immer nur in *ganzzahliger* Ordnung zu Null werden kann, im Gegensatz zu jenen Verhältnissen, die wir schon bei g_2 und g_3 für die Ausnahmepunkte a und b kennen lernten; man wird die fragliche Behauptung betreffs der Punkte c leicht aus der analytischen Darstellung der gedachten Modulform z in r schliessen.

Man mag noch die Frage aufwerfen, wie viele linear-unabhängige ganze Modulformen einer vorgeschriebenen Dimension $-\nu$ auf F_μ existieren mögen. In diesem Betracht giebt der Riemann-Roch'sche Satz (I p. 549) das nachfolgende, leicht zu bestätigende Resultat: *Eine einzelne, der Γ_μ adjungierte Modulform z der Dimension $-\nu$ gehört immer einem System von:*

$$\frac{\mu\nu}{12} - p + \tau + 1 \tag{1}$$

linear-unabhängigen ganzen Modulformen $(-\nu)^{\text{ter}}$ Dimension an, welche gegenüber den Erzeugenden der Γ_μ dasselbe multiplicative Verhalten zeigen, wie z; hierbei ist in bekannter Weise τ die Anzahl linear-unabhängiger Functionen φ der Fläche F_μ, welche zugleich in den Nullpunkten von z verschwinden. Diese Regel werden wir sogleich in einigen Fällen des Geschlechtes $p=0$ anzuwenden haben.

§ 2. Von den ganzen Modulformen zweiter Stufe und ihren Bildungsgesetzen.

Die Betrachtung der ganzen Modulformen *erster* Stufe dürfte durch die Entwicklungen in I p. 117 u. f., sowie durch die analytischen Darstellungen, ebenda p. 151 u. f., zu vollem Abschluss gebracht sein. Man gehe demnach gleich zur Hauptcongruenzgruppe *zweiter* Stufe Γ_6 und bemerke, dass eine zugehörige ganze Modulform der Dimension $-\nu$ auf F_6 die Wertigkeit $\frac{\nu}{2}$ besitzt. Indem wir hier nur von solchen Modulformen z handeln, die „absolut" der Γ_6 zugehören, wird ν gerade sein müssen, und also ist der kleinste Wert von ν, der hier überhaupt eintreten kann, $\nu=2$. Die zu $\nu=2$ gehörenden z sind aber einwertig, *so dass es nach der eben abgeleiteten Regel* (1) § 1 *nur zwei von einander linear-unabhängige Grössen dieser Art geben kann*, da für die Γ_6 das Geschlecht $p=0$ ist. Besitzen wir solche zwei Grössen in z_0 und z_1, so ist weiter sofort evident, *dass jede ganze Modulform*

zweiter Stufe der Dimension -2ν *eine ganze homogene Function* ν^{ten} *Grades von* z_0 *und* z_1 *ist.*

Es ist nun ein Leichtes, die beiden postulierten Moduln z_0, z_1 thatsächlich herzustellen. Zufolge p. 29 ff. waren nämlich die vierten Potenzen der drei zweiten σ-Teilwerte gegenüber den Substitutionen der homogenen Γ_6 absolut invariant; ein Gleiches gilt demnach auch von den drei Producten $\sigma_{\lambda\mu}^4 \sqrt{\Delta}$, die zufolge (4) p. 30 von constanten Factoren abgesehen mit den drei Grössen:

$$(1) \qquad \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \vartheta_0^4, \quad \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \vartheta_2^4, \quad \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \vartheta_3^4$$

identisch waren. Dass aber diese Grössen *ganze* Modulformen sind, ist aus ihren Reihenentwicklungen unmittelbar evident; es besteht denn auch (in Übereinstimmung mit unserem vorhin formulierten Satze) zwischen ihnen eine bekannte lineare Relation, die man in (5) p. 30 aufgezeichnet findet.

Man könnte nun z_0 und z_1 direct mit zweien unter den drei Grössen (1) identisch nehmen; indessen ist es zweckmässig, zu setzen:

$$(2) \qquad z_0 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 (\vartheta_0^4 + \vartheta_3^4), \quad z_1 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \vartheta_2^4,$$

wobei man bemerken wolle, dass bei der Gestalt der Relation (5) p. 30 auch wirklich z_0 und z_1 von einander linear-unabhängig sind.

Die Reihenentwicklungen, welche wir für diese beiden Grössen aus den ϑ-Reihen abzuleiten haben, schliessen sich in ihrem Bildungsgesetze unmittelbar an die Reihen des vorigen Kapitels an; nur sind es nicht, wie dort, *binäre* quadratische Formen, sondern *quaternäre*, welche in den Exponenten von r auftreten. In der That können wir ja z. B. die ϑ_2-Reihe in die Gestalt setzen:

$$\vartheta_2 = \sum r^{\frac{\xi^2}{8}},$$

wo ξ alle positiven und negativen ungeraden Zahlen zu durchlaufen hat (cf. I p. 160). Indem also $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ unabhängig von einander alle eben diese Zahlreihe durchlaufen, wird

$$(3) \qquad \vartheta_2^4 = \sum r^{\frac{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2}{8}}$$

sein. Ebenso findet man:

$$(4) \qquad \vartheta_3^4 = \sum r^{\frac{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2}{2}},$$

wo jetzt die ξ unabhängig von einander ohne Unterschied alle ganzen Zahlen durchlaufen sollen; den entsprechenden Ausdruck für ϑ_0^4 wird man leicht bilden. Indem wir die in Rede stehenden Reihen jetzt nach ansteigenden Potenzen von r anordnen, *kommen nach leichter*

Zwischenrechnung für unsere beiden Modulformen $(-2)^{\text{ter}}$ *Dimension* z_α *die nachfolgenden Reihenentwicklungen:*

$$(5)\qquad \begin{cases} z_0 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \sum \chi(m) r^m, \\ z_1 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \sum\limits_{m \equiv 1 \,(\text{md. } 2)} \chi'(m)\, r^{\frac{m}{2}}; \end{cases}$$

dabei bedeutet $\chi(m)$ *die Anzahl unterschiedener Darstellungen von* $2m$ *in der Gestalt:*

$$(6)\qquad 2m = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2$$

durch beliebige ganze Zahlen, während $\chi'(m)$ *die Anzahl der Darstellungen von* $4m$ *in der Gestalt:*

$$(7)\qquad 4m = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2$$

durch beliebige ungerade Zahlen ist. Zwei Darstellungen, bei denen die gleichen Zahlwerte ξ_i, jedoch in verschiedenen Anordnungen auftreten, müssen hierbei, wie man leicht überblickt, als verschieden angesehen werden. Natürlich kommen hierbei für z_0 beliebige ganze positive Zahlen m zur Verwendung, für z_1 hingegen nur die ungeraden Zahlen m.

Die in I p. 628 durch den Differentiationsprocess hergeleiteten Moduln λ_3, λ_4 der zweiten Stufe können als Grössen der Dimension $+4$ noch keine ganze Modulformen sein. Dass aber die Producte $\lambda_3\sqrt{\Delta}$, $\lambda_4\sqrt{\Delta}$ solche sind und direct zu den Grössen (1) zurückführen, zeigten wir auf etwas anderem Wege bereits oben p. 29 u. f.

Ganze Modulformen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension der Γ_6 sind nun auch *die drei zweiten* $\wp$*-Teilwerte* $\wp_{\lambda\mu}$; sie werden demnach direct lineare Combinationen der z_0, z_1 sein, und zwar schliessen wir insbesondere ohne weitere Rechnung auf die Relation:

$$(8)\qquad \wp_{01} = c z_0$$

aus dem Verhalten unserer Grössen gegenüber der Substitution S. Diese Beziehungen zwischen den Teilwerten $\wp_{\lambda\mu}$ und den z_0, z_1 haben deshalb einiges Interesse, weil wir für die $\wp_{\lambda\mu}$ oben (p. 12 u. f.) Reihen kennen lernten, die ein ganz anderes Bildungsgesetz befolgen, als die Reihen (5) der z_α. Wenn wir z. B. den Fall der Gleichung (8) noch etwas näher verfolgen sollen, so kommt hier die Reihenentwicklung (3) p. 12 in Betracht, und zwar für $n = 2$, $\mu = 1$; $h_1(m)$ hat hier, wie man in (5) p. 13 nachsehen wolle, die Bedeutung der vierfachen Summe aller ungeraden Teiler von m. Ist also, einfach genommen, $\Phi_2(m)$ *die Summe aller gegen 2 primen Teiler von* m, so kommt:

$$(9)\qquad 6\wp_{01} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \left\{1 + 24 \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_2(m)\, r^m\right\}.$$

Da nun $\chi(m)$ für $m = 0$ offenbar 1 ist, so wird c in Formel (6) mit $\frac{1}{8}$ identisch sein, und also muss die erste Reihe (5) mit (9) direct identisch sein. Es folgt daraus das arithmetische Ergebnis: *Ist m irgend eine positive ganze Zahl, so ist die Anzahl unterschiedener Darstellungen von $2m$ in der Gestalt* (6) *gleich der 24-fachen Summe aller ungeraden Teiler von m.* Nehmen wir z. B. $m = 10$, so kommen, wenn wir von der Folge der ξ absehen und sie alle positiv nehmen, nur die beiden Quadrupel (4, 2, 0, 0), (3, 3, 1, 1) in Betracht. Das erste Quadrupel giebt nun, wenn wir alle möglichen Permutationen anwenden, *zwölf* Darstellungen, das zweite aber *sechs* solche durch lauter positive Zahlen ξ. Nehmen wir jetzt auch noch alle verschiedenen Zeichencombinationen, so giebt offenbar die einzelne der zwölf Folgen des ersten Quadrupels stets *vier*, die einzelne Folge des zweiten Quadrupels stets 16 Darstellungen von 20. Die Gesamtanzahl der letzteren ist somit $4 \cdot 12 + 16 \cdot 6 = 144$. Auf der anderen Seite ist $\Phi_2(10) = 6$ und also in der That $24 \cdot \Phi_2(10) = 144$.

Es schliesst sich dieses arithmetische Ergebnis unmittelbar an den bekannten Satz von Jacobi an, welcher das Zeichen $\chi'(m)$, wie wir es vorhin definierten, betrifft*). Wir wären direct zu diesem Resultat gelangt, wenn wir die Identität:

$$\wp_{10} - \wp_{11} = c z_1$$

an Stelle von (8) behandelt hätten und die linke Seite von p. 12 oder auch von I p. 150 (4) aus in eine Potenzreihe nach r entwickelt hätten. Man bemerke übrigens, dass unserer Ableitung des arithmetischen Satzes der functionentheoretische Schluss auf die Identität von $6\wp_{01}$ und z_0 zu Grunde liegt, während bei Jacobi die förmliche Transformation der Reihen an dessen Stelle tritt**). Dieser Umstand wird wesentlich, wenn wir weiterhin bei den höheren Stufen ähnliche Ergebnisse erzielen wollen. Da wird wiederum der functionentheoretische Schluss auf die Identität gewisser Reihen ohne weiteres vollziehbar sein; aber eine wirkliche Transformation der verschiedenen Reihen in einander würde hier deshalb umständlicher ausfallen, weil man bei den höheren Stufen nicht eine ebenso durchgebildete analytische Theorie vorfindet, wie sie für $n = 2$ durch Jacobi geliefert ist***).

---

*) *Note sur la décomposition d'un nombre donné en quatre carrés*, Crelle's Journal Bd. 3 (1828) oder Werke Bd. I p. 247.

**) Man vgl. insbesondere die eleganten Entwicklungen in den letzten Artikeln der Fundamenta nova, sowie die Schlussbemerkung ebenda.

***) Arithmetische Anwendungen der ϑ-Functionen, in Jacobi's Sinne entwickelt, hat neuerdings insbesondere Hermite wiederholt entwickelt; dabei treten neben den Teilersummen auch die Classenanzahlen quadratischer Formen von

§ 3. Die ganzen Modulformen dritter Stufe ξ_3, ξ_4 und $\sqrt[3]{\Delta}$. Beziehung derselben zu den Teilwerten $\wp_{\lambda,\mu}$, $\wp'_{\lambda,\mu}$.

Auch bei $n = 3$ führen uns die Principien des § 1, wenigstens für das Gebiet der absolut zur dritten Stufe gehörenden Modulformen, zu abgeschlossenen Resultaten. Da das hierher gehörende Polygon zwölf Doppeldreiecke hat, so kann es auf demselben ganze Modulformen der Dimension -1 geben, welche einwertig ausfallen würden. Das Polygon F_{12} hat jedenfalls keine Ausnahmepunkte a, b, so dass der eine Nullpunkt einer Form fraglicher Art eine noch nicht näher fixierte Lage auf F_{12} haben würde. *Eben dieserhalb kann es nur zwei linear-unabhängige ganze Modulformen dritter Stufe $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension geben, in welchen dann jede ganze Modulform dritter Stufe $(-\nu)^{\text{ter}}$ Dimension als ganze homogene Function ν^{ten} Grades darstellbar ist.*

Zwei Grössen der postulierten Art besitzen wir nun in dem binären Modulsystem A_0, A_1, welches für $n = 3$ von der Formel (2) p. 355 geliefert wird. Die analytischen Darstellungen dieser Grössen sind zufolge einer leichten Zwischenentwicklung:

$$A_0 = \frac{2\pi}{\omega_2} \sum r^{\xi^2 + 3\xi\eta + 3\eta^2}, \tag{1}$$

wo ξ, η alle Combinationen ganzer Zahlen durchlaufen sollen, und:

$$A_1 = \frac{2\pi}{\omega_2} \sum r^{\frac{\xi^2 + 3\xi\eta + 3\eta^2}{3}} \tag{2}$$

mit der hinzukommenden Bedingung $\xi \equiv 2 \pmod{3}$. Die Anordnungen nach ansteigenden Potenzen von r führen auf folgende Bildungsgesetze unserer Moduln:

$$A_0 = \frac{2\pi}{\omega_2} \sum \chi(m) r^m, \tag{3}$$

wo $\chi(m)$ die Anzahl unterschiedener Darstellungen von m durch die Form $\xi^2 + 3\xi\eta + 3\eta^2$ oder durch die mit ihr äquivalente Form $\xi^2 + \xi\eta + \eta^2$ ist, während sich für A_1 die Entwicklung anschliesst:

$$A_1 = \frac{2\pi}{\omega_2} \sum \chi'(m) r^{\frac{m}{3}}, \quad m \equiv 1 \pmod{3}, \tag{4}$$

---

negativer Determinante als Entwicklungscoefficienten von Potenzreihen auf. Vgl. z. B. „*Remarques sur les formes quadratiques de déterminant négatif*", Bulletin des sciences mathem. (2) Bd. 10 (1886), sowie vornehmlich die Abhandlung „*Sur quelques conséquences arithmétiques des formules de la théorie des fonctions elliptiques*", Acta mathem. Bd. 5 (1884). In der letzteren Arbeit werden für gewisse cubische Verbindungen der ϑ eigenartige Darstellungen entwickelt, welche auf anderem Wege bereits früher von Kronecker gefunden waren (cf. Berl. Ber. von 1875). Man sehe endlich die Note von Lipschitz, *Sur une formule de M. Hermite*, Crelle's Journ. Bd. 100 (1886).

wo $\chi'(m)$ die halbe Anzahl aller Darstellungen der mit 1 (mod. 3) *congruenten Zahl m durch die Form $\xi^2 + \xi\eta + \eta^2$ ist.* Die Anfangsglieder der Potenzentwicklungen (3) und (4) sind:

$$(5)\quad \begin{cases} A_0 = \frac{2\pi}{\omega_2}(1 + 6r + 6r^3 + 6r^4 + \cdots), \\ A_1 = \frac{2\pi}{\omega_2}\cdot 3r^{\frac{1}{3}}(1 + r + 2r^2 + 2r^4 + \cdots). \end{cases}$$

Die Wirkung der Substitutionen S und T auf A_0, A_1 berechnet man nach den Formeln (3) und (4) p. 313 zu:

$$(6)\quad \begin{cases} (S) \qquad A_0' = A_0, \qquad\qquad A_1' = \varrho A_1, \\ (T)\quad i\sqrt{3}A_0' = A_0 + 2A_1, \quad i\sqrt{3}A_1' = A_0 - A_1, \end{cases}$$

wobei man nur berücksichtigen wolle, dass in den genannten Formeln p. 313 die Einheitswurzel ε für unseren Fall durch ε^2 zu ersetzen ist. Unsere Moduln A_α sind also *cogredient* mit den beiden Grössen ξ_3, ξ_4, welche wir in I p. 630 vom Differentiationsprocess aus gewonnen hatten. *Es bestehen nun aber sogar direct die Identitäten:*

$$(7)\qquad A_0 = \xi_3, \quad A_1 = \xi_4,$$

so dass wir voraufgehend das Bildungsgesetz für das Modulsystem ξ_3, ξ_4 gewonnen haben. Man könnte dies dadurch zeigen, dass man in den ξ_3, ξ_4 *ganze* Modulformen nachwiese. Zweckmässiger noch ist es, wenn wir bemerken, dass nach I p. 630 die beiden Ausdrücke:

$$(8)\qquad A_0^4 + 8A_0A_1^3, \quad A_0^6 - 20A_0^3A_1^3 - 8A_1^6$$

bei allen beiden Substitutionen (6) sich invariant verhalten und als solche ganze Modulformen *erster* Stufe vorstellen. Zufolge ihrer Dimension in den ω_1, ω_2 können aber die beiden Ausdrücke (8) von g_2 und g_3 nur noch um constante Factoren abweichen, und indem wir die letzteren durch Einsetzung des speciellen Wertes $\omega = i\infty$ bestimmen, kommt mit Rücksicht auf (5)

$$A_0^4 + 8A_0A_1^3 = 12g_2,$$
$$A_0^6 - 20A_0^3A_1^3 - 8A_1^6 = 216g_3,$$

in voller Übereinstimmung mit I p. 630 (7). Insbesondere ist also der Quotient von A_0 und A_1 mit dem von ξ_3 und ξ_4 identisch, *so dass wir für den Hauptmodul dritter Stufe $\xi(\omega)$ ein Bildungsgesetz gewinnen, indem wir ihn als Quotienten der Reihen* (1), (2) *oder auch* (3), (4) *darstellen.* Weiter ergiebt sich nun:

$$\frac{12g_2}{\xi^4 + 8\xi} = \xi_4^4 = A_1^4,$$

so dass ξ_4 und A_1 jedenfalls nur um eine multiplicative 4[te] Einheitswurzel von einander abweichen können. Diese muss aber direct der

Einheit gleich sein, da die Anfangsglieder der Reihenentwicklungen von ξ_4 und A_1 übereinstimmen*). Hiermit ist die genaue Identität unserer beiden Modulsysteme erwiesen; wir werden demnach statt A_0, A_1 die typische Bezeichnung ξ_3, ξ_4 für das in Rede stehende binäre System wieder aufnehmen.

Wir schliessen hier gleich einige Betrachtungen für die nächst niederen Dimensionen $-\nu$ an.

Für $\nu = 2$ existieren auf F_{12} *drei* linear-unabhängige ganze Modulformen. Man kann dieselben erstlich in der Gestalt ξ_3^2, $\xi_3\xi_4$, ξ_4^2 fixieren; andererseits liefern uns aber auch *die vier zu* $n = 3$ *gehörenden Teilwerte* $\wp_{\lambda\mu}$ Grössen der gewünschten Art, für welche dann die Identität:

$$\wp_{01} + \wp_{10} + \wp_{11} + \wp_{12} = 0 \tag{9}$$

gilt. Zwischen beiden Grössenreihen wird demgemäss lineare Abhängigkeit bestehen, und wir schliessen insbesondere aus dem Verhalten gegenüber der Substitution S leicht auf die Relationen:

$$\left\{\begin{aligned} \wp_{01} &= c_0\xi_3^2, \\ \wp_{10} + \varrho^2\wp_{11} + \varrho\wp_{12} &= c_1\xi_3\xi_4, \\ \wp_{10} + \varrho\wp_{11} + \varrho^2\wp_{12} &= c_2\xi_4^2. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Die Werte der rechter Hand auftretenden numerischen Factoren bestimmt man leicht zu

$$c_0 = \tfrac{1}{4}, \quad c_1 = c_2 = -1;$$

den Wert c_0 bestätige man aus den Reihenentwicklungen, c_1 und c_2 ergeben sich dann leicht, indem man auf $4\wp_{01} = \xi_3^2$ in zweckmässiger Folge Operationen S und T ausübt.

An die Identitäten (10) lassen sich wieder *arithmetische Folgerungen* knüpfen, die am einfachsten für die erste Relation (10) ausfallen. Erstlich lehrt p. 12 Formel (3):

$$4\wp_{01} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \left\{1 + 12\sum_{m=1}^{\infty}\Phi_3(m)r^m\right\}, \tag{11}$$

wo $\Phi_3(m)$ die Summe aller gegen 3 primen Divisoren von m ist. Andrerseits wolle man ξ_3 von Formel (1) aus durch eine leichte Zwischenrechnung in die Gestalt setzen:

$$\xi_3 = \frac{2\pi}{\omega_2}\sum r^{\frac{x^2+3y^2}{4}}, \quad x \equiv y \pmod{2}, \tag{12}$$

wobei, wie schon angedeutet, für x, y alle Combinationen ganzer, mod. 2 congruenter Zahlen zu nehmen sind. Indem wir quadrieren

*) Wegen ξ_4 sehe man I p. 618 (2) und 630 (5).

und nach ansteigenden Potenzen anordnen, entspringt der Satz: *Ist m eine positive ganze Zahl, so ist die Anzahl der Darstellungen von $4m$ in der Gestalt:*

$$(13) \qquad 4m = x_1^2 + x_2^2 + 3y_1^2 + 3y_2^2$$

durch ganze, den Bedingungen $x_i \equiv y_i$ (mod. 2) *genügende, Zahlen identisch mit der zwölffachen Summe aller gegen 3 primen Teiler von m*).*

Für $\nu = 3$ giebt es auf F_{12} im ganzen vier linear-unabhängige ganze Modulformen, die wir einerseits als Teilwerte $\wp_{\lambda\mu}'$ oder aber als cubische Verbindungen der ξ_3, ξ_4 bilden können. Die lineare Abhängigkeit dieser beiden Grössenreihen von einander lässt sich aus Formel (8) p. 20 unter Rücksicht auf I p. 630 (7) leicht folgern. Wir verweilen hierbei nicht länger, sondern wenden uns sogleich zu $\nu = 4$, wo es eine ganze Modulform giebt, deren vier Nullpunkte sich gerade auf die vier Tetraederecken von F_{12} verteilen. Man wird sofort bemerken, dass dies die Modulform $\sqrt[3]{\Delta}$ ist, deren Darstellung in ξ_3, ξ_4 bereits in I p. 630 geleistet ist. Das Wichtige ist, dass wir jetzt aus den Formen des vorigen Kapitels *für $\sqrt[3]{\Delta}$ ein einfaches Bildungsgesetz* ableiten können; wir holen bei dieser Gelegenheit etwas weiter aus.

Für die bei $n = 4h + 3$ in § 9 des vorigen Kapitels (p. 351 ff.) im damaligen Falle I aufgestellten Systeme zu $\frac{n+1}{2}$ und $\frac{n-1}{2}$ Moduln kommt bei $n = 3$ nur die *eine* quadratische Form $\xi^2 + 3\xi\eta + 3\eta^2$ in Betracht. Alle Systeme ungerader Dimension werden hier binär und sind cogredient mit dem ersten unter ihnen, nämlich dem voraufgehend betrachteten System der A_α. *Die Systeme gerader Dimension bestehen jeweils nur aus einer einzelnen Grösse, und sie sind alle mit der ersten unter ihnen z_1 cogredient, welche letztere zufolge* (1) *und* (2) p. 313 *die Substitutionen erfährt**)*:

$$(14) \qquad (S) \quad z_1' = \varrho z_1, \qquad (T) \quad z_1' = z_1.$$

Das sind nun auch gerade die Substitutionen von $\sqrt[3]{\Delta}$, so dass irgend einer unserer einzelnen Moduln $z_1, x_1, \ldots$, durch $\sqrt[3]{\Delta}$ dividiert, zur *ersten* Stufe gehört, und zwar, wie man sofort beweisen wird, als *ganze* Modulform. Die fraglichen Grössen $z_1, x_1, v_1, \ldots$ sind demnach in der Gestalt darstellbar:

---

*) Die Bedingungen $x_i \equiv y_i$ (mod. 2) lassen sich übrigens für jedes der Relation (13) genügende Quadrupel $x_1, x_2, \ldots$ eventuell dadurch befriedigen, dass man x_1 und x_2 permutiert.

**) Man erinnere sich, dass in der cit. Formel ε^2 für ε zu nehmen ist.

(15) $$\sqrt[3]{\Delta}\cdot G(g_2, g_3),$$

wo $G(g_2, g_3)$ eine ganze rationale Function ihrer Argumente ist, deren Dimension in ω_1, ω_2 aus der Dimension der z_1, x_1 etc. sofort angegeben werden kann. Die Formeln (3) p. 355 geben nun zwei Reihen z_1; beide aber müssen identisch verschwinden, da G in diesem Falle die Dimension $+2$ hätte. Wir haben ferner vier Reihen x_1 aus (5) p. 355; jede derselben, die nicht identisch verschwindet, muss bis auf einen numerischen Factor $\sqrt[3]{\Delta}$ darstellen. Nehmen wir z. B. die erste Formel (5) p. 355), deren rechte Seite sich infolge des identischen Verschwindens von z_1 wesentlich vereinfacht, *so entspringt thatsächlich als analytische Darstellung von* $\sqrt[3]{\Delta}$:

(16) $$6\sqrt[3]{\Delta} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \sum \xi^3 r^{\frac{\xi^2+3\xi\eta+3\eta^2}{3}}, \quad \xi \equiv 1 \pmod{3}.$$

Ordnet man nämlich die rechte Seite von (16) nach ansteigenden Potenzen von r um, so zeigen sich die Anfangsglieder:

(17) $$\sqrt[3]{\Delta} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 r^{\frac{1}{3}}(1 - 8r + 20r^2 + * - 70r^4 + \cdots);$$

hiermit ist erstlich bewiesen, dass die Reihe (16) nicht identisch Null ist, dass aber andrerseits der numerische Factor auf der linken Seite von (16) in richtiger Weise fixiert wurde.

Man könnte nun weiter die binären Systeme y_α, w_α etc. in Betracht ziehen und insbesondere die Frage aufwerfen, wie sich die rationalen ganzen Ausdrücke derselben in ξ_3, ξ_4 in invariantentheoretischer Hinsicht näher charakterisieren lassen, insofern nämlich alle diese Systeme mit den ξ_3, ξ_4 cogredient sind; inzwischen gehen wir auf diese Gegenstände hier nicht näher ein.

§ 4. Die der dritten Stufe adjungierten Modulformen $\sqrt[6]{\Delta}$, y_α. Zweite Darstellung des Hauptmoduls $\xi(\omega)$.

Für $n = 3$ kommen nun auch noch die Formeln (1) ff. p. 357 in Betracht, bei denen wiederum nur eine einzelne quadratische Form, nämlich $2\xi^2 + 6\xi\eta + 6\eta^2$ zu Grunde zu legen ist. Diese Grössensysteme A_α, z_α etc. sind aber der dritten Stufe nur erst adjungiert, und zwar werden sie durch Normierung mit $\sqrt{\Delta}$ absolut zu dieser Stufe zurückzuführen sein. Wir bekommen wieder wechselweise binäre Systeme und einzeln stehende Moduln; beginnen wir mit der Betrachtung der letztern.

Die für sich stehende ganze Modulform z_1 gehört als solche zur

sechsten Stufe und ist von der Dimension -2; die Substitutionen S und T wirken auf dieselbe in der folgenden Weise:

$$(1) \qquad (S) \quad z_1' = -\varrho^2 z_1, \qquad (T) \quad z_1' = -z_1.$$

Sofern dieses z_1 nun wirklich existiert, wird z_1^6 eine ganze Modulform erster Stufe sein, die bei $\omega = i\infty$ verschwindet; denn zufolge (1) wird die Reihenentwicklung von z_1 mit einer Potenz $r^{m+\frac{1}{6}}$ beginnen, wo m eine ganze Zahl $\geqq 0$ ist. Aber es ist z_1^6 von der Dimension -12 und deshalb bis auf einen constanten Factor mit Δ identisch, da nach p. 77 eine ganze Modulform erster Stufe, die bei $\omega = i\infty$ verschwindet, stets den Factor Δ hat. Nun haben wir in der That unter Einhaltung der Summationsbedingungen:

$$(2) \qquad \xi \equiv 2 \pmod{3}, \quad \eta \equiv 1 \pmod{2}$$

die Identität:

$$\sum (-1)^\xi \xi \cdot r^{\frac{\xi^2 + 3\xi\eta + 3\eta^2}{6}} = 3r^{\frac{1}{6}}(1 - 4r + 2r^2 + \cdots),$$

so dass ein identisches Verschwinden dieser Reihe ausgeschlossen ist: *z_1 ist demgemäss bis auf einen numerischen Factor mit $\sqrt[6]{\Delta}$ identisch, und wir erhalten des genaueren für $\sqrt[6]{\Delta}$ die Entwicklung:*

$$(3) \qquad 3\sqrt[6]{\Delta} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \sum (-1)^\xi \xi \cdot r^{\frac{\xi^2 + 3\xi\eta + 3\eta^2}{6}}$$

mit den Anfangstermen:

$$(4) \qquad \sqrt[6]{\Delta} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{1}{6}}(1 - 4r + 2r^2 + 8r^3 - 5r^4 + \ldots).$$

An dieses Ergebnis knüpft sich eine wichtige Entwicklung über $\sqrt[24]{\Delta}$, auf die wir weiterhin mehrfach zurückgreifen werden. Man bemerke, dass unser jetziges z_1 oder also $\sqrt[6]{\Delta}$ erst durch Division mit $\sqrt[8]{\Delta}$ in diejenige Grösse z_1 übergeführt wird, welche durch die Formel (3) p. 281 geliefert wird. Setzt man also in dieser Formel $n = 3$, so kommt die Relation:

$$\frac{\sqrt[6]{\Delta}}{\sqrt[8]{\Delta}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}} \frac{1}{\sqrt[8]{\Delta^3}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m r^{\frac{(6m+1)^2}{24}}.$$

Nach leichter Zusammenziehung entspringt hieraus als *Reihenentwicklung der 24sten Wurzel der Discriminante Δ:*

$$(5) \qquad \sqrt[24]{\Delta} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m r^{\frac{(6m+1)^2}{24}};$$

die Anfangsterme dieser Entwicklung sind:

(6) $$\sqrt[24]{\Delta} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}}\, r^{\frac{1}{24}} (1 - r - r^2 + r^5 + r^7 - r^{12} - r^{15} + \cdots)^{*)}.$$

Da unsere in Rede stehenden Reihenentwicklungen im Sinne des vorigen Kapitels zur Zahl $p = 1$ und also zu den ursprünglichen $X_\alpha(u)$ gehören, so werden, wie wir schon früher mitteilten (cf. (3) p. 352), Moduln A_α hier nicht eintreten und die drei Systeme der y_α sind im wesentlichen mit einander identisch. Greifen wir also etwa das durch die zweite Reihe (3) p. 357 für $n = 3$ gegebene System y_0, y_1 auf, um wenigstens dieses noch näher zu untersuchen. Als Anfangsterme berechnen wir:

(7) $$y_0 = -6\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^3 r^{\frac{1}{2}}, \quad y_1 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^3 r^{\frac{1}{6}},$$

so dass auch noch die beiden Quotienten:

(8) $$\frac{y_1}{\sqrt[6]{\Delta}}, \quad -\frac{y_0}{2\sqrt[6]{\Delta}}$$

ganze Modulformen sind; es genügt hierbei zu bemerken, dass die beiden Grössen (8) bei $\omega = i\infty$ nicht unendlich werden und sich bei Ausübung von S und T linear reproducieren. Die beiden Quotienten (8) gehören nun absolut zur dritten Stufe, und da sie überdies die Dimension -1 aufweisen, so sind sie lineare ganze Functionen von $\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4$. *Es bestehen aber direct die Identitäten:*

(9) $$\frac{y_1}{\sqrt[6]{\Delta}} = \mathfrak{z}_3, \quad -\frac{y_0}{2\sqrt[6]{\Delta}} = \mathfrak{z}_4,$$

wie aus den Anfangstermen der Reihenentwicklungen hervorgeht.

Die hier vorliegenden y_α sind nun bis auf Normierungsfactoren mit den durch die Formeln (4) p. 281 gegebenen Moduln identisch. Tragen wir also in diese Formel $n = 3$ ein und gehen dann zum Quotienten der beiden y_α, so ergiebt sich unter Rücksicht auf (9) als *neue Darstellung für den Galois'schen Hauptmodul* $\xi(\omega)$ die folgende**):

(10) $$\xi(\omega) = \frac{2\sum\limits_{-\infty}^{\infty}(-1)^m(6m+1)\,r^{\frac{(6m+1)^2}{24}}}{3\sum\limits_{-\infty}^{\infty}(-1)^m(2m+1)\,r^{\frac{3(2m+1)^2}{8}}}.$$

---

*) Die übrigens schon in Jacobi's Fundamenten (Artikel 66) abgeleitete Reihe (6) für $\sqrt[24]{\Delta}$ entspringt aus der p. 329 mitgeteilten Kiepert'schen Reihe einfach für den Specialwert $u = 0$.

**) Es ist dies diejenige Darstellung des $\xi(\omega)$, welche Hr. Klein im Anschluss an die „Normalcurven" in seinen Vorlesungen gab. Vgl. auch „Ikos." p. 133 (21[b]); nur ist das dort gebrauchte ξ mit unserem $-2\xi^{-1}$ identisch.

§ 5. Die ganzen Modulformen vierter Stufe. Darstellungen für $\sqrt[]{\Delta}$ und den Galois'schen Hauptmodul $\mu(\omega)$.

Um auch bei der vierten Stufe mit den im absoluten Sinne zugehörigen Modulformen zu beginnen, so werden ganze Modulformen $(-1)^{\text{ster}}$ Dimension auf dem Polygon F_{24} *zweiwertig* sein; man erkennt auch sogleich in

$$(1)\qquad \frac{2\pi}{\omega_2}\vartheta_0^2,\quad \frac{2\pi}{\omega_2}\vartheta_2^2,\quad \frac{2\pi}{\omega_2}\vartheta_3^2$$

drei linear-unabhängige ganze Modulformen und daraufhin in

$$(2)\qquad \frac{2\pi}{\omega_2}(\alpha_0\vartheta_0^2+\alpha_2\vartheta_2^2+\alpha_3\vartheta_3^2)$$

die allgemeinste ganze Modulform $(-1)^{\text{ster}}$ Dimension des Polygons F_{24}. Im Sinne unserer allgemeinen Erörterungen in I p. 558 u. f. werden die drei Formen (1) das Polygon F_{24} auf eine ebene Curve zweiter Ordnung C_2 abbilden, als deren Gleichung wir (5) p. 30 anzusehen haben. Die beiden Nullpunkte der Form (2) entsprechen dann jenen zwei Punkten, in welchen die durch Nullsetzen von (2) in der Ebene der C_2 dargestellte gerade Linie die Curve schneidet. *Vor allem ist nun aber jede ganze im absoluten Sinne zur vierten Stufe gehörende Modulform eine rationale ganze homogene Function der drei Grössen* (1); aus dem Ausdruck dieser Function lassen sich vermöge der Relation (5) p. 30 von einer einzelnen unter den Grössen (1) alle Potenzen mit einem Exponenten >2 entfernen.

Die quadratischen Verbindungen der Moduln (1) könnte man nun wieder in lineare Beziehung zu den vierten $\wp$-Teilwerten setzen, und namentlich auch liessen sich aus den entspringenden Relationen aufs neue arithmetische Ergebnisse ziehen. Wir gehen hierauf nicht näher ein und betrachten auch unter allen ∞^7 ganzen Modulformen $(-3)^{\text{ter}}$ Dimension nur die eine, deren sechs Nullpunkte sich auf die sechs Oktaederecken von F_{24} verteilen. Diese Modulform muss durch S und T bis auf einen constanten Factor in sich transformiert werden, und wir haben hier, wie man sogleich überblickt, mit $\sqrt[]{\Delta}$ zu thun. Es soll nämlich gelten, der Gleichmässigkeit wegen nun auch für diese Wurzel der Discriminante ein einfaches Bildungsgesetz mitzuteilen.

Um letzteres zu leisten bemerke man, dass die im vorigen Kapitel p. 357 für ungerade n aufgestellten Systeme zu $\frac{n+1}{2}$ Moduln für $n=1$ jeweils auch wieder nur einzeln stehende Grössen liefern, die entweder mit $\sqrt[]{\Delta}$ oder $\sqrt[]{\Delta^3}$ normiert ganze Modulformen erster Stufe liefern. Nehmen wir insbesondere die Form $(-3)^{\text{ter}}$ Dimension y_0,

so giebt sie normiert eine Form erster Stufe der Dimension -6 oder -12. Von beiden Fällen muss aber der letztere zutreffen, da die in Rede stehende Form erster Stufe bei $\omega = i\infty$ verschwindet und somit den Factor Δ aufweist. Zufolge ihrer Dimension -12 ist sie dann direct mit Δ proportional, so dass y_0 selbst bis auf einen constanten Factor mit $\sqrt[4]{\Delta}$ identisch ist. Indem wir den letzteren in gewohnter Weise bestimmen und mit der Gestalt der Reihenentwicklung von y_0 noch eine leichte, vereinfachende Modification vornehmen, *kommt als analytisches Bildungsgesetz für die vierte Wurzel der Discriminante:*

$$(3) \qquad \sqrt[4]{\Delta} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^3 \sum_{\xi,\eta}(-1)^{\xi}\xi^2\cdot r^{\frac{\xi^2+\eta^2}{4}}, \quad \xi+\eta\equiv 1 \pmod{2},$$

wo ξ, η *alle Combinationen ganzer, mod. 2 incongruenter Zahlen durchlaufen sollen.* Hierbei haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass die Reihe (3) nicht identisch verschwinde; dass dies aber wirklich nicht der Fall ist, beweist man durch Umordnung dieser Reihe nach ansteigenden Potenzen von r.

Auf der anderen Seite hätte man die Formel (3) auch aus der nachfolgenden *Darstellung der achten Wurzel der Discriminante* herleiten können:

$$(4) \qquad \sqrt[8]{\Delta} = \frac{\pi}{\omega_2}\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}}\sum(-1)^{\frac{\eta-1}{2}}\eta\cdot r^{\frac{\eta^2}{8}},$$

wobei η *alle ungeraden Zahlen durchlaufen soll.* Diese Formel (4) ist ein unmittelbares Ergebnis aus der ersten Formel (4) in I p. 161; sie entspringt, indem wir diese Gleichung nach u differenzieren, hernach $u = 0$ setzen und die zweite Gleichung (2) in I p. 160 benutzen.

Es ist aber nun hier vor allen Dingen der Ort, analytische Darstellungen für den *Hauptmodul vierter Stufe* $\mu(\omega)$ und die in I aus ihm vermöge des Differentiationsprocesses abgeleiteten Formen μ_3, μ_4 (cf. I p. 632) zu bringen. Solche Darstellungen werden uns von den Modulsystemen (8) p. 359 geliefert, wenn wir $n = 2$ nehmen. Diese Modulsysteme gehören zur $(-2)^{\text{ten}}$ Dimension, und insbesondere ist das zweite unter ihnen gegeben durch:

$$(5) \qquad z_\alpha = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \sum_{\xi,\eta}(-1)^{\frac{\eta-1}{2}}\eta\cdot r^{\frac{2\xi^2+\eta^2}{8}}$$

mit den Summationsbedingungen:

$$(6) \qquad \xi \equiv -\alpha, \quad \eta \equiv 1 \pmod{2}.$$

Dass dieses Modulsystem z_0, z_1 aber nicht etwa durch identisches Verschwinden der Reihen (5) ausfällt, beweise man durch Entwicklung

der Anfangsterme der nach ansteigenden Potenzen angeordneten Reihen (5); wir finden hier:

$$(7)\quad \begin{cases} z_0 = 2\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{1}{8}}(1 - r - 6r^2 + 5r^3 + \cdots), \\ z_1 = 4\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{5}{8}}(1 - 3r + r^2 + 2r^3 + \cdots). \end{cases}$$

Als Verhalten der z_0, z_1 gegenüber S und T schreiben wir aus (5) und (6) p. 314 ab:

$$(8)\quad \begin{cases} (S) & z_0' = \frac{1+i}{\sqrt{2}} z_0, \qquad z_1' = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} z_1, \\ (T) & -\sqrt{2}\, z_0' = z_0 + z_1, \quad -\sqrt{2}\, z_1' = z_0 - z_1. \end{cases}$$

Durch Vergleich mit I p. 632 (14) ergiebt sich, *dass die z_0, z_1 mit den damaligen Moduln μ_3, μ_4 cogredient sind.* Es gelingt nun aber wieder leicht, die Identität beider Systeme durch eine kurze formentheoretische Betrachtung festzustellen. Wir argumentieren hier etwa einmal in der folgenden Art:

Da sich die z_0, z_1 gegenüber S und T linear reproducieren, so wird die der vierten Stufe adjungierte Modulform:

$$(9)\qquad a_0 z_0 + a_1 z_1,$$

die wir vermöge zweier Parameter a aus z_0, z_1 zusammensetzen, in *allen* sechs Octaederecken der geschlossenen Fläche F_{24} je im Grade $\frac{1}{8}$ verschwinden; denn sie ist zufolge (7) bei $\omega = i\infty$ mit $r^{\frac{1}{8}}$ proportional. Drei von den vier Nullpunkten von (9) liegen also in den fraglichen Octaederecken, so dass nur noch *einer* mit a_0, a_1 beweglich ist. Sonach ist der Quotient zweier unterschiedenen Verbindungen (9) ein Hauptmodul vierter Stufe, und es muss im speciellen eine Darstellung von $\mu(\omega)$ der folgenden Gestalt existieren:

$$(10)\qquad \mu(\omega) = \frac{a_0 z_0 + a_1 z_1}{b_0 z_0 + b_1 z_1}.$$

Zur Bestimmung der a, b bemerke man, dass der Quotient $\frac{z_0}{z_1}$ bei $\omega = i\infty$ zugleich mit μ unendlich wird und zwar genau in derselben Weise wie μ (cf. I p. 614 Formel (6)); es ist demnach $b_0 = 0$, $a_0 = b_1$. Da aber weiter die Wirkung von S auf den z-Quotienten dieselbe ist, wie auf μ, so muss $a_1 = 0$ sein. *Es ist demgemäss der Hauptmodul $\mu(\omega)$ mit dem Quotienten $z_0 : z_1$ identisch, so dass wir uns von* (5) *aus ein erstes Bildungsgesetz für $\mu(\omega)$ verschaffen können.*

Weiter bemerke man nun, dass nach I p. 633 (15) der Ausdruck $z_0 z_1 (z_0^4 - z_1^4)$ eine ganze Modulform *erster* Stufe vorstellen wird, da die z_α mit μ_3, μ_4 cogredient sind. Da überdies $z_0 z_1 (z_0^4 - z_1^4)$ bei

$\omega = i\infty$ verschwindet, so ist dieser Ausdruck mit Δ bis auf einen numerischen Factor identisch; letzteren bestimmen wir aus (7) leicht zu 2^7. Aus der so bewiesenen Formel ziehen wir zugleich unter Benutzung der dritten Formel (15) in I p. 633 die Identität:

$$\frac{2^7 \Delta}{\mu(\mu^4-1)} = z_1^{\,6} = (2\mu_4)^6,$$

so dass z_1 bis auf eine sechste Einheitswurzel mit $2\mu_4$ identisch ist. Diese Einheitswurzel ist aber direct gleich 1, da die Anfangsglieder der Reihenentwicklungen von z_1 und $2\mu_4$ übereinstimmen. *Die ganzen Modulformen z_0, z_1 sind also direct identisch mit den Moduln $2\mu_3$, $2\mu_4$ unserer früheren Theorie.*

Noch bemerke man, dass die beiden z, mit denen wir hier arbeiten, bis auf einen gemeinsamen numerischen Factor eben jene sind, denen die Darstellung (2) p. 290 galt. *Wir ziehen hieraus als zweite Darstellung des Galois'schen Hauptmoduls vierter Stufe μ* *):

$$\mu(\omega) = r^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{\vartheta_3(0, r^2)}{\vartheta_2(\omega\pi, r^2)} = \frac{\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} r^{m^2}}{\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} r^{\frac{(2m-1)^2}{4}}}. \tag{11}$$

Infolge des *einen* beweglichen Nullpunktes der Verbindung (9) liesse sich von den z_0, z_1 ein eigenartiger Gebrauch für die rationale ganze Darstellung der ganzen Modulformen vierter Stufe überhaupt machen. Wir gehen indessen hierauf nicht näher ein und unterlassen auch die Discussion weiterer mit z_0, z_1 cogredienter Modulsysteme vierter Stufe, die von den allgemeinen Ansätzen des vorigen Kapitels geliefert werden.

§ 6. Die beiden digredienten binären Systeme z_α der Dimension -2 bei $n = 5$.

Indem wir zu $n = 5$ weitergehen, unterlassen wir hier zum ersten Male eine allgemeine Betrachtung über die im absoluten Sinne hierher gehörenden Formen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension. Der Grund ist, dass unter den uns unmittelbar zur Verfügung stehenden, analytisch definierten Moduln sich Grössen der gemeinten Art nicht finden. Es möchte freilich nicht schwer halten, von den $\wp$-Teilwerten aus die fraglichen Moduln zu bilden; inzwischen wenden wir uns sogleich zur Specialisation der allgemeinen Ansätze (1) ff. p. 357 für $n = 5$ und werden im Bereich

*) Cf. „Ikos." p. 132 (19).

dieser Modulsysteme in der That alle Grössen gewinnen, welche uns in I bei der fünften Stufe beschäftigten.

Bei $n = 5$ kommen für die cit. Reihenentwicklungen zum ersten Male *zwei* unterschiedene Formclassen zur Geltung, als deren reducierte Formen (2, 2, 3) und (1, 0, 5) zu nennen sind. An Stelle derselben werden wir aber für unsere Reihenentwicklungen die mit ihnen äquivalenten Formen:

$$(1) \qquad \begin{cases} f(\xi, \eta) = 2\xi^2 + 10\xi\eta + 15\eta^2, \\ f'(\xi, \eta) = 6\xi^2 + 10\xi\eta + 5\eta^2 \end{cases}$$

zu gebrauchen haben. Die durch 2 geteilten ersten Coefficienten dieser Formen sind $p = 1$ und $p = 3$; nach der bezüglichen Regel (6) von p. 358 folgt hieraus: *Die zur Form f gehörenden Systeme sind durch den Zusatzfactor $\sqrt{\Delta}$ zu Moduln fünfter Stufe zu normieren, die Modulsysteme der quadratischen Form f' aber durch $\sqrt{\Delta^3}$.*

Die Ansätze (1), (2) p. 357 liefern nun für die quadratischen Formen (1) insgesamt zwei ternäre Systeme der A_α und vier binäre Systeme der z_α (sofern wir nur die beiden niedersten Dimensionen behandeln wollen). Die nähere Betrachtung zeigt aber, dass sich die zunächst aufgezählten sechs Systeme auf nur *drei* unterschiedene reducieren. Es werden nämlich die A_α Entwicklungen nach Potenzen von r mit den Exponenten $\frac{\varkappa}{20}$ aufweisen, und es mögen insbesondere $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ die kleinsten beim ersten bez. zweiten A_α-System auftretenden Zahlen $\varkappa$ sein. Alsdann müssen

$$\frac{\varkappa_1}{20} + \frac{1}{4} = \frac{\varkappa_1 + 5}{20}, \quad \frac{\varkappa_2}{20} + \frac{3}{4} = \frac{\varkappa_2 + 15}{20}$$

Brüche mit dem Nenner 5 sein; die denkbar kleinsten Zahlwerte sind also $\varkappa_1 = 3$, $\varkappa_2 = 1$, da diese Zahlen doch positiv sein müssen. In den zwölf Ikosaederecken der geschlossenen Fläche F_{60} werden deshalb für das erste System der A_α Nullpunkte jeweils der Ordnung $\frac{3}{4}$, für das zweite System aber solche der Ordnung $\frac{1}{4}$ liegen. Da nun eine Form

$$(2) \qquad c_0 A_0 + c_1 A_1 + c_2 A_2$$

auf F_{60} insgesamt 5 Nullpunkte aufweist, so würden für den Ausdruck (2), gebildet im ersten System, $5 - 9 = -4$ Nullpunkte als beweglich übrig bleiben, beim zweiten System aber $5 - 3 = 2$. Die Rechnung zeigt denn auch, dass die Reihen A_α der Form f identisch verschwinden, *während wir von f' aus ein ternäres System mit zwei beweglichen Nullpunkten gewinnen;* dieses System wird weiter unten näher zu untersuchen sein.

Indem wir für die z_α die Überlegung bis zur Bestimmung von $\varkappa_1 = 3$ bez. $\varkappa_2 = 1$ genau wie eben durchführen, kommt nunmehr in Betracht, dass die Zahl der Nullpunkte einer Modulform $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension auf F_{60} zehn ist. Das einzelne von $f(\xi, \eta)$ gelieferte System z_1, z_2 würde dann offenbar in

$$c_1 z_1 + c_2 z_2 \tag{3}$$

eine Modulform mit *einem* beweglichen Nullpunkte liefern, ein zu $f'(\xi, \eta)$ gehörendes System z_α aber eine Form (3) mit *sieben* Nullpunkten, sofern Glieder mit $\varkappa_1 = 3$ und $\varkappa_2 = 1$ in den Reihenentwicklungen wirklich auftreten. Modulsysteme z_α, bei denen diese Glieder fehlen, können aber überhaupt nicht vorkommen; denn z. B. bei f' würde die nächst kleinste Zahl $\varkappa_2 = 5$ sein, und eine zugehörige Modulform (3) müsste in den 12 Ikosaederecken je in der Ordnung $\frac{5}{4}$ verschwinden, was mit ihrer Wertigkeit 10 im Widerspruch steht. Gäbe es aber endlich *zwei* unterschiedene cogrediente z_α-Systeme bei $f(\xi, \eta)$ [oder auch bei $f'(\xi, \eta)$], so liessen sich beide zu einem neuen z_α-System combinieren, in welchem das Glied mit $\varkappa_1 = 3$ fehlte; ein solches System aber kann, wie wir gerade sehen, nicht existieren. *So bleiben uns nur zwei binäre Systeme $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension, eines, z_α, für die quadratische Form $f(\xi, \eta)$, ein zweites, das wir durch die Bezeichnung z_α' unterscheiden mögen, der Form $f'(\xi, \eta)$ entsprechend.*

Das erste System können wir durch die beiden Reihen geben:

$$z_\alpha = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \sum (-1)^\xi \eta \cdot r^{\frac{2\xi^2 + 10\xi\eta + 15\eta^2}{20}} \tag{4}$$

mit den Summationsbedingungen:

$$\xi \equiv -\alpha \pmod{5}, \quad \eta \equiv 1 \pmod{2}$$

und entnehmen aus den Anfangstermen:

$$\begin{cases} z_1 = -2\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{7}{20}}(1 - 4r + 3r^2 + \cdots), \\ z_2 = +2\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{3}{20}}(1 - 3r - r^2 + \cdots) \end{cases} \tag{5}$$

die Thatsache, dass die Reihen (4) thatsächlich nicht identisch verschwinden. Das Gleiche hätten wir aber auch schon aus der Gestalt:

$$z_\alpha = (-1)^{\alpha+1} \cdot 2i \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}} \sqrt[8]{\Delta} \cdot r^{\frac{\alpha^2}{10}} \vartheta_1(\alpha\omega\pi, r^5) \tag{6}$$

oder entwickelt:

$$z_\alpha = (-1)^\alpha 2 \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}} \sqrt[8]{\Delta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m r^{\frac{(10m+5-2\alpha)^2}{40}} \tag{7}$$

schliessen können, Darstellungen, welche aus den allgemeinen Formeln (2), (3) p. 281 für unser Modulsystem entspringen.

Bei der quadratischen Form f' gehen wir durch Ausübung der Substitution $\xi = \xi'$, $\eta = -\xi' + \eta'$ zur Hauptform (1, 0, 5) und können dann das Modulsystem z_α' in einfachster Weise durch:

$$z_\alpha' = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \sum (-1)^\xi \xi \cdot r^{\frac{\xi^2+5\eta^2}{20}} \tag{8}$$

mit den Summationsbedingungen:

$$\xi \equiv -\alpha \pmod{5}, \quad \xi + \eta \equiv 1 \pmod{2}$$

definieren. Dass auch diese Reihen nicht identisch verschwinden, ersehen wir wieder aus den Anfangsgliedern der nach ansteigenden Potenzen von r geordneten Entwicklungen:

$$(9)\quad \begin{cases} z_1' = +\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{1}{20}}(1 + 10r - 12r^2 + 8r^3 + \cdots), \\ z_2' = -\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{9}{20}}(7 + 6r - 3r^2 - 30r^3 + \cdots). \end{cases}$$

Um unsere z_α, z_α' zu Modulformen fünfter Stufe zu normieren, schreiben wir:

$$2\zeta_1 = -z_1\sqrt[4]{\Delta}, \quad 2\zeta_2 = +z_2\sqrt[4]{\Delta}, \tag{10}$$

$$\eta_1 = z_2'(\sqrt[4]{\Delta})^3, \quad \eta_2 = z_1'(\sqrt[4]{\Delta})^3, \tag{11}$$

wobei gerade diese Auswahl der Bezeichnungsweise sogleich ihre Vorteile mit sich bringen wird. Indem wir die Wirkung von S und T auf die ζ_α, η_α aus den allgemeinen Formeln (1), (2) p. 313 ableiten wollen, sind die Zahlwerte $p = 1$ bez. $p = 3$ in bekannter Weise zu berücksichtigen. *Wir finden nach kurzer Zwischenrechnung als Wirkung von S und T auf die* ζ_α:

$$(12)\quad (S)\qquad \zeta_1' = \varepsilon^3\zeta_1, \quad \zeta_2' = \varepsilon^2\zeta_2,$$

$$(13)\quad (T)\qquad \begin{cases} \sqrt{5}\,\zeta_1' = +(\varepsilon - \varepsilon^4)\zeta_1 - (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\zeta_2, \\ \sqrt{5}\,\zeta_2' = -(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\zeta_1 - (\varepsilon - \varepsilon^4)\zeta_2, \end{cases}$$

während sich für das System der η_α *die beiden Substitutionen anschliessen:*

$$(14)\quad (S)\qquad \eta_1' = \varepsilon\eta_1, \quad \eta_2' = \varepsilon^4\eta_2,$$

$$(15)\quad (T)\qquad \begin{cases} \sqrt{5}\,\eta_1' = -(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\eta_1 - (\varepsilon - \varepsilon^4)\eta_2, \\ \sqrt{5}\,\eta_2' = -(\varepsilon - \varepsilon^4)\eta_1 + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\eta_2. \end{cases}$$

Wir haben also hier wieder den Fall zweier *digredienten* Systeme fünfter Stufe, der uns im vorigen Abschnitt (p. 139 ff.) beschäftigte. Dank der in (10) und (11) gewählten Bezeichnungsweise stimmen die jetzigen Formeln mit den damaligen (4) p. 139 genau überein.

Fassen wir endlich noch zusammen, was aus den voraufgehenden Entwicklungen unmittelbar hervorgeht: *Die ζ_α sind von der Dimension* -5, *die η_α von der Dimension* -11; *von den 25 Nullpunkten einer beliebigen Form* $(c_1\zeta_1 + c_2\zeta_2)$ *ist nur einer beweglich, die übrigen 24 verteilen sich zu zwei auf die zwölf Ikosaederecken von F_{60}; von den 55 Nullpunkten der Form* $(c_1\eta_1 + c_2\eta_2)$ *sind insgesamt sieben beweglich, während sich die übrigen 48 zu je vier auf die zwölf Ikosaederecken verteilen.* Diese Sätze werden das Fundament unserer weiteren Überlegung ausmachen.

§ 7. Analytische Bildungsgesetze für den Galois'schen Hauptmodul $\zeta(\omega)$. Zurückführung der η_α auf die ζ_α.

Die im vorigen Paragraphen definierten Moduln ζ_1, ζ_2 sind mit den ζ_3, ζ_4 aus I p. 631 *cogredient*; es gelingt aber auch hier wieder leicht, die Identität der beiderlei Systeme in der bisher üblichen Art zu beweisen. Da nämlich $c_1\zeta_1 + c_2\zeta_2$ nur *einen* beweglichen Nullpunkt auf F_{60} hat, so gilt für den Hauptmodul fünfter Stufe $\zeta(\omega)$ die Darstellung:

$$\zeta(\omega) = \frac{c_1\zeta_1 + c_2\zeta_2}{d_1\zeta_1 + d_2\zeta_2}. \tag{1}$$

Nun verschwindet bei $\omega = i\infty$ der Quotient $\zeta_1 : \zeta_2$ wie $r^{\frac{1}{5}}$; eben dies ist aber auch nach I p. 614 (6) der Näherungswert von ζ bei $\omega = i\infty$, so dass in (1) $c_2 = 0$ und $c_1 = d_2$ ist. Da ferner ζ wie auch $\zeta_1 : \zeta_2$ bei Ausübung von S übereinstimmend den Factor ε annehmen, so muss $d_1 = 0$ sein. *Es ist demnach $\zeta(\omega)$ der Quotient von ζ_1 und ζ_2, so dass wir für den Galois'schen Hauptmodul $\zeta(\omega)$ die analytischen Darstellungen besitzen* *):

$$\zeta(\omega) = r^{-\frac{3}{10}} \cdot \frac{\vartheta_1(\omega\pi, r^5)}{\vartheta_1(2\omega\pi, r^5)}, \tag{2}$$

$$\zeta(\omega) = r^{\frac{1}{5}} \cdot \frac{\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m r^{\frac{5m^2+3m}{2}}}{\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m r^{\frac{5m^2+m}{2}}}. \tag{3}$$

Jetzt rechne man ferner aus, dass die neuen ζ_1, ζ_2 bei $\omega = i\infty$ dieselben Anfangsterme der Entwicklung nach r aufweisen, wie die in I gebildeten ζ_3, ζ_4, nämlich:

*) Die hiermit gelieferte Darstellung von $\zeta(\omega)$ durch die ϑ_1-Function wurde von Hrn. Klein zuerst in der Note: *Über gewisse Teilwerte der ϑ_1-Function*, Math. Ann. Bd. 17 (1881), angegeben.

$$\zeta_1 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^5 r^{\frac{3}{5}}, \quad \zeta_2 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^5 r^{\frac{2}{5}}. \tag{4}$$

Die genaue Identität beider Systeme ist damit durch die Bemerkung bewiesen, dass die Ikosaederform f, gebildet für ζ_1, ζ_2, zufolge einer bekannten Zwischenbetrachtung mit $-\Delta^5$ identisch sein muss, und dass eben dies auch der Wert von $f(\zeta_3, \zeta_4)$ ist.

Die beiden Formen $(-5)^{\text{ter}}$ Dimension ζ_1, ζ_2 sind besonders geeignet, mit Zuhülfenahme der Discriminante Δ eine rationale ganze Darstellung für alle ganzen Modulformen fünfter Stufe überhaupt zu leisten. Ist etwa $Z(\omega_1, \omega_2)$ eine ganze Modulform fünfter Stufe der Dimension $-\nu$, so wird dieselbe auf F_{60} im ganzen 5ν einfache Nullpunkte besitzen. Nun hatte der Ausdruck $(a\zeta_1 + b\zeta_2)$ nur noch *einen* beweglichen Nullpunkt, und man bilde sich daraufhin die 5ν Ausdrücke $(a_i\zeta_1 + b_i\zeta_2)$, welche in den 5ν Nullpunkten von $Z(\omega_1, \omega_2)$ verschwinden. Alsdann wird offenbar der Quotient von

$$\prod_{i=1}^{5\nu} (a_i\zeta_1 + b_i\zeta_2) \text{ und } Z(\omega_1, \omega_2) \tag{5}$$

eine *ganze* Modulform fünfter Stufe darstellen, insofern sie auf F_{60} nicht unendlich wird; zudem ist diese Modulform von der Dimension -24ν, und ihre 120ν Nullpunkte verteilen sich zu je 10ν auf die zwölf Ikosaederecken. Es giebt nur *eine* Modulform dieser Art, nämlich $\Delta^{2\nu}$; *also entspringt für Z die Darstellung:*

$$Z(\omega_1, \omega_2) = \frac{\prod_{i=1}^{5\nu} (a_i\zeta_1 + b_i\zeta_2)}{\Delta^{2\nu}}. \tag{6}$$

Verschwindet Z selbst in allen 12 Ikosaederecken in gewisser Ordnung, so werden sich im Zähler von (6) einige Factoren in eine Potenz von Δ zusammenziehen lassen, die man dann gegen den Nenner heben mag. Dieser Umstand tritt ein, wenn wir jetzt unsere beiden η_1, η_2 nach der Regel (6) durch ζ_α ausdrücken wollen. Den sieben freien Nullpunkten der η_α entsprechend werden wir für das einzelne η_α ein Product von sieben Factoren $(a\zeta_1 + b\zeta_2)$ bilden müssen, welches der Dimension -35 angehört und in den zwölf Ikosaederecken je 14-fach verschwindet. Dividieren wir also das gebildete Product noch durch Δ^2, so kommt ein Quotient der Dimension -11 mit je 4 festen Nullpunkten in den Ecken. Sind demgemäss f_1 und f_2 gewisse ganze homogene Verbindungen 7ten Grades der ζ_1, ζ_2, so muss es für η_1, η_2 die Darstellungen geben:

$$\eta_1 = \frac{f_1(\zeta_1, \zeta_2)}{\Delta^2}, \quad \eta_2 = \frac{f_2(\zeta_1, \zeta_2)}{\Delta^2}. \tag{7}$$

Die Bestimmung der f_α ist äusserst leicht. Erstlich kann nämlich f_1 nur solche Glieder $\zeta_1^{\varkappa}\zeta_2^{7-\varkappa}$ enthalten, welche sich bei der Substitution S um den Factor ε ändern. Beim Verhalten von ζ_1, ζ_2 gegenüber S würde also $\varkappa$ der Congruenz:

$$3\varkappa + 2(7-\varkappa) \equiv 1 \pmod{5}$$

genügen müssen, so dass $\varkappa \equiv 2 \pmod{5}$ ist und also nur die zwei Glieder ζ_1^7, $\zeta_1^2\zeta_2^5$ auftreten. Indem man ihn ähnlicher Weise bei η_2 verfährt, kommen die Ansätze:

$$\Delta^2\eta_1 = a\zeta_1^7 + b\zeta_1^2\zeta_2^5,\quad \Delta^2\eta_2 = c\zeta_1^5\zeta_2^2 + d\zeta_2^7,$$

die sich für die ursprünglichen z_α', z_α umschreiben in:

$$2^7\Delta z_2' = -az_1^7 + bz_1^2z_2^5,\quad 2^7\Delta z_1' = -cz_1^5z_2^2 + dz_2^7.$$

Zur Bestimmung der Constanten a, b, c, d benutzen wir die Reihenentwicklungen. Um dies etwa für a, b auszuführen, so ergiebt die Substitution der betreffenden Reihen in den aufgeschriebenen Ansatz:

$$-r^{\frac{29}{20}}(7-162r) = ar^{\frac{49}{20}} + br^{\frac{29}{20}}(1-23r).$$

Wir lesen daraus ab: $b = -7$, $a = 1$. Durch eine analoge Rechnung findet man $c = 7$, $d = 1$, *so dass die Darstellung der* η_1, η_2 *vermöge der* ζ_1, ζ_2 *geleistet ist durch:*

$$(8)\qquad \Delta^2\eta_1 = \zeta_1^7 - 7\zeta_1^2\zeta_2^5,\quad \Delta^2\eta_2 = 7\zeta_1^5\zeta_2^2 + \zeta_2^7.$$

An die somit gewonnenen Formeln knüpft sich eine interessante historische Bemerkung. Indem wir die ζ_α-Substitutionen ausüben, werden sich die beiden Ausdrücke auf den rechten Seiten von (8) linear substituieren, und zwar cogredient mit η_1, η_2, oder auch, was wir nun betonen, contragredient mit η_2, $-\eta_1$ *). Dieserhalb wird der doppelt-binäre Ausdruck:

$$(9)\qquad \eta_1(7\zeta_1^5\zeta_2^2 + \zeta_2^7) + \eta_2(7\zeta_1^2\zeta_2^5 - \zeta_1^7)$$

formell in sich selbst übergehen müssen, falls man auf ihn simultan die digredienten η, ζ-Substitutionen ausübt. Dass der *Wert* des Ausdrucks (9) unverändert bleibt, ist selbstverständlich; er ist ja einfach mit Null identisch zufolge der für uns vorliegenden functionentheoretischen Beziehungen zwischen η_α und ζ_α. Es war also Nachdruck darauf zu legen, dass sich auch die *Gestalt* von (9) unverändert repro-

*) Wir erinnern hier kurz an den allgemeinen Begriff der Contragredienz: zwei Systeme von gleichviel Variabelen $x_1, x_2 \ldots, x_m$; $y_1, y_2 \ldots, y_m$ heissen contragredient, wenn sie gleichzeitig solchen Substitutionen unterworfen werden, dass die ursprünglichen und transformierten Werte der Variabelen durch die Identität

$$x_1'y_1' + x_2'y_2' + \cdots + x_m'y_m' = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_my_m$$

verbunden sind.

duciert, dass also die Invarianz bei beliebigen Werten der digredienten Variabelen η_α, ζ_α besteht.

Es hat nun Hr. Gordan schon vor längerer Zeit das vollständige System der doppelt-binären Formen aufgestellt, welche, wie die Form (9), gegenüber den simultanen digredienten Substitutionen (gestaltlich) absolut invariant sind*). Neben einer grösseren Reihe anderer Formen**) finden sich insgesamt *vier* Formen, welche in η_1, η_2 linear sind; die erste ist die Form (9), die übrigen drei zeigen in den ζ_α bez. die Grade 13, 17 und 23. Jede fernere invariante Form, die in den η_α linear ist, wird sich linear und homogen aus jenen vier Formen aufbauen, wobei die Coefficienten solche rationale ganze Verbindungen der Ikosaederformen $f(\zeta_1, \zeta_2)$, $H(\zeta_1, \zeta_2)$, $T(\zeta_1, \zeta_2)$ sind, dass der Gesamtausdruck in den ζ_α Homogeneität zeigt. Eine Anwendung dieses Satzes könnte man insbesondere auf diejenigen binären, mit den η_α cogredienten Modulsysteme machen, welche für die höheren Dimensionen -4, -6 etc. von den allgemeinen Ansätzen des vorigen Kapitels geliefert werden: Alle diese Modulsysteme würden lineare Combinationen von vieren unter ihnen sein müssen, wobei die Coefficienten dieser linearen Verbindungen ganze Modulformen erster Stufe wären. Inzwischen würde es zu weit führen, wollten wir ausführlicher auf diese Gegenstände eingehen***). Analoge Untersuchungen hätten wir übrigens schon bei den vorangehenden Stufen ausführen können.

§ 8. Formentheoretische Gestalt der Resolvente fünften Grades der Ikosaedergleichung. Beziehung zum Hauptmodul τ der Untergruppe Γ_5.

Im Anschluss an die Formen ζ_α, η_α finden wir Gelegenheit, hier nochmals auf die Resolvente fünften Grades fünfter Stufe zurückzu-

*) Im Verlaufe der Abh. *„Über die Auflösung der Gleichungen vom 5ten Grade“*, Math. Ann. Bd. 13 (1878).

**) Man sehe insbesondere die l. c. gegebene tabellarische Zusammenstellung Gordan's. Die Diagonalglieder der Tabelle enthalten die Formen gleich hoher Dimension in η_α, ζ_α; es sind dies die drei oben p. 141 unter (11) aufgezählten Bildungen. Vgl. auch Ikos. p. 194 ff.

***) Die vier im Texte genannten doppelt-binären Formen der Art (9) sind übrigens bei Gordan wenigstens z. T. nur in symbolischer Gestalt angegeben. Die fertigen Ausdrücke findet man vollständig zusammengestellt in der Dissertation von Hrn. O. Fischer *„Conforme Abbildung sphärischer Dreiecke auf einander mittels algebraischer Functionen“* (Leipzig, 1885) p. 63. Es werden dortselbst die Abbildungen untersucht, wie sie unter andern durch Gleichungen der Art (9) von einem Ikosaederdreieck der ζ-Ebene auf die Ebene der complexen Variabelen $\eta = \eta_1 : \eta_2$ vermittelt werden.

kommen, für welche wir eine erste, functionentheoretische Gestalt in I p. 649 (4) kennen lernten. Es gilt eine formentheoretische Gestalt für die Resolvente fünften Grades abzuleiten, welche die Gestalt einer *Hauptgleichung* fünften Grades hat, d. h. einer Gleichung, in welcher ausser der vierten Potenz der Unbekannten auch noch deren *dritte* fehlt*).

Wir knüpfen hier zweckmässig an die Entwicklungen im vorigen Abschnitt p. 139 u. f., wo wir in den fünf, den Werten $\nu = 0, 1, \ldots, 4$ entsprechend zu bildenden Ausdrücken

$$(1) \qquad \varepsilon^{4\nu}\zeta_1\eta_1 - \varepsilon^{3\nu}\zeta_2\eta_1 + \varepsilon^{2\nu}\zeta_1\eta_2 + \varepsilon^{\nu}\zeta_2\eta_2$$

Grössen erkannten, welche gegenüber S und T das l. c. unter (9) angegebene Verhalten zeigen. Indem wir jetzt unter ζ_α, η_α unsere voraufgehend betrachteten Moduln verstehen, haben wir in (1) fünf Modulformen fünfter Stufe definiert, die sich bei Ausübung von S und T einfach permutieren, und die demnach ein System gleichberechtigter Moduln vorstellen. Dieselben sind von der Dimension -16 und verschwinden in den zwölf Ikosaederecken je im Grade 6; eben dieserhalb werden auch noch die Quotienten der Ausdrücke (1) und Δ *ganze* Modulformen fünfter Stufe, und zwar der Dimension -4 vorstellen. Die so erhaltenen fünf gleichberechtigten Quotienten nennen wir y_ν und finden insbesondere für y_0 die Anfangsglieder der Potenzentwicklung:

$$(2) \qquad y_0 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \left\{ r^{\frac{1}{5}} + r^{\frac{2}{5}} + 7r^{\frac{3}{5}} - 7r^{\frac{4}{5}} + \cdots \right\}.$$

Als eine unter fünf gleichberechtigten ganzen Modulformen genügt y_0 einer Gleichung fünften Grades, deren Coefficienten ganze Modulformen erster Stufe sind, während der Coefficient des höchsten Gliedes gleich 1 ist. Da die y_ν bei $\omega = i\infty$ verschwinden, so werden die Coefficienten in der fraglichen Gleichung fünften Grades nach einem oft benutzten Satze durchgehends den Factor Δ aufweisen. Diese Gleichung hat also notwendig die Gestalt:

$$(3) \qquad y^5 + a\Delta y^2 + bg_2\Delta y + cg_2{}^2\Delta = 0,$$

indem ganze Modulformen erster Stufe mit dem Factor Δ eben erst von der Dimension -12 an auftreten. Zur Bestimmung von a, b, c setze man in (3) für y die Entwicklung (2) ein und benutze die Anfangsterme für Δ und g_2; *man findet so nach kurzer Rechnung als formentheoretische Gestalt der Resolvente fünften Grades:*

$$(4) \qquad y^5 - 40\Delta \cdot y^2 - 60 g_2\Delta \cdot y - 144 g_2{}^2\Delta = 0.$$

*) Vgl. hierzu insbesondere „Ikos." p. 105—107; man hat in der dort construierten „Hauptresolvente" der Ikosaedergleichung nur $m = -g_2$, $n = 0$ zu setzen, um die nunmehr im Texte abzuleitende Gleichung zu gewinnen.

Bei der Zurückführung der Gleichung (4) auf die functionentheoretische Resolvente 5ten Grades wolle man zuerst überlegen, welcher von den fünf Moduln $y_\varkappa$ zu dem in I p. 647 in Fig. 98 gezeichneten Polygon F_5 gehört; es wird einfach y_0 sein, was wir aus der Symmetrie dieses Polygons bezüglich der imaginären ω-Axe mit Rücksicht auf die *reellen* Entwicklungscoefficienten in (2) beweisen. Auf dem Polygon F_5 ist nun y_0 als Form der Dimension -4 von der Wertigkeit $\frac{5}{3}$; ein Nullpunkt entfällt, wie man in (2) sieht, nach der Spitze $\omega = i\infty$; die beiden anderen, je in der Ordnung $\frac{1}{3}$, finden sich nach den Regeln des § 1 (p. 364) in den beiden Ausnahmepunkten b, welche F_5 aufweist. In diesen beiden Punkten b wird demnach der Quotient $g_2 : y_0$ endlich und von Null verschieden sein; dagegen wird dieser Quotient im dritten Punkte b von F_5 offenbar einfach verschwinden müssen und übrigens in der Spitze $\omega = i\infty$ in der Ordnung eins unendlich werden; sonstige Null- und Unstetigkeitspunkte treten aber für $g_2 : y_0$ nicht auf. Es ist dieserhalb der in Rede stehende Quotient mit dem in I für F_5 definierten Hauptmodul τ durch eine beiderseits lineare Gleichung verknüpft, und wir schliessen aus der Werteverteilung von τ auf den Ansatz:

$$(\tau - 3)\, y_0 = c \cdot g_2.$$

Durch Näherungsrechnung bei $\omega = i\infty$ findet man sofort $c = -12$, *so dass die zwischen y_0 und τ bestehende Relation die Gestalt hat:*

$$y_0 = \frac{12\, g_2}{3 - \tau}. \tag{5}$$

Zur Prüfung unserer Entwicklung führe man den hiermit gewonnenen Ausdruck von y_0 in (4) ein und findet:

$$(\tau - 3)^3 \{(\tau - 3)^2 - 5(\tau - 3) + 40\} + 1728 J = 0,$$

oder etwas weiter entwickelt:

$$(\tau - 3)^3 (\tau^2 - 11\tau + 64) + 1728 J = 0,$$

womit die functionentheoretische Resolvente wiedergewonnen ist.

§ 9. Das ternäre Modulsystem fünfter Stufe der A_α.

Es bleibt jetzt noch die Discussion des in § 6 (p. 380) aufgefundenen ternären Systems der A_α, welches wir durch die Reihen:

$$A_\alpha = \frac{2\pi}{\omega_2} \sum_{\xi, \eta} (-1)^\xi r^{\frac{\xi^2 + 5\eta^2}{20}} \tag{1}$$

mit den Bedingungen:

$$\xi \equiv -\alpha \pmod{5}, \quad \xi + \eta \equiv 1 \pmod{2}$$

zu definieren haben*). Die Anfangsterme der Reihenentwicklungen sind:

$$(2)\quad\begin{cases} A_0 = 2\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)r^{\frac{1}{5}}\left\{1-r-r^2+r^6+2r^7+\cdots\right\}, \\ A_1 = -\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)r^{\frac{1}{20}}\left\{1-2r^2-2r^3+2r^5+r^6+\cdots\right\}, \\ A_2 = +\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)r^{\frac{9}{20}}\left\{1-2r+r^2-2r^4+2r^5+\cdots\right\}. \end{cases}$$

Um die A_α zu Moduln fünfter Stufe zu normieren, schreiben wir:

$$(3)\qquad A_0 = -2\bar{A}_0\sqrt[4]{\Delta},\quad A_1 = -\bar{A}_1\sqrt[4]{\Delta},\quad A_2 = -\bar{A}_2\sqrt[4]{\Delta},$$

so dass nur erst die Producte $\bar{A}_\alpha\Delta$ *ganze* Modulformen fünfter Stufe werden; wir wollen übrigens diese, für die normierten Moduln bereits p. 332 in Aussicht genommene, genauere Bezeichnung $\bar{A}$ nur dann anwenden, wenn es zur Unterscheidung notwendig ist. Die Anfangsterme der Entwicklungen für die normierten A_α sind:

$$(4)\qquad A_0 = -\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^2,\quad A_1 = +\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^2 r^{-\frac{1}{5}},\quad A_2 = -\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^2 r^{\frac{1}{5}};$$

ihr Verhalten bei S und T ist:

$$(S)\qquad A_0' = A_0,\quad A_1' = \varepsilon^4 A_1,\quad A_2' = \varepsilon A_2,$$

$$(T)\quad\begin{cases} \sqrt{5}\,A_0' = A_0 + A_1 + A_2, \\ \sqrt{5}\,A_1' = 2A_0 + (\varepsilon^2+\varepsilon^3)A_1 + (\varepsilon+\varepsilon^4)A_2, \\ \sqrt{5}\,A_2' = 2A_0 + (\varepsilon+\varepsilon^4)A_1 + (\varepsilon^2+\varepsilon^3)A_2, \end{cases}$$

wie man unter Rücksicht auf den in der ersten Formel (3) rechter Hand aufgenommenen Factor 2 aus den früheren Regeln leicht ableitet. Der Vergleich mit I p. 644 (4) liefert nunmehr das Resultat: *Die jetzt auf analytischem Wege definierten normierten Moduln* A_α *sind mit den in* I *bei* $n = 5$ *gebildeten Grössen* A_α *cogredient.* Die beiderlei Systeme sind überdies von gleicher Dimension und stimmen in den Anfangstermen (4) überein**).

Wie wir schon in § 6 feststellten, besitzt die ganze Modulform 5ter Stufe $(-10)^{\text{ter}}$ Dimension

$$(5)\qquad \Delta(c_0A_0 + c_1A_1 + c_2A_2)$$

auf F_{60} nur *zwei* bewegliche Nullpunkte, so dass in den 12 Ikosaederecken je vier Nullpunkte festliegen. Eben deshalb ist der Ausdruck

*) Auch das im vorigen Kap. p. 329 ff. allgemein eingeführte System der A_α führt für $n = 5$ zum hier vorliegenden Modulsystem zurück. Man sehe darüber „Normalcurven" § 20.

**) In letzterem Betracht vgl. man in I die Formeln (1) p. 643 und (2) p. 619.

(5) als ganze homogene Function zweiten Grades von ζ_1, ζ_2 darstellbar, ohne dass noch irgend eine Potenz von Δ multiplicativ hinzuträte. In den drei Ausdrücken $\Delta \mathsf{A}_\alpha$ haben wir somit solche quadratische Verbindungen von ζ_1, ζ_2, die gegenüber S das Verhalten der A_α teilen. Man entnimmt daraufhin aus (12) p. 382 unmittelbar das Ergebnis, dass die drei Producte $\Delta \mathsf{A}_\alpha$ bis auf numerische Factoren mit $\zeta_1 \cdot \zeta_2$ bez. ζ_2^2 und ζ_1^2 identisch sind. Wie diese Factoren heissen müssen, ergiebt sich aus den Anfangsgliedern der bezüglichen Reihenentwicklungen; wir finden die Ergebnisse:

$$\mathsf{A}_0 = -\frac{\zeta_1 \zeta_2}{\Delta}, \quad \mathsf{A}_1 = +\frac{\zeta_2^2}{\Delta}, \quad \mathsf{A}_2 = -\frac{\zeta_1^2}{\Delta}. \tag{6}$$

Erinnert man sich, dass die jetzigen Moduln ζ_1, ζ_2 aus dem in Bd. I mit dieser Bezeichnung belegten System durch Normierung mit $\sqrt{\Delta}$ hervorgehen (cf. I p. 631 (9)), so ergiebt der Vergleich der eben gebildeten Formeln (6) mit denen in I p. 643 (1) *die Identität der damaligen* A_α *mit den neuen Moduln* A_α *fünfter Stufe.*

Hiermit haben wir in der That für die gesamten in Bd. I bei $n = 5$ untersuchten Moduln analytische Darstellungen mitteilen können.

§ 10. Analytische Darstellungen für die einfachsten Modulfunctionen sechster Stufe $y(\omega)$ und $x(\omega)$*).

Den Modulfunctionen sechster Stufe galten die Entwicklungen in I p. 683 ff. Es erschien damals zweckmässig, als ein volles Modulsystem für $n = 6$ eine auf dem Polygon F_{72} dreiwertige Function $y(\omega)$ mit einer zweiwertigen $x(\omega)$ zusammenzustellen. Jene wechselte bei Ausübung von S ihr Zeichen, diese nahm den Factor ϱ^2 an, und sie waren an einander gebunden durch die Relation $x^3 + y^2 = 1$; merken wir endlich auch noch die Anfangsglieder der Entwicklungen nach r an:

$$y = +r^{-\frac{1}{2}}, \quad x = -r^{-\frac{1}{3}}. \tag{1}$$

Es lassen sich nun für y und x äusserst einfache analytische Darstellungen vermöge der Function ϑ_2 angeben. Dieselben sollen hier, übrigens unter Beiseitelassung mancher Einzelheiten der Zwischenentwicklung, angegeben werden; man wird diese überall leicht ergänzen.

Um mit $y(\omega)$ zu beginnen, so ist $y^2(\omega)$ ein Hauptmodul für das Transformationspolygon sechster Ordnung F_{12}**), auf welchem derselbe in der Spitze $\omega = i\infty$ unstetig und bei $\omega = \frac{1}{2}$ zu Null wird. Nach p. 366

*) Man vgl. hier die Arbeit des Herausgebers *„Die Congruenzgruppen der sechsten Stufe"*, Math. Ann. Bd. 29 p. 97 (1886), insbesondere § 10.

**) Cf. Fig. 1 p. 42 oder auch I p. 367 Fig. 85.

ist nun die Modulform $\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \vartheta_2^4(r)$ diesem Polygon F_{12} adjungiert und wird auf demselben zwei Nullpunkte aufweisen, die nur in den Spitzen desselben gelegen sein können. Ein Nullpunkt der Ordnung $\frac{1}{2}$ findet sich bei $\omega = i\infty$, der andere von der Ordnung $\frac{3}{2}$ bei $\omega = \frac{1}{2}$; man beachte hierbei, dass die fragliche Modulform nur in solchen Spitzen $\frac{\alpha}{\gamma}$ verschwindet, welche gerades γ aufweisen. Da unsere Modulform zur 2ten Stufe gehört, so wird sie durch Transformation dritter Ordnung eine absolut zur 6ten Stufe gehörende Form ergeben. Insbesondere ist wieder die Form $\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \vartheta_2^4(r^3)$ dem Polygon F_{12} adjungiert; sie verschwindet bei $\omega = i\infty$ in der Ordnung $\frac{3}{2}$, bei $\omega = \frac{1}{2}$ in der Ordnung $\frac{1}{2}$. Hieraus ist mit Rücksicht auf (1) ohne weiteres evident, *dass sich $y(\omega)$ durch ϑ_2 in der nachfolgenden Weise darstellen lässt:*

$$y(\omega) = \frac{\vartheta_2^2(r)}{\vartheta_2^2(r^3)}. \tag{2}$$

Tragen wir die Reihenentwicklungen ein, *so setzt sich der explicite Ausdruck für y zweckmässig in die Gestalt:*

$$\sqrt{y(\omega)} = r^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{\sum_{m=0}^{\infty} r^{\frac{m(m+1)}{2}}}{\sum_{m=0}^{\infty} r^{\frac{3m(m+1)}{2}}}. \tag{3}$$

Um eine entsprechende Darstellung für $x(\omega)$ zu gewinnen, wenden wir Transformation dritter Ordnung auf y an und untersuchen den Ausdruck $y^2\left(\frac{\omega}{3}\right)$. Diese Grösse gehört, wie man leicht feststellt, als Hauptmodul zu der durch $\beta \equiv 0 \pmod{3}$, $\gamma \equiv 0 \pmod{2}$ definierten Congruenzgruppe Γ_{12} der sechsten Stufe. Das zugehörige Polygon gewinnt die übersichtlichste Gestalt durch Einlagerung in Fig. 84 I p. 365; es besteht daselbst einfach aus jenem gleichschenkligen Dreieck, dessen Eckpunkte c die Bezeichnungen 2, 5 und c_1 tragen. Hierbei sind die beiden kleineren Dreiecksseiten einander zugewiesen, während von der grössten Seite die linke Hälfte der rechten zugehört. Die Beziehung dieses Polygons zu dem von x wird man jetzt leicht feststellen und kleidet die Ergebnisse dieser geometrischen Überlegung ohne weiteres in die Formel:

$$\frac{y^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}{y^2\left(\frac{\omega}{3}\right) - 9} = \left(\frac{x(\omega) - 1}{x(\omega) + 2}\right)^3.$$

Unter Benutzung der zwischen x und y bestehenden Relation ergiebt sich von hier aus leicht:

$$y(\omega)\cdot y\left(\frac{\omega}{3}\right) = (1-x)^2,$$

so dass wir mit Rücksicht auf (2) *und* (1) *für* $x(\omega)$ *die Darstellung durch* ϑ_2 *gewinnen:*

$$(4)\qquad x(\omega) = \frac{\vartheta_2(r^3) - \vartheta_2\left(r^{\frac{1}{3}}\right)}{\vartheta_2(r^3)}.$$

Weiter folgt durch Eintragung der Reihen:

$$(5)\qquad x(\omega) = -\frac{\sum\limits_{-\infty}^{\infty} r^{\frac{(6m+1)^2}{24}}}{\sum\limits_{0}^{\infty} r^{\frac{3(2m+1)^2}{8}}} = -r^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{\sum\limits_{-\infty}^{\infty} r^{\frac{3m^2+m}{2}}}{\sum\limits_{0}^{\infty} r^{\frac{3m^2+3m}{2}}},$$

ein Resultat, das sich an Einfachheit des Ausdrucks durchaus mit Formel (3) auf gleiche Stufe stellt.

§ 11. Analytische Darstellungen für die in Bd. I betrachteten Systeme der z_α und A_α von siebenter Stufe.

Die allgemein angesetzten Modulsysteme in den beiden Schlussparagraphen des vorigen Kapitels gehören für $n = 7$ ohne weitere Normierung absolut der siebenten Stufe an; mögen wir uns vorab daraufhin allgemein orientieren, wie viele unterschiedene *ternäre* z_α-*Systeme* hier eintreten können. Sei eines unter ihnen z_1, z_2, z_4, so wird die Modulform:

$$(1)\qquad c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_4 z_4$$

auf F_{168} im ganzen 28 einfache Nullpunkte haben. Nun verschwinden die z_α in den Spitzen sämtlich, und es sei $r^{\frac{\sigma}{7}}$ die niederste in den Entwicklungen der z_α auftretende Potenz von r. Alsdann ist σ jedenfalls > 0, und es liegen von den 28 Nullpunkten des Ausdrucks (1) in den 24 Punkten c je σ fest. Man sieht, dass notwendig $\sigma = 1$ ist, so dass der Ausdruck (1) noch *vier* bewegliche Nullpunkte hat. Indem aber eines unter den z_α gegenüber S die Einheitswurzel ε als Factor annimmt, sind die z_α, wie man mit Hülfe von (1), (2) p. 313 feststellen wolle, entweder direct oder nach einer Permutation der unteren Indices α *mit den in* I p. 705 *untersuchten* z_α *cogredient.* Da demzufolge alle vom vorigen Kapitel gelieferten z_α-Systeme auch unter sich cogredient sind, *so müssen sie alle im wesentlichen mit einander übereinstimmen;* denn gäbe es zwei unterschiedene, so würden wir aus beiden

linear ein neues z_α-System zusammensetzen können, bei dem die eben mit σ bezeichnete ganze Zahl im Widerspruch mit unserer Überlegung > 1 sein würde. *Dass wir aber hier direct zu dem z_α-System aus Bd. I zurückkommen*, folgt aus dem Umstande, dass eben jene Grössen z_α gleichfalls *ganze* Modulformen 7ter Stufe waren. Wir hatten sie nämlich vermöge der Formeln:

$$z_\alpha = \frac{dj_\alpha}{\omega_1\, d\omega_2 - \omega_2\, d\omega_1}$$

aus den Integralen erster Gattung $j_\alpha(\omega)$ der 7ten Stufe abgeleitet, und auf diesem Wege gewinnt man stets ganze algebraische Modulformen (-2)ter Dimension. Man könnte hierbei höchstens noch in den Polygonspitzen das Eintreten von Unstetigkeitspunkten vermuten; inzwischen weist die Umgestaltung des Differentials:

$$\frac{2\pi i}{\omega_1\, d\omega_2 - \omega_2\, d\omega_1} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \frac{r}{dr}$$

diese Möglichkeit ab.

Um Potenzentwicklungen für unser ternäres Modulsystem zu gewinnen, dürfen wir hiernach unter den Ansätzen des vorigen Kapitels eine beliebige Auswahl treffen; setzen wir etwa:

$$z_\alpha = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \sum \xi \cdot r^{\frac{\xi^2 + 7\xi\eta + 14\eta^2}{7}}, \tag{2}$$

wobei wir (unter unwesentlicher Modification der früheren Festsetzung) die Summationsbedingung so vorschreiben wollen, dass ξ, η alle der Bedingung:

$$\xi \equiv 2\alpha^2 \pmod{7} \tag{3}$$

genügenden Combinationen ganzer Zahlen durchlaufen soll. *Diese z_α sind ohne weiteres mit den in Bd. I unter dieser Bezeichnung gedachten Modulformen identisch;* indem wir nämlich die Reihen (2) nach ansteigenden Potenzen ordnen, kommt:

$$(4)\quad \begin{cases} z_1 = -\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{4}{7}}(1 - 4r + 3r^2 + 5r^3 + \cdots), \\ z_2 = +\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{1}{7}}(1 - 3r + \ast + 4r^3 + \cdots), \\ z_4 = +\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{2}{7}}(1 - 3r - r^2 + 8r^3 + \cdots), \end{cases}$$

und hier stimmen in der That die Anfangsterme mit den Angaben (5) in I p. 736 genau überein.

Als *Darstellungen unserer Grössen z_α durch die ϑ_1-Function* leiten wir aus (2) p. 281 die folgenden ab:

$$(5)\qquad z_\alpha = \frac{(-1)^\beta}{i}\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}}\,\sqrt[8]{\Delta}\cdot r^{\frac{\beta^2}{14}}\,\vartheta_1(\beta\omega\pi, r^7);$$

dabei soll β die Zahlwerte 1, 2, 3 durchlaufen, und es ist:

$$(6)\qquad \alpha \equiv \beta^2 \pmod{7}.$$

Trägt man für die ϑ_1 ihre Reihenentwicklungen ein, so ergeben sich *für die z_α-Quotienten folgende Darstellungen* *):

$$(7)\qquad z_1 : z_2 : z_4 =$$

$$-\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^m r^{\frac{(14m+5)^2}{56}} : \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^m r^{\frac{(14m-1)^2}{56}} : \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^m r^{\frac{(14m+3)^2}{56}}.$$

Zwischen den hier vorliegenden z_α stellten wir oben (p. 314) ganz allgemein für beliebige ungerade n die damals unter (9) gegebene biquadratische Relation auf. Es ist interessant zu bemerken, dass im vorliegenden Falle $n = 7$ jene Relation direct die aus I wohlbekannte Gleichung der Curve C_4 der z_α ergiebt; wir haben die Zahlen α_i des allgemeinen Ansatzes zu dem Ende in der folgenden Weise zu wählen:

$$\alpha_1 = 0,\quad \alpha_2 = 1,\quad \alpha_3 = 2,\quad \alpha_4 = 3$$

und müssen übrigens berücksichtigen, dass in Formel (5) des Textes die beiden Moduln z_2 und z_4 gegenüber der bei allgemeinem n in (9) p. 314 befolgten Anordnung vertauscht sind.

Neben den z_α spielte in I bei $n = 7$ das quaternäre System der A_α eine wichtige Rolle; auch für dieses werden wir jetzt analytische Darstellungen angeben können. Zu diesem Ende knüpfen wir an das in § 3 des vorigen Kapitels (p. 329 ff.) allgemein definierte System von $\frac{n+1}{2}$ Modulformen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension A_α, die für $n = 7$ die specielle Gestalt annehmen:

$$(8)\qquad \mathsf{A}_\alpha = \frac{2\pi}{\omega_2}\sum_{\xi,\eta}(-1)^{\frac{\xi+\eta}{2}} r^{\frac{\xi^2+7\eta^2}{168}}$$

mit den Summationsbedingungen:

$$\xi \equiv -6\alpha \pmod{7},\quad \xi \equiv \eta \equiv \pm 1 \pmod{6}.$$

Die Anfangsglieder der Entwicklungen nach ansteigenden Potenzen für diese vier Moduln A_α berechnet man leicht zu:

$$(9)\quad \mathsf{A}_0 = \frac{2\pi}{\omega_2}\cdot 2r^{\frac{1}{3}},\quad \mathsf{A}_1 = -\frac{2\pi}{\omega_2}r^{\frac{1}{21}},\quad \mathsf{A}_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}r^{\frac{4}{21}},\quad \mathsf{A}_4 = -\frac{2\pi}{\omega_2}r^{\frac{16}{21}}.$$

---

*) Die Darstellung der z_α durch die Function ϑ_1 in der Gestalt (5) und (7) wurde von Hrn. Klein in der wiederholt genannten Arbeit *„Über gewisse Teilwerte der ϑ-Function"*, Math. Ann. Bd. 17, gegeben.

Die hiermit gegebenen A_α werden durch Normierung mit $\sqrt[3]{\Delta^2}$ zu Moduln $\overline{A}_\alpha$ der siebenten Stufe ausgestaltet, und wir wollen hierbei des genaueren schreiben:

$$(10)\qquad A_0 \Delta^{\frac{2}{3}} = 2\overline{A}_0, \quad A_\alpha \Delta^{\frac{2}{3}} = \overline{A}_{2\alpha^2},$$

so dass die Anfangsterme für die solchergestalt definierten Moduln siebenter Stufe $\overline{A}_\alpha$ die folgenden sind:

$$(11)\quad \overline{A}_0 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^9 r,\ \overline{A}_1 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^9 r^{\frac{8}{7}},\ \overline{A}_2 = -\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^9 r^{\frac{5}{7}},\ \overline{A}_4 = -\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^9 r^{\frac{10}{7}}.$$

Bereits oben deuteten wir an (cf. p. 330), dass das damals allgemein formulierte Modulsystem der A_α für $n = 7$ mit den vier Moduln A_α von Bd. I cogredient wird, sofern wir nur eine ganz einfache Änderung in der Bezeichnungsweise vornehmen. Eben dieser Modification in der Schreibweise sind wir aber, was man leicht nachrechnen wird, durch die Festsetzung (10) bereits gerecht geworden, *so dass die in* (11) *gemeinten ganzen Modulformen* $\overline{A}_\alpha$ *mit dem quaternären Modulsystem* A_α *aus I genau cogredient sind.*

Die in I gebildeten A_α sind nun an sich noch keine ganze Modulformen; sie werden es jedoch nach Normierung mit Δ (cf. I p. 720 (2) und (3)). Zudem werden die so normierten $\Delta \cdot A_\alpha$ von der $(-9)^{\text{ten}}$ Dimension und besitzen genau wieder die Anfangsterme (11), was man aus I p. 739 (5) ersehen wird. *Die Identität der beiderlei quaternären Systeme oder* (*noch etwas genauer gesprochen*) *das Bestehen der Relationen* $\overline{A}_\alpha = \Delta A_\alpha$ *ist damit offenbar.* Denn wären die Systeme $\overline{A}_\alpha$ und ΔA_α nicht identisch, so würde man aus ihnen ein neues quaternäres A_α-System linear combinieren können, welches in jedem der 24 Punkte c von F_{168} mehr als fünf Nullpunkte haben würde; das würde aber mit der Dimension -9 dieser A_α bekannter Weise im Widerspruch stehen.

§ 12. Das quaternäre Modulsystem der B_α bei $n = 7$.

Neben den betrachteten Systemen der z_α und A_α liefern die Ansätze des vorigen Kapitels für die Dimension -1 noch ein *zweites quaternäres Modulsystem*, das wir in Bd. I noch nicht zu betrachten Gelegenheit hatten. Die Existenz dieses Systems werden wir am besten vom Transformationspolygon 7ter Ordnung F_8 aus verstehen, dessen Gestalt die Figur 104 in I p. 742 angiebt. Unter den $\frac{n+1}{2}$ Moduln eines einzelnen Systems ist ja stets der erste (derjenige mit dem Index 0) eine zum Transformationspolygon $F_{\psi(n)}$ gehörende Grösse;

man wolle also vorab für unseren Fall F_8 discutieren, welche Modulformen $(-1)^{\text{ster}}$ Dimension diesem Polygon zugehören mögen.

Das Polygon F_8 hat *zwei* Ausnahmepunkte b, dagegen keinen Ausnahmepunkt a. Eine Form $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension hat auf F_8 die Wertigkeit $\frac{2}{3}$ und muss nach den Regeln von p. 364 in jedem der beiden genannten Punkte b in der Ordnung $\frac{1}{3}$ verschwinden. Übrigens kann also kein Nullpunkt mehr eintreten, so dass es nur eine einzige ganze Modulform der Dimension (-1) auf F_8 giebt (selbstverständlich bis auf einen numerischen Factor). Mit der ersten Form des quaternären Systems sind aber auch die drei übrigen fixiert, insofern sie sich aus den acht gleichberechtigten Gestalten jener ersten Modulform zusammensetzen lassen: *Es giebt demgemäss höchstens* ein *absolut zur* 7ten *Stufe gehörendes quaternäres Modulsystem der Dimension* -1, *und dieses wird uns nun thatsächlich durch die Entwicklungen* (2) *p.* 355 *geliefert, wenn wir die quadratische Form* (1, 7, 14) *zu Grunde legen.* Die l. c. gebrauchte Bezeichnungsweise mögen wir zur besseren Unterscheidung jetzt so modificieren, dass wir B_{α^2} für A_α schreiben; für diese Moduln B haben wir dann die Darstellungen:

$$
(1)\qquad \mathsf{B}_{\alpha^2} = \frac{2\pi}{\omega_2}\sum_{\xi,\eta} r^{\frac{\xi^2+7\xi\eta+14\eta^2}{7}}, \quad \xi \equiv -\alpha \pmod{7}.
$$

Die Anfangsglieder der Entwicklungen nach ansteigenden Potenzen sind:

$$
(2)\qquad \begin{cases}
\mathsf{B}_0 = \frac{2\pi}{\omega_2}(1 + 2r + 4r^2 + \cdots), \\
\mathsf{B}_1 = \frac{2\pi}{\omega_2} r^{\frac{1}{7}}(1 + 4r + * + \cdots), \\
\mathsf{B}_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} r^{\frac{2}{7}}(2 + r + 5r^2 + \cdots), \\
\mathsf{B}_4 = \frac{2\pi}{\omega_2} r^{\frac{4}{7}}(3 + 2r + 2r^2 + \cdots).
\end{cases}
$$

Das Verhalten der B_α gegenüber den Substitutionen S und T berechnet man mühelos aus den allgemeinen Ansätzen; wir finden:

$$
(3)\,(S)\qquad \mathsf{B}_0' = \mathsf{B}_0, \quad \mathsf{B}_1' = \varepsilon\mathsf{B}_1, \quad \mathsf{B}_2' = \varepsilon^2\mathsf{B}_2, \quad \mathsf{B}_4' = \varepsilon^4\mathsf{B}_4.
$$

$$
(4)\,(T)\begin{cases}
i\sqrt{7}\,\mathsf{B}_0' = \mathsf{B}_0 + 2\mathsf{B}_1 + 2\mathsf{B}_2 + 2\mathsf{B}_4, \\
i\sqrt{7}\,\mathsf{B}_1' = \mathsf{B}_0 + (\varepsilon^2+\varepsilon^5)\mathsf{B}_1 + (\varepsilon+\varepsilon^6)\mathsf{B}_2 + (\varepsilon^4+\varepsilon^3)\mathsf{B}_4, \\
i\sqrt{7}\,\mathsf{B}_2' = \mathsf{B}_0 + (\varepsilon+\varepsilon^6)\mathsf{B}_1 + (\varepsilon^4+\varepsilon^3)\mathsf{B}_2 + (\varepsilon^2+\varepsilon^5)\mathsf{B}_4, \\
i\sqrt{7}\,\mathsf{B}_4' = \mathsf{B}_0 + (\varepsilon^4+\varepsilon^3)\mathsf{B}_1 + (\varepsilon^2+\varepsilon^5)\mathsf{B}_2 + (\varepsilon+\varepsilon^6)\mathsf{B}_4.
\end{cases}
$$

Der Vergleich mit I p. 724 (4) und (10) ergiebt, *dass die* B_α *mit den* A_α *contragredient sind.* Die bilineare Combination

$$\mathsf{B}_0\mathsf{A}_0 + \mathsf{B}_1\mathsf{A}_1 + \mathsf{B}_2\mathsf{A}_2 + \mathsf{B}_4\mathsf{A}_4 \tag{5}$$

unserer beiden Systeme wird also eine ganze Modulform $(-10)^{\text{ter}}$ Dimension *erster* Stufe abgeben, sofern wir die A_α im Sinne des vorigen Paragraphen als Formen der Dimension -9 fixieren. *Der Ausdruck* (5) *wird aber geradezu mit Null identisch sein*, denn er verschwindet bei $\omega = i\infty$.

Da B_0 bei $\omega = i\infty$ von Null verschieden ist, so besitzt die Modulform:

$$c_0\mathsf{B}_0 + c_1\mathsf{B}_1 + c_2\mathsf{B}_2 + c_4\mathsf{B}_4 \tag{6}$$

auf F_{168} insgesamt *vierzehn mit den c bewegliche* Nullpunkte. Setzt man demnach die B_α zu homogenen Coordinaten des Raumes R_3 von drei Dimensionen *), so werden wir als Abbild des Polygons F_{168} *eine Curve vierzehnter Ordnung* C_{14} dieses Raumes erhalten, die durch 168 aus (3) und (4) zu erzeugende Collineationen in sich selbst übergeht.

An die C_{14} des R_3 könnten wir natürlich die Formulierung eines Galois'schen Problems der B_α knüpfen und demselben (gerade wie in I beim Problem der A_α) insbesondere eine *Resolvente achten Grades* an die Seite stellen. Auf diese letztere mögen wir hier noch ein wenig ausführlicher zurückkommen. Die Form B_0 wird sich, als von ungerader Dimension, bei den homogenen Substitutionen der zum Transformationspolygon F_8 gehörenden Γ_8, allgemein zu reden, nur erst bis auf's Vorzeichen reproducieren; dagegen gehört B_0^2 der homogenen Γ_8 im absoluten Sinne an. Indem wir das Quadrat von B_0 noch mit dem Factor -7 versehen, werden die acht gleichberechtigten Gestalten dieser Modulform die folgenden sein:

$$\begin{cases} y_\infty = -7\mathsf{B}_0^2, \\ y_\nu = (\mathsf{B}_0 + 2\varepsilon^\nu \mathsf{B}_1 + 2\varepsilon^{2\nu}\mathsf{B}_2 + 2\varepsilon^{4\nu}\mathsf{B}_4)^2. \end{cases} \tag{7}$$

Da die y der Dimension (-2) angehören und ganze Modulformen sind, so wird die Gleichung achten Grades, der dieselben genügen, die Gestalt aufweisen:

$$\begin{aligned} y^8 + \alpha g_2 \cdot y^6 + \beta g_3 \cdot y^5 + \gamma g_2^2 \cdot y^4 + \delta g_2 g_3 \cdot y^3 + (\varepsilon g_2^3 + \zeta\Delta)\cdot y^2 \\ + \eta g_2^2 g_3 \cdot y + \vartheta g_2^4 = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Im letzten Gliede durften wir sofort particulär ϑg_2^4 ansetzen und nicht $(\vartheta g_2^4 + \iota g_2 \Delta)$, welches die allgemeinste ganze Modulform erster Stufe der Dimension -16 ist; denn wir wissen vom Eingang des Paragraphen her, dass die Nullpunkte des Products der y im Ausgangsdreieck in der Ecke b vereint liegen.

*) Gemäss der gerade erkannten Contragredienz zu den A_α könnte man die B_α auch als Ebenencoordinaten im Raume der A_α interpretieren.

Die Bestimmung der numerischen Factoren α, β etc. in (8) ist äusserst einfach. Bei $\omega = i\infty$ wird zufolge (2) und (7):

$$\left\{y + 7\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2\right\}\left\{y - \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2\right\}^7 = 0 \tag{9}$$

der Ausdruck unserer Resolvente. Substituiert man demnach in (8):

$$g_2 = \tfrac{1}{12}\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4, \quad g_3 = \tfrac{1}{216}\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6, \quad \Delta = 0,$$

so muss die entspringende Gleichung mit (9) identisch sein; dadurch bestimmen sich mit einem Schlage alle in (8) unbekannten Coefficienten bis auf ζ. Den Zahlwert von ζ aber berechnen wir leicht durch Zuhülfenahme eines weiteren Gliedes der Reihenentwicklungen. *Als fertige Gestalt der Resolvente achten Grades der* B_α *erhalten wir solcherweise:*

$$\begin{aligned} y^8 - 2^4\cdot 3\cdot 7 g_2\cdot y^6 + 2^7\cdot 3^3\cdot 7 g_3\cdot y^5 - 2^5\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7 g_2^2\cdot y^4 + 2^{10}\cdot 3^4\cdot 7 g_2 g_3\cdot y^3 \\ -(2^8\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7 g_2^3 - 2^{12}\cdot 7^2\Delta)\cdot y^2 + 2^{11}\cdot 3^6 g_2^2 g_3\cdot y - 2^8\cdot 3^4\cdot 7 g_2^4 = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Man kann fragen, wie sich die Beziehung zwischen der Resolvente (10) und der in I p. 749 unter (6) angegebenen Resolvente der A gestalten mag. Um dies anzugeben, wollen wir die Modulform B_0 durch A_0 und g_2, g_3, Δ ausdrücken und halten hierbei zweckmässiger Weise an der Fixierung von A_0 als einer Form $(+3)^{\text{ter}}$ Dimension fest, da eben diese Voraussetzung der citierten Formel (6) in I p. 749 zu Grunde liegt. Die Beziehung von A_0 zum Hauptmodul τ der Γ_8, wie wir ihn in I p. 744 fixierten, ist alsdann:

$$\tau = 49\Delta A_0^4. \tag{11}$$

Man bemerke nun, dass $g_2 A_0 : B_0$ eine zur Γ_8 gehörende *Function* ist, deren Null- und Unstetigkeitspunkte leicht angegeben werden können. Es liegt nämlich ein Unstetigkeitspunkt der Ordnung zwei (von A_0 herrührend) bei $\omega = 0$, wo $\tau = \infty$ ist; zwei Nullpunkte je von der Ordnung 1 liegen in jenen beiden Punkten b von F_8, die auf der geschlossenen F_8 von sechs Elementardreiecken umlagert sind. Die beiden zugehörigen Werte τ bestimmen sich nach I p. 745 (3) aus $\tau^2 + 5\tau + 1 = 0$. Durch leichte Fortsetzung der Rechnung findet man unter Benutzung von (11) *den Ausdruck von* B_0 *durch* A_0, g_2 *und* Δ in der folgenden Gestalt:

$$B_0 = \frac{2^2\cdot 3 g_2 A_0}{7^4\Delta^2 A_0^8 + 5\cdot 7^2\Delta A_0^4 + 1}. \tag{12}$$

Endlich knüpft sich an die Gleichung (10) und die Modulform B_0 noch die folgende Betrachtung. Aus der am Anfang des Paragraphen gegebenen formentheoretischen Überlegung geht hervor, dass es bis

auf eine multiplicative Constante nur *eine* ganze Modulform $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension auf F_8 giebt, nämlich B_0^2. Verstehen wir nun unter $\wp_{\lambda,\mu}$ die 7ten Teilwerte, so gehört auch die Summe $(\wp_{01}+\wp_{02}+\wp_{04})$ im absoluten Sinne zu F_8 *). Dass diese Summe nun nicht identisch verschwinden kann, beweisen wir z. B. durch Hinweis auf ihre Potenzentwicklung nach r; dieselbe stellt sich nämlich aus (3) und (5) p. 12 nach leichter Zwischenrechnung in der Gestalt dar:

$$(13)\qquad \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^2(\wp_{01}+\wp_{02}+\wp_{04}) = 7\left(\tfrac{1}{4}+\sum_{m=1}^{\infty}\Phi_7(m)\cdot r^m\right),$$

wobei $\Phi_7(m)$ *die Summe aller gegen* 7 *primen Teiler der Zahl* m *bedeutet.* Wir schliessen demnach ohne weiteres auf die nachfolgende *zwischen den* $\wp$*-Teilwerten und dem Modul* B_0 *bestehende Identität* **):

$$(14)\qquad \wp_{01}+\wp_{02}+\wp_{04} = \tfrac{7}{4}\,\mathsf{B}_0^2.$$

Mögen wir die sich hier bietende Gelegenheit noch einmal zur Ableitung eines *arithmetischen* Resultates benutzen. Man schreibe zu dem Ende die Reihenentwicklung (1) von B_0 in die Gestalt um:

$$(15)\qquad \mathsf{B}_0 = \frac{2\pi}{\omega_2}\sum_{\xi,\eta} r^{\xi^2+\xi\eta+2\eta^2},$$

wo die Paare ganzer Zahlen ξ, η keiner einschränkenden Bedingung zu unterwerfen sind. Statt (15) können wir auch schreiben:

$$(16)\qquad \mathsf{B}_0 = \frac{2\pi}{\omega_2}\sum_{x,y} r^{\frac{x^2+7y^2}{4}},\quad x\equiv y \pmod{2},$$

wobei jedoch jetzt die ganzen Zahlen x, y modulo 2 einander congruent sein sollen. Die Darstellung von B_0^2 nach ansteigenden Potenzen von r würde daraufhin die nachfolgende sein:

---

*) Die Summe der unterschiedenen Teilwerte $\wp_{0\mu}$, wie sie im Texte für $n=7$ vorliegt, ist übrigens bereits vor langer Zeit von Weierstrass in der Transformationstheorie gebraucht worden; man sehe namentlich die oben bereits wiederholt genannte Dissertation von Hrn. F. Müller, *De transformatione functionum ellipticarum,* Berlin (1867). Es ist dortselbst die in Rede stehende Summe mit G_1 bezeichnet, und es werden für eine Reihe niederer Werte n die Gleichungen $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades, denen G_1 genügt, wirklich angegeben.

**) In dem dritten jüngst erschienenen (fragmentarischen) Bande von Halphen's *„Traité des fonctions elliptiques"* ist der Behandlung der 7ten Stufe geradezu die Gleichung achten Grades für die auf der linken Seite von (14) stehende Form zu Grunde gelegt. Nennen wir diese Form (mit Halphen) x, so müsste durch die Substitution $y=-4x$ die Gleichung (10) des Textes in die Halphen'sche Relation (15) l. c. p. 51 übergehen; die Rechnung bestätigt diese Behauptung.

$$(17)\qquad \mathsf{B}_0^2 = \frac{2\pi}{\omega_2}\sum_{m=0}^{\infty}\chi(m)r^m;$$

und hier bedeutet $\chi(m)$ *die Anzahl unterschiedener solcher Darstellungen von* $4m$ *in der Gestalt:*

$$(18)\qquad 4m = x_1^2 + x_2^2 + 7y_1^2 + 7y_2^2$$

durch ganze positive oder negative Zahlen x, y, *bei denen* $x_1 \equiv y_1$ *und also auch* $x_2 \equiv y_2$ *mod.* 2 *erfüllt ist**). Der Satz aber, der sich aus der Identität (14) hier ergiebt, ist offenbar der, *dass die so gemeinte Anzahl* (18) *der Darstellungen* $\chi(m)$ *immer viermal so gross ist, als die Summe der gegen* 7 *primen Divisoren der Zahl* m. Man wird diese Regel leicht an Einzelbeispielen bestätigt finden.

Es ist uns im jetzt beendeten Kapitel gelungen, für die gesamten in Bd. I studierten Modulfunctionen und Modulformen analytische Darstellungen zu gewinnen. Dabei erwiesen sich in den Fällen $n = 3$, 4, 5, 7 gerade jene Grössen als besonders brauchbar, die wir im voraufgehenden Kapitel ganz allgemein für beliebige Stufenzahlen definiert haben. Indem sich also diese Grössen im Bereiche der niedersten Stufen als zweckmässig bewährt haben, werden wir mit ihnen auch weiterhin die Aufgaben des functionentheoretischen Grundproblems zu lösen versuchen.

*) Dieser mod. 2 hinzukommenden Bedingung werden wir bei *jedem* der Gleichung (18) genügenden Quadrupel ganzer Zahlen x, y nötigenfalls dadurch genügen können, dass wir x_1 und x_2 vertauschen.

Fünftes Kapitel.

Die Modulsysteme elfter Stufe und die zugehörigen Resolventen elften und zwölften Grades.

An die eben beendete Betrachtung würde sich der Reihenfolge nach die entsprechende Behandlung der achten und neunten Stufe schliessen; wir gehen auf die letzteren indessen nicht besonders ein, da die Verhältnisse bei diesen Stufen zufolge der Entwicklungen in I leicht von den Stufen $n = 2, 3, 4$ aus beherrscht werden können, und weil andrerseits bereits bei Gelegenheit der σ-Teilwerte (cf. p. 30) die wichtigsten Moduln für $n = 8$ und 9 ihre analytische Darstellung fanden. Auch die zehnte Stufe lassen wir ausser Betracht; dieselbe lässt nämlich eine ganz ähnliche Behandlung zu, wie wir sie der Stufe $n = 6$ zur Hälfte in I, zur Hälfte in § 10 des vorigen Kapitels angedeihen liessen. Die Stelle der Tetraederirrationalität bei $n = 6$ vertritt dann natürlich für $n = 10$ die Irrationalität des Ikosaeders *).

Dagegen können wir bei $n = 11$ infolge der „Einfachheit" der Gruppe G_{660} nicht wieder an voraufgegangene Entwicklungen niederer Stufen anknüpfen. Hier müssen wir vielmehr aufs neue einsetzen und wollen nunmehr auf Grundlage der Modulsysteme des dritten Kapitels eine ausführliche Theorie der elften Stufe entwickeln. Im Grossen und Ganzen wird sich dieselbe an die Theorie der 7ten Stufe anschliessen, insofern ja die Gruppen G_{168} und G_{660} ganz ähnliche Structuren darbieten. Aber wir werden nicht *ein* System der z_α zu discutieren haben, wie bei $n = 7$, sondern deren *drei*; und der fundamentalste Unterschied gegen $n = 7$ wird der sein, dass bei $n = 11$ die Gruppen Γ_{12}, welche von den halbmetacyclischen G_{55} herrühren, nicht mehr zum Geschlechte Null gehören, sondern $p = 1$ haben.

Was die früheren Arbeiten betrifft, auf welche unsere Darstellung zurückgeht, so sind hier wieder die Abhandlungen von Klein über

*) Vgl. übrigens, was die analytischen Darstellungen der Modulfunctionen zehnter Stufe angeht, das 7te Kapitel in der bereits p. 159 genannten Dissertation des Herausgebers.

die elfte Stufe voranzustellen*), ausserdem aber ist für die Resolvente zwölften Grades die in Bd. 32 der Math. Ann. veröffentlichte Arbeit von Kiepert über die Transformationstheorie zu nennen**). Hr. Kiepert hat daselbst mit Hülfe transformierter Moduln die Resolvente zwölften Grades zum ersten Male in functionentheoretischer Gestalt vollständig entwickelt. Die Resultate der Herren Klein und Kiepert werden nun hier durch den Herausgeber in einer nicht unwesentlich durchgebildeten Gestalt gegeben. Es war erstlich der grössere Reichtum der von Kap. 3 zur Verfügung stehenden analytischen Hülfsmittel, der die Theorie der z_α-Systeme ausgiebiger gestaltete: an Stelle des einen von der Function ϑ_1 gelieferten Systemes z_α treten, wie schon erwähnt, *drei* z_α-Systeme, wobei die gegenseitigen Beziehungen zwischen denselben insbesondere die geometrischen Sätze über die zugehörigen Curven schärfer hervortreten lassen. — Indessen ist zu betonen, dass die Aufstellung der Resolvente 11ten Grades, welche den wichtigsten Zielpunkt der citierten Untersuchungen von Klein ausmachte, durch das von den ϑ_1 gelieferte System der z_α in erschöpfender und einfachster Weise gelingt. Übrigens erwähnten wir schon in I p. 761, dass Hr. Klein sich das eben erwähnte, zu $n = 11$ gehörende System der z_α durch ein directes functionentheoretisch-geometrisches Schlussverfahren herstellte, worauf erst später die einfache analytische Ausdrucksform dieser z_α durch ϑ_1 hervortrat. — Des ferneren ist es die consequente *formentheoretische Schlussweise*, die im Verlaufe des Kapitels überall vom Herausgeber zur Verwendung gebracht wurde. Was hierdurch zu gewinnen ist, hat sich in hervorragender Weise bei Ableitung der functionentheoretischen Gestalt der Resolvente zwölften Grades gezeigt. Während nämlich ohne die Zuhülfenahme formentheoretischer Überlegung die endgültige Gestalt jener Resolvente nur unter einem sehr bedeutenden Aufwande numerischer Rechnungen festgestellt werden kann, schränkt man solche Rechnungen bei zweckmässig geleiteten formentheoretischen Schlüssen auf ein sehr geringes Maass ein. —

§ 1. Einführung der drei Modulsysteme z_α von $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension.

Da 11 mod. 4 mit 3 congruent ist, so kommen für die Modulsysteme $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension, mit denen wir hier beginnen, sowohl die

*) Vgl. namentlich Math. Ann. Bd. 15 *„Über die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Functionen“* (1879); für die formentheoretische Resolvente 12ten Grades kommt ausserdem der bereits p. 81 erwähnte Brief von Klein an Brioschi, *„Über Multiplicatorgleichungen“*, in Betracht.

**) *Über die Transformation der elliptischen Functionen bei zusammengesetzten Transformationsgrade* (1887).

Ansätze (3) p. 355 wie auch (2) p. 357 zur Geltung. Jene liefern Systeme zu je fünf Moduln z_α, welche direct zur elften Stufe gehören; die vom anderen Ansatze gelieferten z_α sind erst durch den Factor $\sqrt{\Delta}$ zu Moduln elfter Stufe zu normieren. Wollen wir uns nun gleich durch eine schon oft benutzte Überlegung die Gesamtheit der hier möglichen z_α-Systeme $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension veranschaulichen.

Sollen die z_α absolut zur elften Stufe gehören, so schreiten ihre Entwicklungen nach ganzen Potenzen von $r^{\frac{1}{11}}$ fort; und es sei $r^{\frac{\sigma}{11}}$ die niederste hierbei eintretende Potenz. Alsdann hat das einzelne z_α in den 60 Punkten c von F_{660} je σ Nullpunkte, so dass zufolge der Dimension der z_α noch $(110-60\sigma)$ freie Nullpunkte bleiben. Man sieht hier sofort: *Es ist notwendig* $\sigma=1$, *so dass es nur ein System dieser Art geben kann, welches alsdann noch fünfzig bewegliche Nullpunkte auf* F_{660} *aufweist.* Wir wollen die Moduln dieses Systems zum Unterschiede von zwei anderen sogleich zur Sprache kommenden Systemen durch $z_\alpha^{(3)}$ bezeichnen; *dieselben werden uns thatsächlich geliefert, wenn wir die Ansätze* (3) *p.* 355 *für die quadratische Form* (1, 11, 33) *specialisieren.* Wir geben hier einige Anfangsglieder der Potenzentwicklungen an, wobei wir als untere Indices α der $z_\alpha^{(3)}$, gerade wie bei $n=7$, die fünf quadratischen Reste von 11 gebrauchen:

$$(1)\qquad \begin{cases} z_1 = -\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{1}{11}}(1+2r-9r^2+\cdots), \\ z_3 = +\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{9}{11}}(2-6r+5r^2+\cdots), \\ z_9 = +\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{4}{11}}(2-3r+\ *\ +\cdots), \\ z_5 = +\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{3}{11}}(1+\ *\ -4r^2+\cdots), \\ z_4 = +\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{5}{11}}(3-4r-5r^2+\cdots). \end{cases}$$

Die Moduln z_α eines zur elften Stufe nur erst adjungierten Systems werden Potenzentwicklungen nach $r^{\frac{1}{22}}$ zulassen, und indem wir jetzt wieder $r^{\frac{\sigma}{22}}$ die niederste wirklich auftretende Potenz nennen, wird σ eine ungerade Zahl >1 sein. Hier liegen dann insgesamt 30σ Nullpunkte in den Punkten c von F_{660} fest, so dass deren noch $(110-30\sigma)$ frei bleiben. Die einzigen zulässigen Werte sind hiernach $\sigma=1$ und $\sigma=3$. In gewohnter Überlegung ziehen wir hieraus den Schluss, *dass es nur ein System mit* $\sigma=3$ *geben kann;* wir nennen es $z_\alpha^{(1)}$ und merken gleich an, *dass eine lineare Verbindung dieser* $z_\alpha^{(1)}$ *noch zwanzig*

bewegliche Nullpunkte auf F_{660} aufweisen wird. Dem gegenüber mag es unendlich viele z_α-Systeme mit $\sigma = 1$ geben; aber dieselben müssen doch, was man leicht erkennt, in dem einfachen Zusammenhange stehen, *dass sie alle aus einem unter ihnen und dem System der $z_\alpha^{(1)}$ linear combiniert werden können.* In diesem Sinne werden wir behaupten, *dass es nur ein wesentlich neues System der z_α mit $\sigma = 1$ geben kann, welchem übrigens* 80 *freie Nullpunkte auf F_{660} eigen sein werden;* das hiermit gemeinte System nennen wir $z_\alpha^{(2)}$ und werden jetzt $z_\alpha^{(1)}$ und $z_\alpha^{(2)}$ thatsächlich herstellen.

Indem wir die Reihen (2) p. 357 für die quadratische Form (2, 22, 66) bilden, kommen wir zum System der $z_\alpha^{(1)}$; wir berechnen für diese Moduln $z_\alpha^{(1)}$ folgende Anfangsglieder:

$$(2)\qquad \begin{cases} z_1 = -2\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{23}{22}}(1 - 4r + 3r^2 + 5r^3 - 5r^4 + \cdots), \\ z_3 = -2\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{9}{22}}(1 - 3r + * + 4r^3 + 3r^4 + \cdots), \\ z_9 = -2\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{15}{22}}(1 - 3r - r^2 + 8r^3 + * + \cdots), \\ z_5 = -2\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{3}{22}}(1 - 3r + * + 5r^3 + * + \cdots), \\ z_4 = +2\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{5}{22}}(1 - 3r + * + 5r^3 - r^4 + \cdots). \end{cases}$$

Nach den bezüglichen Bemerkungen von p. 353 haben wir hier mit dem durch ϑ_1 darstellbaren z_α-System zu thun. Der Vollständigkeit halber mögen wir die betreffenden Ausdrücke hier herstellen, wobei wir jedoch den unteren Index α ausnahmsweise die Zahlenreihe $1, 2, \ldots, 5$ durchlaufen lassen; es ist alsdann:

$$(3)\qquad z_\alpha = (-1)^{\alpha+1}\cdot 2i\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}}\sqrt[8]{\Delta}\cdot r^{\frac{\alpha^2}{22}}\vartheta_1(\alpha\omega\pi, r^{11}).$$

Um jetzt letzten Endes noch das in Aussicht genommene System $z_\alpha^{(2)}$ zu bilden, erinnern wir uns, dass wir für $n = 8h + 3$ bei den auf die Fälle ungerader p bezüglichen Untersuchungen des Kapitels 3 (cf. p. 347) jeder einzelnen in Betracht kommenden Classe quadratischer Formen *drei* unterschiedene Individuen zu entnehmen hatten. Andrerseits konnten wir auch bei einer einzelnen Form bleiben, mussten dann aber immer noch jene beiden besonderen Arten von Reihen bilden, welche durch die Formeln (5) und (6) p. 347 gegeben sind. In dieser letzteren Weise verfahren wir jetzt, bilden uns also die in (2) p. 357 allgemein definierten Reihen wieder für die eben bereits benutzte quadratische Form (2, 22, 66), nun jedoch unter Obacht auf die Summationsbedingungen:

$$(4)\qquad \xi \equiv -\alpha \pmod{11},\quad \xi+\eta \equiv 1 \pmod{2}.$$

Dann treffen wir, was wir hier natürlich nicht ins einzelne durchrechnen, gerade auf ein Modulsystem, wie wir es oben $z_\alpha^{(3)}$ nannten; merken wir uns vor allem für dasselbe noch die Anfangsterme an:

$$(5)\quad \begin{cases} z_1 = +\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{1}{22}}(1 \;+10r+\cdots), \\ z_3 = +\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{9}{22}}(11-14r+\cdots), \\ z_9 = -\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{15}{22}}(2 \;+20r+\cdots), \\ z_5 = +\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{3}{22}}(6 \;-11r+\cdots), \\ z_4 = -\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{5}{22}}(4 \;-26r+\cdots). \end{cases}$$

Endlich leiten wir auch gleich das Verhalten unserer drei Modulsysteme bei Ausübung von S und T ab, wie es sich aus den früheren Regeln unmittelbar ergiebt. Mögen wir für die beiden ersten Systeme $z^{(1)}$, $z^{(2)}$, nachdem wir sie normiert haben, die Bezeichnung brauchen:

$$(6)\qquad \zeta_\alpha = z_\alpha \sqrt{\Delta},$$

so sind jedenfalls die beiden Systeme der ζ_α *von der Dimension* -8 *mit einander cogredient.* Da nämlich für sie beide die in Kap. 3 mit p bezeichnete Zahl einfach gleich 1 ist, so schreiben wir aus (1) und (2) p. 313 ab:

$$(7)\quad \begin{cases} (S) & \zeta_1' = \varepsilon^6\zeta_1,\quad \zeta_3' = \varepsilon^{10}\zeta_3,\quad \zeta_9' = \varepsilon^2\zeta_9,\quad \zeta_5' = \varepsilon^7\zeta_5,\quad \zeta_4' = \varepsilon^8\zeta_4, \\ (T) & i\sqrt{11}\,\zeta_\alpha' = (\varepsilon^\alpha-\varepsilon^{-\alpha})\zeta_1 + (\varepsilon^{3\alpha}-\varepsilon^{-3\alpha})\zeta_3 + (\varepsilon^{9\alpha}-\varepsilon^{-9\alpha})\zeta_9 \\ & \qquad + (\varepsilon^{5\alpha}-\varepsilon^{-5\alpha})\zeta_5 + (\varepsilon^{4\alpha}-\varepsilon^{-4\alpha})\zeta_4, \\ (U) & \zeta_1' = \zeta_3,\quad \zeta_3' = \zeta_9,\quad \zeta_9' = \zeta_5,\quad \zeta_5' = \zeta_4,\quad \zeta_4' = \zeta_1. \end{cases}$$

Wir haben hierbei als dritte Substitution U gleich eine solche hinzugesetzt, die mod. 11 mit $\begin{pmatrix}3, & 0\\ 0, & 4\end{pmatrix}$ congruent ist; dieselbe wird bei späteren Rechnungen vielfach zur Benutzung kommen. Das System der $z_\alpha^{(3)}$ steht für sich; für dieses nämlich ist die Zahl $p=2$, und 2 ist quadratischer Nichtrest von 11. Um die $z_\alpha^{(3)}$-Substitutionen zu erhalten, haben wir demzufolge in (7) ε durch ε^2 zu ersetzen; wir finden so für S und T:

$$(8)\quad \begin{cases} (S) & z_1' = \varepsilon z_1,\; z_3' = \varepsilon^9 z_3,\; z_9' = \varepsilon^4 z_9,\; z_5' = \varepsilon^3 z_5,\; z_4' = \varepsilon^5 z_4, \\ (T) & -i\sqrt{11}\,z_\alpha' = (\varepsilon^{2\alpha}-\varepsilon^{-2\alpha})z_1 + (\varepsilon^{6\alpha}-\varepsilon^{-6\alpha})z_3 + (\varepsilon^{7\alpha}-\varepsilon^{-7\alpha})z_9 \\ & \qquad + (\varepsilon^{10\alpha}-\varepsilon^{-10\alpha})z_5 + (\varepsilon^{8\alpha}-\varepsilon^{-8\alpha})z_4. \end{cases}$$

Hier ergiebt der Vergleich mit (7), *dass unser drittes Modulsystem in der Reihenfolge z_4, z_1, z_3, z_9, z_5 mit den ζ_α in ihrer ursprünglichen Anordnung contragredient ist.* Die bilineare Verbindung:

$$z_1\zeta_3 + z_3\zeta_9 + z_9\zeta_5 + z_5\zeta_4 + z_4\zeta_1,$$

wobei die ζ_α eines der beiden Systeme vorstellen, die z_α aber das dritte System $z_\alpha^{(3)}$, wird demgemäss eine ganze Modulform *erster* Stufe abgeben; dieselbe muss aber identisch Null sein, da sie bei $\omega = i\infty$ verschwindet und zur Dimension -10 gehört. *Es ist also jedes der beiden Systeme der ζ_α an das System der $z_\alpha = z_\alpha^{(3)}$ durch die Identität gebunden:*

$$z_1\zeta_3 + z_3\zeta_9 + z_9\zeta_5 + z_5\zeta_4 + z_4\zeta_1 = 0. \tag{9}$$

Wollten wir übrigens in (9) die Reihenentwicklungen (1) und (2) bez. (5) eintragen, demnächst aber wieder nach ansteigenden Potenzen von r anordnen, so müssten alle Coefficienten der so entspringenden Reihe identisch Null sein. Indem wir diese Rechnung thatsächlich durchführen, erhalten wir Bestätigungen für die Richtigkeit der in (1), (2) und (5) angegebenen Entwicklungscoefficienten.

§ 2. Von der Aufstellung der algebraischen Relationen zwischen den z_α. Specialbetrachtung der $z_\alpha^{(1)}$.

Die Frage nach den algebraischen Relationen, welche für die Moduln eines einzelnen Systems gelten, ist bei $n = 11$, wie auch sonst stets, einer systematischen Auflösung fähig. Man wird bei der Problemstellung vorab die Dimension ν angeben, welche die gewünschten, in den z_α selbstverständlich homogenen Relationen aufweisen sollen. *Man wird dann in erschöpfender Weise gleich nach den gesamten linear-unabhängigen Relationen ν^{ten} Grades zwischen den z_α fragen, die wir alsdann späterhin geometrisch als ebenso viele linear-unabhängige Flächen deuten mögen, auf deren jeder die zugehörige Curve der z_α ganz gelegen sein würde.* Die linke Seite einer solchen Relation $f(z_\alpha) = 0$ kann man aber immer derart gebildet annehmen, dass sich dieselbe bei der Operation S bis auf eine bestimmte Einheitswurzel reproduciert. Würde nämlich $f(z_\alpha)$ in mehrere Bestandteile zerfallen, die bei S verschiedene 11te Einheitswurzeln annehmen, so hätte man offenbar jeden dieser Bestandteile für sich gleich Null zu setzen. Bei dieser Sachlage schlagen wir zur Auflösung unserer Frage den nachfolgenden Weg ein:

Wir bilden uns erstlich alle ν-gliedrigen Producte der z_α und ordnen sie in *elf Classen* an, je nach der 11ten Einheitswurzel, die sie bei Ausübung von S als Factor annehmen. Die Classe vom Factor

$\varepsilon^0 = 1$ steht für sich; die übrigen zehn Classen zerfallen in zwei Abteilungen zu je fünf, wobei die Classen der einzelnen Abteilung durch die Operation U in einander übergeführt werden. Man bilde jetzt aus den z_α-Producten der einzelnen Classe eine lineare homogene Function mit numerischen Coefficienten. Diese Function, die wir gleich wieder $f(z_\alpha)$ nennen mögen, stellt eine der 11ten Stufe, allgemein zu reden, adjungierte ganze Modulform $(-2\nu)^{\text{ter}}$ Dimension vor und besitzt als solche auf dem Hauptpolygon F_{660} die Wertigkeit 110ν. Von den 110ν Nullpunkten liegt aber eine grössere Reihe in den Punkten c des Polygons und zwar unabhängig davon, wie wir die Coefficienten in $f(z_\alpha)$ gewählt haben mögen. Man wird hierbei zweckmässig diejenigen fünf Punkte c für sich betrachten, welche von den Polygonspitzen $\omega = i\infty$, $U(i\infty)$, $U^2(i\infty)$, ... herrühren, und von ihnen die 55 übrigen Punkte c sondern. In den letzteren Punkten zeigt $f(z_\alpha)$ ein gleichmässiges Verhalten; so z. B. wird $f(z_\alpha^{(1)})$ in jedem der in Rede stehenden 55 Punkte im Grade $\frac{3\nu}{2}$ verschwinden, so dass nur noch $\frac{55\nu}{2}$ Nullpunkte übrig bleiben. In jenen fünf vorausgenommenen Punkten c wird aber im allgemeinen noch ein höheres Verschwinden von $f(z_\alpha)$ eintreten, wie man solches im Einzelfalle immer leicht von den Formelgruppen (1) bez. (2), (5) § 1 aus überblicken kann.

Die bisherige Überlegung galt, wie schon bemerkt, für jede beliebige Wahl der Coefficienten von $f(z_\alpha)$. Nun mag man versuchen, diese Coefficienten derart zu particularisieren, dass möglichst viele von den rückständigen Nullpunkten in die genannten fünf besonderen Stellen c des Polygons zu liegen kommen. Dies ist durch eine solche Wahl jener Coefficienten anzustreben, dass in den Potenzentwicklungen von $f(z_\alpha)$, $f(z_{3\alpha})$, $f(z_{9\alpha})$, ... nach r die Anfangsglieder möglichst zahlreich zum Ausfall gebracht werden. *Gelingt eine solche Wahl der Coefficienten, dass die Gesamtanzahl der Nullpunkte von $f(z_\alpha)$ in den Stellen c den Betrag 110ν übersteigt, so wird dieses $f(z_\alpha)$ auf dem Polygon offenbar mit Null identisch sein müssen;* dabei wird $f(z_\alpha) = 0$ gleich $\varkappa$ linear-unabhängige Relationen in sich vereinen, wenn bei der gedachten Rechnung $\varkappa$ Coefficienten von $f(z_\alpha)$ unbestimmt bleiben. — Dass wir auf diesem Wege aber auch zu den gesamten Relationen ν^{ten} Grades geführt werden müssen, wird man leicht überblicken.

Jetzt bemerken wir weiter: Die Wertigkeit von $f(z_\alpha)$ wächst proportional mit der Zahl ν, die Zahl der z_α-Producte der einzelnen Classe, d. i. die Anzahl der in $f(z_\alpha)$ zur Verfügung stehenden Coefficienten wächst aber sehr viel schneller. Man wird also annehmen dürfen, dass Relationen $f(z_\alpha) = 0$ stets angegeben werden können, so-

bald ν eine gewisse Grenze übersteigt, und es entspringt hier insbesondere die Frage, *welches der niederste Wert von ν ist, für den es Relationen $f(z_\alpha) = 0$ giebt.* Haben wir dann einmal Relationen ν^{ten} Grades $f(z_\alpha) = 0$, $f'(z_\alpha) = 0$, ... gewonnen, so wird man Gleichungen der Grade $(\nu + 1)$ etc. zwischen den z_α ja auch schon dadurch ableiten können, dass man z. B. Verbindungen

$$z_\beta f(z_\alpha) + z_\gamma f'(z_\alpha) + \cdots = 0$$

und ähnliche höheren Grades herstellt*).

Diese allgemein gültige Überlegung erläutern wir jetzt am Modulsystem $z_\alpha^{(1)}$. Da diese fünf Grössen linear-unabhängig sind, so sei erstlich $\nu = 2$. Die 15 *quadratischen* Verbindungen der z_α verteilen sich aber in der Art auf zehn Classen, dass die Classen der einen Abteilung immer zwei z_α-Producte enthalten, nämlich z_α^2 und $z_{3\alpha} z_{9\alpha}$, während die Classen der anderen Abteilung nur je *ein* Product aufweisen. Giebt es also überhaupt quadratische Identitäten zwischen den Moduln z_α, so werden dies die fünf mit einander gleichberechtigten sein:

$$(1) \qquad a z_\alpha^2 + b z_{3\alpha} z_{9\alpha} = 0 \text{ **)}.$$

Nimmt man aber hier $\alpha = 1$, so ergiebt sich aus den Reihen (2) § 1, dass die beiden Glieder von (1) bei $\omega = i\infty$ in verschiedenen Graden verschwinden; die Gleichung (1) kann demnach bei nicht-verschwindenden a, b nicht identisch bestehen, und also folgt: *Zwischen den fünf Moduln $z_\alpha^{(1)}$ giebt es keine algebraische Relationen zweiten Grades.*

Die 35 *cubischen* Verbindungen der z_α liefern erstlich die fünf Producte $z_\alpha^2 z_{3\alpha}$ für die Classe vom Factor $\varepsilon^0 = 1$, und wir haben also die Existenz von Relationen der Gestalt:

$$(2) \qquad c_1 z_1^2 z_3 + c_3 z_3^2 z_9 + c_9 z_9^2 z_5 + c_5 z_5^2 z_4 + c_4 z_4^2 z_1 = 0$$

zu discutieren. Bei $\omega = i\infty$ verschwindet aber das vierte Glied von (2) in geringerem Grade als alle übrigen Glieder, so dass in der Identität (2) notwendig $c_5 = 0$ ist. Man wende nun auf (2) die Substitution U an und findet durch die nämliche Überlegung $c_9 = 0$ u. s. w. Es

*) Dass es übrigens immer eine *endliche* Zahl von unabhängigen Relationen $f(z_\alpha) = 0$, $f'(z_\alpha) = 0$, ... (unterschiedener Dimensionen ν) giebt, vermöge deren *alle* übrigen Relationen nach Art des Textes mit Hülfe rationaler ganzer Verbindungen g, g', ... in der Gestalt

$$g(z_\alpha) f(z_\alpha) + g'(z_\alpha) f'(z_\alpha) + \cdots = 0$$

darstellbar sind, hat Hr. Hilbert bewiesen; man sehe dessen bez. Abhandlung in den Mathem. Annalen Bd. 36 (1889).

**) Wir schreiben hier statt ζ_α überall kurz z_α, damit man die Reihenentwicklungen (2) § 1 unmittelbar einsetzen kann.

giebt also keine Relation (2) mit nicht-verschwindenden c_α. Die übrigen 30 cubischen Verbindungen der z_α verteilen sich zu je drei auf die zehn Classen der beiden Abteilungen, und wir finden von ihnen aus, dass etwa noch bestehende cubische Identitäten eine der Gestalten:

$$a_1 z_\alpha^3 + b_1 z_{4\alpha}^2 z_{9\alpha} + c_1 z_\alpha z_{3\alpha} z_{9\alpha} = 0,$$
$$a_2 z_\alpha z_{3\alpha}^2 + b_2 z_{3\alpha} z_{4\alpha}^2 + c_2 z_\alpha z_{5\alpha} z_{9\alpha} = 0$$

aufweisen müssten. Aber es zeigt sich wieder leicht durch Untersuchung bei $\omega = i\infty$, dass keine dieser Gleichungen mit nicht-verschwindenden a, b, c identisch erfüllt sein kann. Also der Satz: *Es giebt für die* $z_\alpha^{(1)}$ *auch keine algebraische Relationen dritten Grades.*

Biquadratische Relationen zwischen den z_α existieren nun aber wirklich; wir brauchen dieselben gar nicht in der bisherigen systematischen Weise abzuleiten, sondern können sie aus der Gleichung (9) p. 314 abschreiben, welche wir seinerzeit ganz allgemein für die durch die ϑ_1-Function darstellbaren z_α bewiesen haben. Wir setzen in der cit. Relation die vier Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ erstlich der Reihe nach mit $0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha$ identisch, indem wir unter α, wie immer, einen beliebigen quadratischen Rest von 11 verstehen. *Man erhält so ein erstes System von fünf gleichberechtigten biquadratischen Identitäten der* z_α:

$$z_\alpha^3 z_{5\alpha} + z_{9\alpha}^3 z_{4\alpha} + z_{3\alpha}^3 z_\alpha = 0. \tag{3}$$

Man setze zweitens die α_i der Formel (9) p. 314 mit 0, 1, 2, 4 der Reihe nach identisch, *und erhält ein zweites System von fünf gleichberechtigten biquadratischen Relationen:*

$$z_\alpha^2 z_{5\alpha} z_{9\alpha} + z_\alpha z_{3\alpha} z_{4\alpha}^2 - z_{3\alpha} z_{5\alpha} z_{9\alpha}^2 = 0. \tag{4}$$

Ferner knüpfen wir an die Relationen (4) die folgende Rechnung. Die linke Seite von (4) nennen wir $h(z_\alpha)$ und bemerken, dass $h(z_\alpha)$ zur Classe vom Factor $\varepsilon^{10\alpha^2}$ gehört. Man definiere nun $f(z_\alpha)$ durch:

$$z_{3\alpha} h(z_\alpha) + z_{9\alpha} h(z_{9\alpha}) = z_\alpha f(z_\alpha). \tag{5}$$

Da zufolge leichter Rechnung die linke Seite von (5) den Factor z_α besitzt, so wird $f(z_\alpha)$ wieder eine ganze homogene Function vierten Grades der z_α vorstellen, und zwar nimmt dieselbe bei Ausübung der Substitution S den Factor $\varepsilon^{3\alpha^2}$ an. Da aber die linke Seite von (5) identisch verschwindet, so gilt dasselbe von $f(z_\alpha)$, *so dass wir die ferneren fünf gleichberechtigten biquadratischen Relationen erhalten:*

$$z_{3\alpha}^2 z_{4\alpha}^2 + z_{4\alpha} z_{9\alpha}^3 - z_{4\alpha}^2 z_{5\alpha} z_{9\alpha} + z_\alpha z_{3\alpha} z_{5\alpha} z_{9\alpha} = 0. \tag{6}$$

Die fünfzehn Relationen (3), (4), (6) verteilen sich so auf die zehn Classen, dass immer nur die einzelne Relation (3) mit der zu dem gleichen α gehörenden Relation (6) einer und derselben Classe angehört. Diese

zwei Relationen sind aber sicher von einander linear-unabhängig, und da linear-abhängige Relationen offenbar derselben Classe angehören müssen, so folgt als Resultat: *Die fünfzehn Gleichungen* (3), (4), (6) *stellen ein System linear-unabhängiger Relationen vierten Grades dar, die zwischen den Moduln z_α des ersten Systems bestehen**).

Fernere Relationen für die z_i^1 betrachten wir nicht mehr besonders.

§ 3. Die zur G_{660} gehörenden invarianten Verbindungen der z_α und deren Beziehung zu den Modulformen erster Stufe g_2, g_3, Δ.

In der Theorie der 7ten Stufe (I p. 733) wurden mehrere ganze homogene Functionen der damaligen z_α gebildet, welche die Eigenschaft hatten, bei den 168 Substitutionen jener z_α nicht nur dem Werte, sondern auch der *Gestalt* nach unverändert in sich überzugehen. Es ist die Frage, ob wir auch bei der 11ten Stufe aus den 5 „Variabelen" z_α oder ζ_α analoge Verbindungen herstellen können, die wir als *Invarianten der Gruppe G_{660}* zu bezeichnen hätten. Setzen wir späterhin in einer einzelnen solchen Invariante für die Variabelen entweder die ζ_α eines der beiden Systeme oder die $z_\alpha^{(3)}$ ein, so müssen die derart gebildeten Ausdrücke (als Functionen von ω_1, ω_2) entweder identisch verschwinden oder ganze Modulformen erster Stufe darstellen.

Für eine systematische Ableitung der in Rede stehenden Invarianten der G_{660} können die Gesichtspunkte des vorigen Paragraphen verwertet werden. Soll die Invariante homogen von der Dimension ν in den z_α sein, so wird man immer nur die ν-gliedrigen z_α-Producte jener einen für sich stehenden Classe heranziehen, die gegenüber S invariant sind. Die fraglichen Producte bringe man alsdann in eine solche lineare Verbindung, dass immer in fünf durch U auseinander hervorgehenden Producten Symmetrie stattfindet. Die weitere Entwicklung wird man dann zweckmässig durch formentheoretische Betrachtungen im Anschluss an das Transformationspolygon F_{12} kürzen. Wie diese anzustellen sind, zeigen wir sogleich an einem Beispiele.

Gegenüber S invariante z_α-Producte traten zuerst bei $\nu = 3$ auf, und zwar gab es dort die fünf Producte $z_\alpha{}^2 z_{3\alpha}$. Es kann demnach höchstens die eine Invariante dritten Grades:

$$\Phi(z_\alpha) = z_1{}^2 z_3 + z_3{}^2 z_9 + z_9{}^2 z_5 + z_5{}^2 z_4 + z_4{}^2 z_1 \tag{1}$$

existieren. Statt nun unmittelbar zu untersuchen, ob $\Phi(z_\alpha)$ wirklich

*) Die fünfzehn biquadratischen Relationen zwischen den Moduln des ersten Systems der z_α wurden von Hrn. Klein in Bd. 15 l. c. durch directe Betrachtungen zur Ableitung gebracht.

auch gegenüber T invariant ist, was eine etwas umständliche Rechnung erfordern würde, gehen wir den folgenden indirecten Weg. Man setze in (1) insbesondere die $z_\alpha^{(1)}$ ein und hat alsdann in $\Phi(z_\alpha^{(1)})$ eine dem Polygon F_{12} adjungierte Modulform $(-6)^{\text{ter}}$ Dimension. Da aber die $z_\alpha^{(1)}$ durch Multiplication mit $\sqrt{\Delta}$ zu Moduln 11ter Stufe werden, so ist der Quotient $\Phi(z_\alpha^{(1)}) : \sqrt{\Delta}$ eine zum Polygon F_{12} gehörende Function. Man rechnet nun vermöge (2) p. 404 sofort aus, dass dieselbe bei $\omega = i\infty$ den Wert 8 annimmt, so dass sie nur noch in der anderen Spitze $\omega = 0$ von F_{12} unendlich werden kann. Hier aber liegt für jedes einzelne $z_\alpha^{(1)}$ ein Nullpunkt der Ordnung $\frac{3}{2}$, für $\Phi(z_\alpha^{(1)})$ also entweder ein solcher der Ordnung $\frac{9}{2}$ oder $\frac{11}{2}$, was aus der Wertigkeit 6 von Φ sofort folgt. Da aber $\sqrt{\Delta}$ an jener Stelle einen Nullpunkt der Ordnung $\frac{11}{2}$ hat, so folgt: entweder bleibt der Quotient $\Phi(z_\alpha^{(1)}) : \sqrt{\Delta}$ auf F_{12} überall endlich, oder er stellt eine einwertige Function von F_{12} dar. Letzteres aber widerspricht dem Umstande, dass F_{12} das Geschlecht $p = 1$ hat, *und also entspringen die Relationen:*

$$(2) \qquad \Phi(z_\alpha^{(1)}) = 8\sqrt{\Delta}, \quad \Phi(\zeta_\alpha^{(1)}) = 8\Delta^2.$$

Werde nun $\Phi(z_\alpha)$ durch T in $\Phi'(z_\alpha)$ übergeführt, so besteht die Gleichung $\Phi(\zeta_\alpha) - \Phi'(\zeta_\alpha) = 0$ unabhängig von den besonderen Werten der ω_1, ω_2; aber diese Gleichung muss bereits in den ζ_α identisch bestehen, da wir im vorigen Paragraphen sahen, dass es keine cubische Relationen zwischen den $z_\alpha^{(1)}$ giebt. *Die Form $\Phi(z_\alpha)$ ist also wirklich eine Invariante der G_{660}* *).

Durch ähnliche Betrachtungen kann man zeigen, dass es keine Invariante vierten Grades der G_{660} giebt. Aber wir haben jetzt ein einfaches Mittel, *eine Invariante fünften Grades* von $\Phi(z_\alpha)$ zu bilden. Wir rechnen uns, wie auch schon bei früheren Stufen, z. B. bei $n = 7$, einfach *die zu Φ gehörende Hesse'sche Determinante:*

$$(3) \qquad \Psi(z_\alpha) = \begin{vmatrix} z_1 & z_4 & 0 & 0 & z_5 \\ z_4 & z_3 & z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & z_9 & z_3 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & z_5 & z_9 \\ z_5 & 0 & 0 & z_9 & z_4 \end{vmatrix}$$

aus und finden als expliciten Ausdruck der somit gewonnenen Invariante fünften Grades:

$$(4) \qquad \Psi(z_\alpha) = \sum_\alpha z_\alpha z_{9\alpha}^2 (z_\alpha^2 - z_{3\alpha} z_{9\alpha}) + 3 z_1 z_3 z_9 z_5 z_4.$$

*) Mag erlaubt sein, bei diesen Sätzen unter der allgemeinen Bezeichnung z_α auch die normierten Moduln der beiden ersten Systeme mit einzubegreifen.

Unter Umgehung der nächstfolgenden Werte ν betrachten wir jetzt sofort $\nu = 11$. Wir können hier ähnlich verfahren, wie in I p. 739 (4) bei Gelegenheit des zu $n = 7$ gehörenden Problems der A_n. Man bemerke nämlich, dass z_α^{11} oder auch $(i\sqrt{11}\,z_\alpha)^{11}$ zum 11ten Teilungspolygon gehört (insofern diese Modulform gegenüber S invariant ist) und somit durch die Modulsubstitutionen insgesamt in 60 verschiedene gleichberechtigte Moduln transformiert wird. Wir werden uns aus der Gestalt der z_α-Substitutionen diese 60 gleichberechtigten Grössen leicht herleiten und finden nun in ihrer Summe als *eine zur G_{660} gehörende Invariante 11ten Grades:*

(5)
$$X(z_\alpha) = (i\sqrt{11})^{-11} \cdot \sum_\alpha \{(i\sqrt{11} \cdot z_\alpha)^{11}$$
$$+ \sum_{\beta=0}^{10} [(\varepsilon^\alpha - \varepsilon^{-\alpha})\,\varepsilon^{6\beta} z_1 + (\varepsilon^{3\alpha} - \varepsilon^{-3\alpha})\,\varepsilon^{10\beta} z_3 + (\varepsilon^{9\alpha} - \varepsilon^{-9\alpha})\,\varepsilon^{2\beta} z_9$$
$$+ (\varepsilon^{5\alpha} - \varepsilon^{-5\alpha})\,\varepsilon^{7\beta} z_5 + (\varepsilon^{4\alpha} - \varepsilon^{-4\alpha})\,\varepsilon^{8\beta} z_4]^{11}\}.$$

Man hat hier freilich noch durch eine kurze Rechnung zu zeigen, dass der Ausdruck auf der rechten Seite von (5) jedenfalls in den z_α nicht identisch verschwindet; inwieweit identisches Verschwinden in ω_1, ω_2 eintritt, falls wir die z_α mit den Moduln eines unserer drei Systeme ζ_α, $z_\alpha^{(3)}$ identificieren, werden wir gleich untersuchen. —

Wir setzen nunmehr in die drei gewonnenen Invarianten nach einander die Moduln der drei Systeme ein und bringen die so entstehenden Ausdrücke mit den Moduln erster Stufe in Beziehung. Die Bedeutung von $\Phi(\zeta_\alpha^{(1)})$ ist bereits in (2) angegeben. In $\Psi(z_\alpha^{(1)})$ ist ein Ausdruck definiert, der durch Multiplication mit $\sqrt{\Delta}$ zu einer ganzen Modulform erster Stufe $(-16)^{\text{ter}}$ Dimension wird; wir schliessen daraus in gewohnter Weise auf den Ansatz:

(6)
$$\Psi(z_\alpha^{(1)}) = a g_2 \sqrt{\Delta}.$$

Aber die Reihenentwicklung der linken Seite von (6) weist kein Glied mit der Potenz $r^{\frac{1}{2}}$ auf, so dass $a = 0$ sein muss. Da ferner bei $\omega = i\infty$ gegen $z_5^{(1)}$ alle übrigen $z_\alpha^{(1)}$ verschwinden, so ist für die dritte Invariante:

(7)
$$\lim_{\omega = i\infty} X(z_\alpha^{(1)}) = z_5^{11} = -2^{11}\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{22} r^{\frac{3}{2}},$$

wie man leicht nachweisen wird. Andrerseits ist $X(z_\alpha^{(1)})$ eine ganze Modulform, die durch Multiplication mit $\sqrt{\Delta}$ zur ersten Stufe zurückgebracht wird, so dass sie infolge ihrer Dimension und der Annäherung (7) mit $g_2\Delta\sqrt{\Delta}$ proportional sein muss. Indem wir die Rechnung

leicht zu Ende führen, fassen wir die für die $z_\alpha^{(1)}$ gewonnenen Resultate in den Satz zusammen: *Die drei Invarianten* (1), (3), (5) *der* G_{660}, *gebildet für die Moduln* $\zeta_\alpha^{(1)}$ *unseres ersten Systems, geben die identischen Relationen:*

(8) $$\Phi(\zeta_\alpha) = 8\Delta^2, \quad \Psi(\zeta_\alpha) = 0, \quad X(\zeta_\alpha) = -2^{13}\cdot 3 g_2 \Delta^7.$$

Die Beziehung des ersten *Modulsystems* ζ_α *zum Hauptmodul erster Stufe* J *gestaltet sich also wie folgt:*

(9) $$\frac{X^3(\zeta_\alpha)}{\Phi^{11}(\zeta_\alpha)} = -1728\, J(\omega).$$

Bei dem den Formeln (5) p. 405 zugehörigen zweiten Modulsystem der $\zeta_\alpha^{(2)}$ fällt der Ausdruck von $X(\zeta_\alpha)$ durch g_2 und g_3 ein wenig complicierter aus; wir schliessen hier leicht auf den Ansatz:

(10) $$X(\zeta_\alpha) = (a g_2^3 + b g_3^2) g_2 \Delta^6,$$

wo sich die beiden Zahlen a, b jedenfalls nicht wie $4:27$ verhalten, so dass auf der rechten Seite von (10) eine höhere Potenz von Δ als die 6te nicht auftritt. Zur endgültigen Bestimmung der Formel (10), die wir indessen nicht leisten, würden wir also zwei Glieder der Reihenentwicklung von $X(\zeta_\alpha)$ nötig haben. Einfacher werden die Ausdrücke für Φ und Ψ; *wir finden für diese beiden Invarianten, gebildet in unserem zweiten Modulsystem* $\zeta_\alpha^{(2)}$, *die nachfolgenden Darstellungen durch* g_2, g_3:

(11) $$\Phi(\zeta_\alpha) = -3^2\cdot 13\Delta^2, \quad \Psi(\zeta_\alpha) = 2^6\cdot 3^2\cdot 5 g_2 \Delta^3,$$

woraus sich für $J(\omega)$ *der Ausdruck im* zweiten *Modulsystem* ζ_α *ergiebt:*

(12) $$3^4\cdot 13^5\cdot \frac{\Psi^3(\zeta_\alpha)}{\Phi^5(\zeta_\alpha)} = -2^{18}\cdot 5^3\cdot J.$$

Endlich verschwinden beim Modulsystem $z_\alpha^{(3)}$ die beiden Invarianten Φ und Ψ notwendig identisch; denn sie würden sonst ganze, bei $\omega = i\infty$ verschwindende, Modulformen erster Stufe der Dimension -6 und -10 vorstellen; *insgesamt aber finden wir für* dritte *Modulsystem der* $z_\alpha^{(3)}$ *die Relationen:*

(13) $$\Phi(z_\alpha) = 0, \quad \Psi(z_\alpha) = 0, \quad X(z_\alpha) = -2^5\cdot 3^4 g_2 g_3 \Delta.$$

Zur Darstellung von J durch die $z_\alpha^{(3)}$ würden wir also noch neue Invarianten der G_{660} heranziehen müssen*). —

*) Die invarianten Formen Φ, Ψ, X, sowie die specielle Betrachtung derselben für das erste Modulsystem $z_\alpha^{(1)}$ (Formeln (8) und (9) des Textes) wurden von Hrn. Klein bereits a. a. O. vollständig entwickelt.

§ 4. Von den geometrischen Gebilden 20sten, 80sten und 50sten Grades im Raume R_4, welche den drei z_α-Systemen entsprechen*).

Die Formeln des vorigen Paragraphen werden in neuer Weise verständlich, wenn wir nun in gewohnter Art die geometrische Deutung der ζ_α *als homogener Coordinaten eines Raumes R_4 von vier Dimensionen* einführen. Im R_4 legen wir ein beliebiges aus fünf linearen, nicht durch einen Punkt gehenden „Räumen" gebildetes Coordinatenpentaeder zu Grunde**) und beziehen auf dasselbe erstlich die Punktcoordinaten $\zeta_1, \zeta_3, \ldots$. Ihnen reihen wir aber im Anschluss an die Contragredienz des dritten Modulsystems zu den beiden ersten „Raum"-coordinaten an (welch' letztere den Liniencoordinaten der ebenen Geometrie und den Ebenencoordinaten der gewöhnlichen Raumgeometrie analog gebildet sind). Diese neuen Coordinaten, welche particulär gewählt immer einen im R_4 gelegenen linearen Raum fixieren, sollen z_α genannt werden und so bestimmt sein, dass durch die Gleichung:

$$z_1\zeta_3 + z_3\zeta_9 + z_9\zeta_5 + z_5\zeta_4 + z_4\zeta_1 = 0 \tag{1}$$

die vereinigte Lage von Punkt (ζ_α) und Raum (z_α) angezeigt ist. Üben wir jetzt eine Collineation des R_4 aus, so werden sich in der That die z_α in richtiger Weise zu den ζ_α contragredient substituieren.

Im so vorgerichteten R_4 sind nun zahlreiche geometrische Gebilde zu betrachten. *Die Punkte $\zeta_\alpha = \zeta_\alpha^{(1)}$ beschreiben nach* § 1 *eine eigentlich im R_4 gelegene Curve C_{20} der zwanzigsten Ordnung, während in entsprechender Weise die Punkte $\zeta_\alpha = \zeta_\alpha^{(2)}$ eine C_{80} der achtzigsten Ordnung beschreiben.* Beide Curven sind *einfach* bedeckt (wie man leicht beweist***)) und also gegenseitig auf einander *eindeutig* bezogen. Nun aber wird die Beziehung der C_{20} auf die C_{80} bei Ausübung der 660 Collineationen der G_{660} nicht gestört. Wenn wir demnach je zwei zugeordnete Punkte beider Curven durch eine Gerade verbinden, *so ent-*

*) Die hier und im folgenden Paragraphen gegebenen geometrischen Entwicklungen wolle man nur mehr als beiläufige ansehen. Diese Betrachtungen verfolgen den Zweck, die Wechselbeziehung zwischen den drei Modulsystemen der z_α der Anschauung näher zu legen, kommen indessen weiterhin bei der Theorie der Resolventen 11ten und 12ten Grades nur beiläufig zur Verwendung.

**) Wir bezeichnen hier consequenter Weise die durch eine *einzelne* Gleichung zwischen den Coordinaten ζ_α dargestellten *drei*-dimensionalen Gebilde des R_4 schlechtweg als „Räume". Es ist diese Terminologie hier durchführbar, weil wir eben im R_4 des Textes nur mit ein-, zwei- oder drei-dimensionalen Gebilden zu thun haben.

***) nämlich aus der *Verschiedenheit* der 660 ζ_α-Substitutionen und der *eindeutigen* Abhängigkeit des J vom einzelnen System der ζ_α; cf. (9) und (12) § 3.

springt aus all' diesen Geraden eine im R_4 gelegene Regelfläche, die durch die 660 *Collineationen der G_{660} in sich selbst transformiert wird.*

Man kann diese Regelfläche auch noch in anderer Weise entstanden denken. Wählen wir nämlich $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ als Parameter und bilden die fünf Moduln 11[ter] Stufe:

$$\zeta_\alpha = \varkappa_1 \zeta_\alpha^{(1)} + \varkappa_2 \zeta_\alpha^{(2)}, \tag{2}$$

so werden dieselben selbstverständlich mit den $\zeta_\alpha^{(1)}$, $\zeta_\alpha^{(2)}$ cogredient sein, andrerseits aber bei $\omega = i\infty$ das Verhalten der $\zeta_\alpha^{(2)}$ zeigen, wie man durch Vergleich der Formeln (2) und (5) § 1 findet. Aus letzterem Umstande schliesst man: *Bei beliebig fixierten $\varkappa_i$ werden die in* (2) *definierten ζ_α eine C_{80} des R_4 beschreiben, wenn ω das Polygon F_{660} überstreicht; nur für $\varkappa_2 = 0$ tritt an Stelle der C_{80} eine C_{20}.* Aber man sieht nun sofort, *dass die gesamten so erreichbaren Curven C_{80} gerade die oben beschriebene Regelfläche wieder erzeugen werden.* Es entspringt hier die Frage, wie man sich geometrisch das plötzliche Zurücksinken der Curvenordnung von 80 auf 20 bei $\varkappa_2 = 0$ zu erklären hat. Die Antwort ergiebt sich fast unmittelbar aus dem Umstande, dass von den 80 beweglichen Nullpunkten der aus den Moduln (2) zu bildenden linearen Verbindung $\Sigma c_\alpha \zeta_\alpha$ im Specialfall $\varkappa_2 = 0$ sechzig in den Punkten c vom Polygon F_{660} fixiert werden. Diesen 60 Punkten c entsprechen auf der Regelfläche ebenso viele Gerade, und da haben wir nun den Satz auszusprechen: *Die dem Modulsystem* (2) *zugeordnete C_{80} zerfällt für $\varkappa_2 = 0$ in jene* 60 *Gerade und die Curve C_{20} des Systems $\zeta_\alpha^{(1)}$.*

Man veranschauliche sich daraufhin den Verlauf der Curven C_{80} auf der Regelfläche. Eine jener 60 geraden Linien ist diejenige Pentaederkante, welche der durch $\zeta_1 = 0$, $\zeta_5 = 0$ dargestellten „Ebene" des Coordinatenpentaeders gegenüberliegt. In der Nähe dieser Linie convergieren alle Curven C_{80} auf der Regelfläche nach der Pentaederecke $\zeta_1 \gtrless 0$, $\zeta_3 = \zeta_9 = \cdots = 0$. Aber hierbei schmiegen sich die C_{80} mit kleiner werdendem $\varkappa_2$ mehr und mehr an die in Rede stehende Gerade und die C_{20} an. Bei den übrigen 59 Geraden, die aus der ersteren durch eine in der G_{660} enthaltene Ikosaeder-G_{60} hervorgehen, gestalten sich die Dinge ebenso.

Schliesslich entspricht dem *dritten* Modulsystem z_α *ein aus* ∞^1 *linearen Räumen bestehendes Gebilde des R_4, welches den developpabeln Flächen der gewöhnlichen Raumgeometrie parallel gehen wird;* wir haben diesem Gebilde die *Classe* 50 zu erteilen, insofern durch jeden Punkt des R_4 50 jenem Gebilde angehörende lineare Räume hindurchgehen. Unser neues Gebilde wird natürlich gleichfalls durch die 660 Collineationen in sich selbst übergeführt. *Der einzelne lineare Raum des*

in Rede stehenden Gebildes schneidet zufolge der Gleichung (9) **§ 1** *die Regelfläche (neben weiteren Bestandteilen) in derjenigen geraden Linie, welche vermöge der gemeinsamen Beziehung zum Polygon F_{660} der betreffenden Stelle des Gebildes der* 50sten *Classe eindeutig zugeordnet ist.* Letzteres Gebilde liegt also geradezu *perspectiv* zur Regelfläche, auf die es eindeutig bezogen ist.

§ 5. Durchschnitt der Curven C_{20}, C_{80} und der Regelfläche mit den Räumen $\Phi(\zeta) = 0$ und $\Psi(\zeta) = 0$.

Den im vorigen Paragraphen betrachteten Gebilden des R_4 gesellen wir jetzt *den durch:*

$$\Phi(\zeta_\alpha) = 0 \tag{1}$$

dargestellten cubischen Raum hinzu, der gleichfalls die wichtige Eigenschaft hat, durch die 660 Collineationen des R_4 in sich selbst übergeführt zu werden. Beim Durchschnitt des Raumes (1) mit einer der Curven C_{80} oder C_{20} treten nun Überlegungen in Kraft, wie wir sie in Bd. I wiederholt, z. B. bei $n = 7$ (p. 696), verwendeten. Soll eine einzelne unserer Curven nicht ganz im Raume $\Phi = 0$ gelegen sein, so wird letzterer auf der Curve ein System von Punkten ausschneiden, das gegenüber der G_{660} invariant ist. Eben deshalb muss die Anzahl dieser Schnittpunkte sich vermöge ganzer, nicht-negativer Zahlen α, β, γ, δ in der Gestalt schreiben lassen:

$$660\alpha + 330\beta + 220\gamma + 60\delta, \tag{2}$$

wobei diejenigen Punkte der Curve, welche in den drei letzten Gliedern von (2) gezählt sind, die wohlbekannte specielle Lage auf der Curve haben werden. Es wird nun die C_{20} der $\zeta_\alpha^{(1)}$ von $\Phi = 0$ in 60 Punkten geschnitten, und es ist somit in (2) $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $\delta = 1$ zu nehmen, da doch $\Phi(\zeta_\alpha^{(1)})$ nicht identisch Null ist. *Der Raum* (1) *schneidet also auf der C_{20} der $\zeta_\alpha^{(1)}$ das System der* 60 *Punkte c aus,* was ein Blick auf die erste Formel (8) p. 413 sofort bestätigt; denn eben an diesen Stellen der C_{20} verschwindet Δ. Durch dieselbe Überlegung finden wir, *dass die C_{80} der $\zeta_\alpha^{(2)}$ vom Raume* (1) *im vierfach gerechneten* ($\delta = 4$) *System der sechzig Punkte c geschnitten wird.*

Jetzt aber wolle man zur gründlicheren Erfassung der vorliegenden Verhältnisse den Raum $\Phi = 0$ gleich mit der Regelfläche der ζ_α-Curven zum Durchschnitt bringen, und hierbei tritt folgende interessante Betrachtung ein: Im allgemeinen ist der Ausdruck Φ, gebildet für das in (2) § 4 gegebene Modulsystem ζ_α, als Modulform der ersten Stufe mit Δ^3 proportional. Da aber Φ vom dritten Grade ist, so wird es

drei Specialwerte für den Quotienten $\varkappa_1 : \varkappa_2$ geben, für welche das in der Regel eintretende Anfangsglied mit der Potenz r^2 in der Entwicklung von $\Phi(\zeta_\alpha)$ ausfällt. Wir berechnen für diese Specialwerte $\varkappa$ die cubische Gleichung:

$$(3) \qquad 8\varkappa_1^3 - 60\varkappa_1^2\varkappa_2 + 150\varkappa_1\varkappa_2^2 - 117\varkappa_2^3 = 0,$$

welche aufgelöst die drei *verschiedenen* Wurzeln giebt:

$$(4) \qquad \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} = \frac{3}{2}, \quad = \frac{6 + i\sqrt{3}}{2}, \quad = \frac{6 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Man wird nun schon bemerkt haben, dass diese drei Modulsysteme ζ_α drei identisch verschwindende $\Phi(\zeta_\alpha)$ geben müssen, und dieses Resultat kleiden wir wiederum in den geometrischen Satz: *Der Raum* (1) *schneidet auf der Regelfläche drei unterschiedene von den Curven C_{80} aus.* Irgend eine andere C_{80} (sowie auch C_{20}) hat mit dem Raume (1) nur ihre Punkte c gemeinsam. Eine einzelne der 60 Geraden c (der Regelfläche) hat aber mit (1) zufolge des eben cursiv gedruckten Satzes an der betreffenden Stelle c der C_{80} *drei* consecutive Punkte gemeinsam, während sie doch andrerseits den Raum $\Phi = 0$ noch in dem zugehörigen Punkte c der C_{20} schneidet. Die fragliche Gerade liegt demnach ganz im Raume $\Phi = 0$, da dieser doch von einer nicht in ihr gelegenen Geraden nur in *drei* Punkten geschnitten wird. Fassen wir also zusammen, so ergiebt sich bei der Art, wie die Curven C_{80} die Regelfläche überlagern, das Resultat: *Der vollständige Durchschnitt des Raumes $\Phi = 0$ mit der Regelfläche besteht aus drei verschiedenen, durch* (4) *festgelegten, Curven C_{80} im Verein mit den sechzig geraden Linien c.* Weiter aber folgt hieraus: *Die Regelfläche besitzt die Ordnung* 100*).

Der *Raum fünfter Ordnung* $\Psi = 0$ wird die C_{20} der $\zeta_\alpha^{(1)}$ ganz enthalten müssen, da es auf dieser Curve kein invariantes System von 100 Punkten giebt. Andrerseits lässt sich 400 in der Gestalt (2) nur durch $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$, $\delta = 3$ darstellen. Soll also der Raum $\Psi = 0$ die einzelne Curve C_{80} nicht ganz enthalten, so wird er auf der C_{80} das System der 220 Punkte b einfach, die 60 Punkte c aber dreifach

*) Zur Sicherstellung des eben befolgten Schlussverfahrens beachte man, dass keines der gefundenen Schnittgebilde von Regelfläche und Raum $\Phi = 0$ mehrfach zählt. Dies ist für die drei Curven C_{80} aus der obigen Deduction leicht ersichtlich und kommt übrigens zum unmittelbaren Ausdruck durch den Umstand, dass die Gleichung (3) des Textes keine Doppelwurzel hat (man vgl. dem gegenüber die sogleich unter (5) folgende Gleichung). Sollte aber eine der Geraden c als Schnitt der Regelfläche mit dem Raume $\Phi = 0$ mehrfach zählen, so müsste offenbar der Raum $\Phi = 0$ die ganz auf der Regelfläche gelegene C_{20} an jener Stelle c mehrfach schneiden; das aber widerspricht, wie wir schon fanden, der Thatsache.

gezählt ausschneiden. Die betreffenden Formeln (8) und (11) § 3 werden diese letzteren Angaben als richtig bestätigen.

Um den Schnitt von $\Psi = 0$ mit der Regelfläche zu untersuchen, bemerke man, dass es jetzt fünf Werte $x_1 : x_2$ giebt, für welche Ψ, gebildet für die betreffenden ζ_α, identisch verschwinden muss. Wir finden als Gleichung für diese speciellen Parameter:

$$(5) \qquad (x_1 - 3x_2)(2x_1^2 - 13x_1x_2 + 20x_2^2)\,x_2^2 = 0,$$

deren Wurzeln:

$$(6) \qquad x_2^2 = 0, \quad \frac{x_1}{x_2} = 3, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{8}{2}$$

sind. *Der Raum $\Psi = 0$ schneidet auf der Regelfläche sonach neben der C_{20} noch drei verschiedene Curven C_{80} aus.* Da aber $\Psi(\zeta_\alpha)$ im allgemeinen mit $g_2\Delta^3$ proportional ist, *so wird überdies der Complex der 220 auf der Regelfläche gelegenen Geraden b im Durchschnitt der Fläche mit $\Psi = 0$ enthalten sein.* Würden alle bislang aufgezählten Bestandteile des Durchschnitts nur einfach in Betracht kommen, so würden sie insgesamt eine Curve der Ordnung $220 + 20 + 3 \cdot 80 = 480$ zusammensetzen. Aber $\Psi = 0$ schneidet die Regelfläche in einer C_{500}, so dass noch eine C_{20} fehlt. Da aber, wie man übersehen haben wird, neue Schnittgebilde nicht mehr in Betracht kommen können, so ist die fehlende C_{20} unsere Curve der $\zeta_\alpha^{(1)}$, was in der That durch die Doppelwurzel $x_2 = 0$ von (5) bestätigt wird. *Die C_{20} der $\zeta_\alpha^{(1)}$ zählt demnach in dem fraglichen Durchschnitt doppelt,* und dies ist nur dadurch möglich, dass entweder die Regelfläche von $\Psi = 0$ längs der C_{20} berührt wird, oder aber dass diese C_{20} eine Doppelcurve des Raumes $\Psi = 0$ ist.

Und nun tritt von diesen beiden Möglichkeiten thatsächlich die letztere ein. Leiten wir nämlich den expliciten Ausdruck $\Psi(z_\alpha)$ nach einer der fünf Grössen z_α ab, so erhalten wir jedesmal einen biquadratischen Ausdruck der z_α, der sich aus den linken Seiten bestimmter zwei Relationen (3) und (4) p. 409 linear zusammensetzt. Für die Punkte der C_{20} verschwinden also alle fünf ersten Ableitungen von $\Psi(\zeta_\alpha)$ identisch, *so dass in der That die Curve C_{20} eine Doppelcurve des Raumes $\Psi = 0$ fünfter Ordnung ist.* Das hiermit erreichte Resultat bildet im Raume R_4 das genaue Analogon einer von Sylvester und Clebsch herrührenden Entwicklung aus der Theorie der Flächen dritter Ordnung im gewöhnlichen Raume R_3 *), was noch evidenter wird durch die Bemerkung, *dass die fünfzehn unterschiedenen viergliedrigen Unterdeterminanten von (3) p. 411, mit Null identisch gesetzt, die fünfzehn*

---

*) Man sehe den ausführlichen Bericht über diese Theorie in der Salmonschen Raumgeometrie (deutsche Ausgabe, 3. Aufl., 1880) Artikel 296 u. f.

Relationen des § 2 *wieder ergeben.* Wenn man in entsprechender Weise im R_3 die Hesse'sche Fläche einer Fläche dritter Ordnung durch Nullsetzen einer viergliedrigen Determinante darstellt, so werden durch Nullsetzen der zehn ersten Unterdeterminanten (zufolge der eben citierten Theorie) die zehn Knotenpunkte jener Hesse'schen Fläche dargestellt. Mit dem System dieser Knotenpunkte würde also in unserem Raume R_4 die C_{20} der z_α als Doppelcurve der Hesse'schen Fläche $\Psi = 0$ in Parallele zu setzen sein*).

Wir brechen diese Betrachtungen ab, obwohl sie leicht noch weiter fortgesetzt werden könnten. Man würde nun auch noch die Gleichung $X(\zeta_\alpha) = 0$, sowie weiter die durch $\Phi(z_\alpha) = 0$ und $\Psi(z_\alpha) = 0$ dargestellten Raumgebilde verfolgen können. Vor allem würde man auch umgekehrt die den particulären Parameterwerten (4) und (6) zugehörigen ζ_α-Systeme einer weiteren functionentheoretischen Discussion unterziehen, sowie weiter alle geschehenen Entwicklungen in ausgedehnter Weise für die nun darzustellende Theorie der Resolventen verwerten können. Um indessen nicht zu viel Raum mit der Theorie der 11ten Stufe einzunehmen, knüpfen wir nur noch die Untersuchung der Resolvente 11ten Grades an das System der $z_\alpha^{(1)}$, während wir späterhin für die Resolvente 12ten Grades andere, gerade für diese Resolvente besonders taugliche, Moduln heranziehen werden.

§ 6. Auswahl einer speciellen Untergruppe G_{60} von G_{660} und Untersuchung des zur G_{60} gehörenden Polygons F_{11}.

Hat man einmal die Gesamtheit der algebraischen Relationen zwischen den fünf Moduln des einzelnen Systems unter einander sowie zwischen ihnen und den Moduln erster Stufe g_2, g_3, Δ gewonnen, so mag man nun in bekannter Weise wieder umgekehrt dieses Gleichungssystem bei gegebenen g_2, g_3 als Definition der fünf Moduln ζ_α bez. z_α ansprechen. Wir verweilen aber nicht bei der ausführlichen Formulierung des so gemeinten Galois'schen Problems, wenden uns vielmehr gleich zu dessen niedersten Resolventen; und hier sind es die beiden Resolventen 11ten Grades, welche ihrer ausnahmsweisen Stellung wegen (cf. I p. 490) das Hauptinteresse in Anspruch nehmen. Untersuchen wir also vor allem diese Resolventen!

Es fanden sich in Bd. I p. 479 ff. innerhalb der G_{660} zwei Systeme von je 11 gleichberechtigten G_{60} vom Ikosaedertypus, die erst dann in einander transformierbar waren, wenn wir von G_{660} zu der durch

*) Es ist hiermit der Gedankengang skizziert, vermöge dessen Hr. Klein l. c. die Curve C_{20} der z_α zuerst ableitete.

Spiegelungen erweiterten Gruppe $\overline{G}_{660}$ fortgingen. In der Absicht, die Polygone F_{11} für die beiden entsprechenden Congruenzgruppen Γ_{11} vom Index 11 zu untersuchen, greifen wir etwa diejenige unter den 22 Gruppen G_{60} auf, welche wir aus den Substitutionen:

$$(1)\qquad s \equiv U \equiv \begin{pmatrix} 3, & 0 \\ 0, & 4 \end{pmatrix}, \quad t \equiv S^{-1}TS \equiv \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ -1, & -1 \end{pmatrix} \pmod{11}$$

erzeugen können. Dass diese Substitutionen wirklich eine Ikosaedergruppe G_{60} innerhalb der G_{660} bilden, folgt aus dem Dyck'schen Satze (I p. 456); denn man beweist sofort, dass die Bedingungen dieses Satzes:

$$s^5 \equiv 1, \quad t^2 \equiv 1, \quad (st)^3 \equiv 1 \pmod{11}$$

von den Substitutionen (1) erfüllt werden. In dieser G_{60} wird sich übrigens auch die Operation finden:

$$(2)\qquad u = s^2ts^2ts^3t \equiv T \equiv \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} \pmod{11}.$$

Wir merken uns auch gleich, welche Gestalt die G_{60} annimmt, wenn wir sie durch die ζ_α-Substitutionen darstellen; es ergiebt sich aus den bezüglichen Angaben des § 1 für die Substitutionen s, t, u:

$$(3)\qquad \begin{cases} (s) & \zeta_\alpha' = \zeta_{3\alpha}, \\ (t) & i\sqrt{11}\,\zeta_\alpha' = \sum\limits_{\gamma} \varepsilon^{6(\gamma^2-\alpha^2)}(\varepsilon^{\alpha\gamma} - \varepsilon^{-\alpha\gamma})\,\zeta_\gamma, \\ (u) & i\sqrt{11}\,\zeta_\alpha' = \sum\limits_{\gamma} (\varepsilon^{\alpha\gamma} - \varepsilon^{-\alpha\gamma})\,\zeta_\gamma. \end{cases}$$

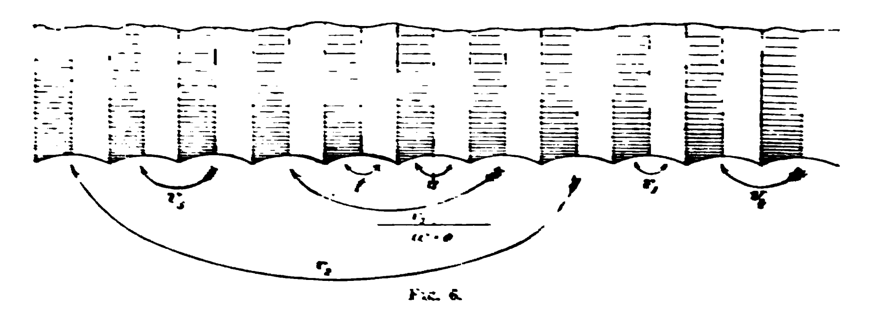


Fig. 6.

Das Polygon der ausgewählten Congruenzgruppe Γ_{11} hat die in Figur 6 aufgezeichnete Gestalt. Wir wollen diese Figur nicht ausführlich analysieren, sondern ihre Richtigkeit einfach dadurch bewähren, dass wir die erzeugenden Substitutionen $\mathfrak{r}_1$ bis $\mathfrak{r}_5$, von denen schon in der Zeichnung Vermerk genommen wurde, jetzt hinterher aus den in (1) und (2) gemeinten Substitutionen s, t, u der G_{60} erzeugen. Wir

rechnen aber in der That leicht aus, dass mod. 11 die fünf Congruenzen erfüllt sind:

$$v_1 \equiv s^2 t s^3 u, \quad v_4 \equiv s t s^4 u,$$
$$v_2 \equiv s^4 t s^4, \quad v_5 \equiv s^2 t s^2, \quad v_3 \equiv t u.$$

Man nimmt bereits in Fig. 6 wahr, *dass die Gruppe Γ_{11} zum Geschlechte $p = 0$ gehört.* Indem man also in bekannter Weise die auf einander bezogenen Randcurven von Fig. 6 zusammenbiegt, geht dieses Polygon in eine einfach und vollständig bedeckte Ebene über, deren Einteilung in $2 \cdot 11$ Elementarbereiche Fig. 7 schematisch darstellt. Die Verzweigung der 11-blättrigen Riemann'schen Fläche F_{11} über der J-Ebene, wie sie der Γ_{11} zugehört, ist in Fig. 7 unmittelbar ersichtlich; wir finden: *Bei $J = \infty$ hängen die 11 Blätter in einem Verzweigungspunkte cyclisch zusammen; bei $J = 1$ verlaufen drei Blätter isoliert, während die übrigen acht zu Paaren mit einander verzweigt sind; bei $J = 0$ verlaufen zwei Blätter isoliert, während die neun übrigen zu je drei in drei Verzweigungspunkten zusammenhängen. Weitere Verzweigungspunkte treten nicht auf.*

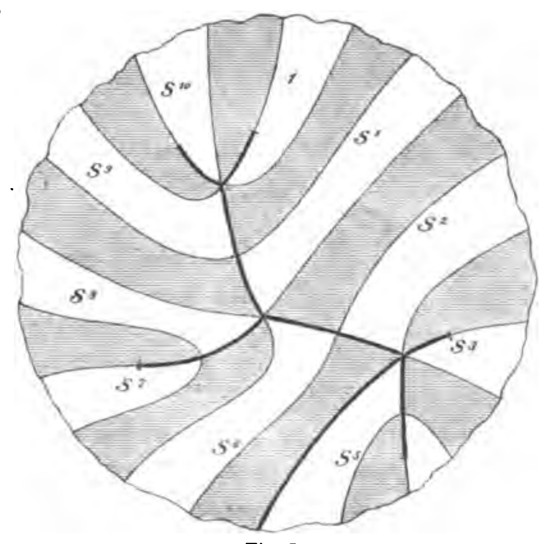


Fig. 7.

Die Polygone der mit Γ_{11} innerhalb Γ gleichberechtigten Untergruppen entstehen aus der Fig. 6 einfach durch Transformation mit $S, S^2 \ldots.$ Die Riemann'schen Flächen F_{11}, welche ihnen zugehören, sind bekanntlich von der eben beschriebenen F_{11} in keiner Weise verschieden; geändert wird ja bei Fortgang zu den übrigen Γ_{11} allein die Beziehung der Fläche F_{11} zur ω-Halbebene. Zu den Polygonen des anderen Systems der 11 Gruppen Γ_{11} gelangen wir nun einfach, indem wir die eben genannten Polygone an der imaginären ω-Axe spiegeln. Ihnen entspricht dann eine zweite Riemann'sche Fläche F_{11}, die natürlich aus jener ersten Fläche über der J-Ebene einfach durch Spiegelung derselben an der reellen J-Axe hervorgeht. — Übrigens giebt es, sofern wir auf die Verzweigung der F_{11} nur insoweit Acht geben, als sie im eben formulierten Cursivsatz durch Zahl und Art der Verzwei-

gungspunkte, sowie die zugehörigen Werte J charakterisiert wird, nicht nur zwei, sondern insgesamt zehn unterschiedene elfblättrige Riemann-sche Flächen, welche alle diese Verzweigung aufweisen*). Eben diese Sachlage hat denn auch zur Folge, dass von den geschehenen Verzweigungsangaben allein aus die Resolventen 11ten Grades noch nicht gefunden werden können, was doch bei $n = 5$ für die eine und $n = 7$ für die beiden Resolventen n^{ten} Grades der Fall war**). Es war hier bei $n = 11$ vielmehr durchaus nötig, behufs Gewinnung der Resolvente 11ten Grades auf das Modulsystem der z_α zu recurrieren. — Zufolge des Verzweigungssatzes (I p. 346) definieren natürlich auch die übrigen elfblättrigen Flächen F_{11}, welche wir eben erwähnten, Untergruppen Γ_{11} der Modulgruppe; die ihnen zugehörigen Resolventen führen uns also zu einer Reihe merkwürdiger Nichtcongruenzmoduln 11ter Classe, die übrigens zur Zeit noch nicht näher untersucht sind.

§ 7. Die einfachsten Modulformen und der Hauptmodul der ausgewählten Γ_{11}.

Indem wir zur speciellen Γ_{11} des vorigen Paragraphen zurückkehren, auf welche sich die Fig. 6 bezog, fragen wir nach den einfachsten ihr zugehörenden ganzen Modulformen. Hier würden wir gewisse allgemeine Betrachtungen an die Sätze über die Wertigkeit der Modulformen knüpfen können; indessen thun wir gut, unsere Betrachtung gleich auf jene Modulformen der Γ_{11} einzuschränken, die sich ganz und rational in den ζ_α darstellen lassen. Dabei ist es wieder eine geometrische Betrachtung im Raume R_4, von welcher wir zweckmässiger Weise ausgehen.

Durch Nullsetzen des Ausdrucks

$$(1) \qquad y_\infty = \zeta_1 + \zeta_3 + \zeta_9 + \zeta_5 + \zeta_4$$

wird der zum Coordinatenpentaeder des R_4 gehörige lineare „Einheitsraum" dargestellt. Derselbe wird durch die Substitution s, andrerseits aber auch durch u in sich transformiert, da, wie wir aus (3) § 6 leicht ausrechnen, die Form y_∞ sowohl durch s wie u in sich trans-

*) Es ist dies von Hrn. Klein in der schon im Anfang des Kapitels genannten Abhandlung *„Über Transformation elfter Ordnung der elliptischen Functionen"* (Math. Ann. Bd. 15) abgeleitet worden. Neuerdings hat Hr. Hurwitz das fundamentale Problem, alle unterschiedenen n-blättrigen Riemann'schen Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten aufzuzählen, mit grossem Erfolg behandelt; man vgl. die Abhandlung *„Über Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten"*, Math. Ann. Bd. 39 p. 1 (1891).

**) Man sehe die hier in Betracht kommende Abhandlung Klein's *„Über die Erniedrigung der Modulargleichungen"*, Math. Ann. Bd. 14 (1878).

formiert wird. Bei Ausübung der 60 Collineationen der Untergruppe G_{60} nimmt also der fragliche Raum insgesamt sechs unterschiedene Lagen an, wie denn in der That y_∞ durch die fünf Operationen ts^ν in die fünf unterschiedenen Ausdrücke y_ν:

$$(2)\qquad i\sqrt{11}\,y_\nu = \sum_{\beta=1,3,\ldots} \zeta_{3\nu\beta}\,(\varepsilon^{\beta^2} + 2\varepsilon^{2\beta^2} - 2\varepsilon^{5\beta^2} - \varepsilon^{6\beta^2})$$

übergeführt wird.

Um jetzt Grössen zu erhalten, die zur G_{60} gehören, werden wir symmetrische Verbindungen der sechs y herstellen. Freilich können wir zu diesem Zwecke noch nicht die Summe der y brauchen; denn diese verschwindet nach (1) und (2) identisch. Man führe demgemäss sogleich die *Summe der Quadrate der* y ein und schreibe den Ausdruck dieser Summe durch die ζ_α in der Gestalt:

$$(3)\qquad y_\infty^2 + y_0^2 + y_1^2 + \cdots + y_4^2 = -(1 + i\sqrt{11})\cdot f(\zeta_\alpha);$$

man findet dann nach kurzer Rechnung für $f(\zeta_\alpha)$ die explicite Darstellung:

$$(4)\qquad f(\zeta_\alpha) = \sum_{\alpha=1,3,\ldots}\left(\zeta_\alpha^2 - \zeta_\alpha\zeta_{4\alpha} - \frac{1 - i\sqrt{11}}{2}\zeta_\alpha\zeta_{5\alpha}\right).$$

Hieraus ist in der That ersichtlich, *dass die Summe der Quadrate der* y *nicht identisch verschwindet.*

Durch $f(\zeta_\alpha) = 0$ wird ein Raum zweiten Grades des R_4 dargestellt, welcher durch alle 60 Collineationen der G_{60} in sich transformiert wird. Die Untersuchung der Beziehung dieses Raumes zu den gesamten oben (§ 4) im R_4 construierten Gebilden würde gewiss zu interessanten Resultaten hinführen; wir verfolgen indessen einzig den Schnitt von $f(\zeta_\alpha) = 0$ mit der C_{20} der ζ_α. Da zwischen den Moduln $\zeta_\alpha^{(1)}$ keine quadratische Relation besteht, so schneidet der fragliche Raum die C_{20} in 40 Punkten, die durch die G_{60} immer nur in Punkte aus derselben Reihe übergeführt werden. Dieserhalb werden die 40 fraglichen Schnittpunkte auf der C_{20} notwendig jenen 20 Paaren von Ausnahmepunkten b des Polygons entsprechen, deren zugehörige Substitutionen der Periode 3 sich in G_{60} finden (man sehe daraufhin das Polygon F_{11} in Fig. 6 nach). Indem wir neben die specielle Γ_{11} unserer bisherigen Deduction sogleich die $2\cdot 11$ mit ihr innerhalb der erweiterten Modulgruppe gleichberechtigten Gruppen stellen, ergiebt sich hiernach das Resultat: *Es giebt im* R_4 *zweimal elf gleichberechtigte Räume zweiten Grades durch je* 40 *Punkte* b *der* C_{20} *der* ζ_α *).

*) Man beachte die Analogie zu den zweimal sieben Kegelschnitten durch je 8 Punkte b der C_4 bei $n = 7$ (cf. I p. 715).

Das Verschwinden von f in jenen 40 Punkten b folgt auch leicht aus dem Satze von der Wertigkeit ganzer Modulformen. Es ist nämlich:

$$f(z_\alpha) = \Delta^{-1} f(\zeta_\alpha) \tag{5}$$

eine zu F_{11} gehörende ganze Modulform $(-4)^{\text{ter}}$ Dimension, die eben deshalb auf diesem Polygon die Wertigkeit $\frac{11}{3}$ besitzt und in den beiden fraglichen Punkten b je im Grade $\frac{1}{3}$ verschwinden muss (p. 364). Die drei rückständigen Nullpunkte von $f(z_\alpha)$ liegen zufolge unserer geometrischen Deduction notwendig in der Spitze $\omega = i\infty$ des Polygons, und dieses wieder wird durch die Reihenentwicklung von $f(\zeta_\alpha)$, von welcher wir einige Glieder hier hersetzen:

$$f(z_\alpha) = 4\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \left\{ r^{\frac{3}{11}} + r^{\frac{4}{11}} + r^{\frac{5}{11}} - \frac{1 - i\sqrt{11}}{2} r^{\frac{6}{11}} + \frac{1 - i\sqrt{11}}{2} r^{\frac{7}{11}} + \cdots \right\}, \tag{6}$$

unmittelbar bestätigt. Bei dieser günstigen Lage der Nullpunkte von f dürfen wir übrigens erwarten, dass die Gleichung elften Grades, durch welche $f(z_\alpha)$ an g_2, g_3 gebunden ist, hervorragend einfach ausfällt; wir werden das weiter unten in der That bestätigt finden. —

An die zweite Potenzsumme der y reihen wir jetzt die *dritte* und schreiben des näheren:

$$-i\sqrt{11}\,(y_\infty^3 + y_0^3 + y_1^3 + \cdots + y_4^3) = g(\zeta_\alpha). \tag{7}$$

Es ist dann im R_4 durch $g = 0$ ein Raum dritten Grades dargestellt, der, da er die C_{20} der ζ_α nicht enthalten kann, die Curve in 60, bezüglich der G_{60} äquivalenten, Punkten schneidet. Mit dem in Rede stehenden Raum $g = 0$ combinieren wir jetzt den durch (1) p. 416 gelieferten cubischen Raum und haben dann in:

$$\varkappa_1 g(\zeta_\alpha) + \varkappa_2 \Phi(\zeta_\alpha) = 0 \tag{8}$$

gleich ein ganzes Büschel von Räumen derselben Art. Dabei kommt dann in Betracht, dass Φ und g, wie man leicht beweist, auf dem Polygon nicht identisch sind; eben deshalb wird das Büschel (8) auf der C_{20} ein System von 60 Punkten ausschneiden, dem den wechselnden Werten des Parameters $\varkappa_1 : \varkappa_2$ entsprechend gerade eine einfache Beweglichkeit zukommt. Zur Vereinfachung des Ausdrucks von g in ζ_α ersetzen wir $g = 0$ durch denjenigen Raum $h = 0$ aus der Reihe (8), in dessen Gleichungsform die Glieder $\zeta_\alpha^2 \zeta_{3\alpha}$ von Φ gerade ausgefallen sind. Man findet für das so gemeinte $h(\zeta\ )$ den expliciten Ausdruck:

$$\begin{aligned} h(\zeta_\alpha) = \sum_\alpha \Big\{ & \zeta_\alpha^3 + 3\zeta_\alpha \zeta_{5\alpha}(\zeta_\alpha - \zeta_{4\alpha}) \\ & + \frac{1 + i\sqrt{11}}{2} \zeta_\alpha (\zeta_\alpha \zeta_{4\alpha} - \zeta_{4\alpha}\zeta_{9\alpha} - 2\zeta_{9\alpha}\zeta_\alpha) \Big\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Hiermit wird zugleich evident, was bislang noch nicht gezeigt war, *dass die dritte Potenzsumme* (7) *in den* ζ_α *nicht identisch verschwindet.*

Nach Einführung von h setzen wir nun die Gleichung für das Büschel (8) von Räumen dritter Ordnung in die Gestalt:

$$h(\zeta_\alpha) + \tau\Phi(\zeta_\alpha) = 0. \tag{10}$$

Da aber von den Schnittpunkten der C_{20} der ζ_α mit dem Raume (10) bei jedem stehenden Wert τ nur ein *einzelner* auf denjenigen Teil der Curve C_{20} entfällt, welcher als Abbildung des Polygons F_{11} anzusehen ist, *so haben wir umgekehrt in der zur* Γ_{11} *gehörenden Modulfunction:*

$$\tau(\omega) = -\frac{h(\zeta_\alpha)}{\Phi(\zeta_\alpha)} = -\frac{h(z_\alpha)}{\Phi(z_\alpha)} \tag{11}$$

oder anders geschrieben in:

$$\tau(\omega) = -\frac{h(\zeta_\alpha)}{8\Delta^2} = -\frac{h(z_\alpha)}{8\sqrt{\Delta}} \tag{12}$$

einen Hauptmodul für diese Gruppe Γ_{11} *des Geschlechtes* $p = 0$.

Dieses Ergebnis wird durch die formentheoretische Betrachtung unmittelbar bestätigt. Man hat als Anfangsglieder der Reihenentwicklung für $h(z_\alpha)$:

$$h(z_\alpha) = -8\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6 r^{\frac{9}{22}}\left\{1 + * + \frac{1+i\sqrt{11}}{2} r^{\frac{2}{11}} + 2r^{\frac{3}{11}} + \frac{1+i\sqrt{11}}{2} r^{\frac{4}{11}} + \cdots\right\}, \tag{13}$$

so dass die $\frac{11}{2}$-wertige Modulform $h(z_\alpha)$ im Innern des Polygons F_{11} nur noch *einen einfachen* Nullpunkt haben kann. Bei $\omega = i\infty$ berechnet man übrigens für $\tau(\omega)$ die Annäherung:

$$\lim_{\omega = i\infty} \tau(\omega) = r^{\frac{1}{11}}, \tag{14}$$

so dass der Unstetigkeitspunkt von $\tau(\omega)$ in der Spitze $\omega = i\infty$ des Polygons gelegen ist.

Zwischen den Modulformen $f(\zeta_\alpha)$, $h(\zeta_\alpha)$ und der Function τ der Γ_{11} bestehen zwei bemerkenswerte algebraische Relationen, deren erste wir in der folgenden Art ableiten: Es ist der Quotient von $f^3(z_\alpha)$ und Δ offenbar eine zweiwertige Modulfunction der Γ_{11}, deren Nullpunkte die beiden Ausnahmepunkte b von F_{11} sind, während der fragliche Quotient bei $\omega = i\infty$ gleich $64\tau^2$ wird. Also folgt der Ansatz:

$$\frac{f^3(z_\alpha)}{\Delta} = 64\tau^2 + 8a\tau + b,$$

den wir sofort auch in die homogene Form umrechnen:

$$f^3(z_\alpha) = h^2(z_\alpha) - a \cdot \sqrt{\Delta} \cdot h(z_\alpha) + b \cdot \Delta.$$

Die Bestimmung der beiden Zahlen a, b geschieht durch Einsetzen der Entwicklungen (6) und (13) in der üblichen Weise, wobei man für $\sqrt{\Delta}$ nur das Anfangsglied $\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6 r^{\frac{1}{2}}$ braucht. *Wir finden dergestalt die nachfolgende explicite Form der fraglichen Relation:*

$$(15)\quad \begin{cases} f^3(z_\alpha) = h^2(z_\alpha) + 24\sqrt{\Delta}\,h(z_\alpha) + 64\,(5 - i\sqrt{11})\,\Delta, \\ \dfrac{f^3(z_\alpha)}{64\,\Delta} = \tau^2 + 3\tau + (5 - i\sqrt{11}). \end{cases}$$

Durch Nullsetzen der rechten Seite letzterer Gleichung entspringen vermittelst Auflösung die Werte τ in den beiden Ausnahmepunkten b von F_{11}.

Auf der anderen Seite besitzen wir im Quotienten von g_2 und $f(z_\alpha)$ eine dreiwertige Modulfunction der Γ_{11}, deren Nullpunkte die drei rückständigen Punkte b von F_{11} sind, während die Unstetigkeitspunkte bei $\omega = i\infty$ vereint liegen. Man hat hier die Ansätze:

$$\frac{48 g_2}{f(z_\alpha)} = \tau^3 + \frac{\alpha}{8}\tau^2 + \frac{\beta}{64}\tau + \frac{\gamma}{512},$$

$$-3\cdot 2^{13} g_2 \Delta\sqrt{\Delta} = f\left\{h^3 - \alpha\cdot\sqrt{\Delta}\,h^2 + \beta\cdot\Delta h - \gamma\cdot\Delta\sqrt{\Delta}\right\}.$$

Die Zahlen α, β, γ bestimmen wir wieder vermittelst der Reihenentwicklungen *und finden solcherweise als explicite Gestalt der neuen Relation:*

$$(16)\quad \begin{cases} -3\cdot 2^{13} g_2 \Delta\sqrt{\Delta} = f\left\{h^3 + 8\sqrt{\Delta}\,h^2 - 96\,(1 + i\sqrt{11})\,\Delta h \right. \\ \qquad\qquad \left. - 256\,(7 - i\sqrt{11})\,\Delta\sqrt{\Delta}\right\}, \\ \dfrac{48 g_2}{f(z_\alpha)} = \tau^3 - \tau^2 - \dfrac{3 + 3i\sqrt{11}}{2}\tau - \dfrac{7 - i\sqrt{11}}{2}. \end{cases}$$

Dabei sind auch in der ersten dieser beiden Gleichungen als Argumente von f und h die z_α gedacht; *durch Nullsetzen der rechten Seite der letzteren Gleichung entspringen vermittelst Auflösung die numerischen Werte von τ in jenen drei Punkten b von F_{11}, welche durch die rechte Seite von* (15) *noch nicht mit erledigt waren.*

§ 8. Die beiden Resolventen elften Grades in functionentheoretischer und formentheoretischer Gestalt.

Durch die eben ausgeführten Rechnungen ist die Aufstellung der beiden Resolventen elften Grades bereits implicite mit erledigt. Aus der Verzweigung der Riemann'schen Fläche F_{11} setzen wir nämlich unter Rücksicht auf (14) § 7 für die Relation zwischen dem Hauptmodul τ und J die Gestalt an:

$$J:J-1:1=(\tau^2+a\tau+b)(\tau^3+c\tau^2+d\tau+e)^3$$
$$:(\tau^3+\alpha\tau^2+\beta\tau+\gamma)(\tau^4+\delta\tau^3+\varepsilon\tau^2+\zeta\tau+\eta)^2$$
$$:1728.^{*)}$$

Hier aber ist der quadratische Factor des ersten Gliedes rechter Hand nichts anderes als die rechte Seite der Gleichung (15) § 7, während der dreifach zählende cubische Factor dieses Gliedes direct mit der rechten Seite der Gleichung (16) identisch ist. Das Mittelglied auf der rechten Seite des eben aufgeschriebenen Ansatzes ergiebt sich nun aus den beiden anderen Gliedern vermöge einer elementaren Rechnung: *Man erhält so als fertige functionentheoretische Gestalt der einen Resolvente elften Grades:*

$$(1)\quad J:J-1:1=(\tau^2+3\tau+5-i\sqrt{11})\left(\tau^3-\tau^2-\frac{3+3i\sqrt{11}}{2}\tau-\frac{7-i\sqrt{11}}{2}\right)^3$$
$$:\left(\tau^3-4\tau^2+\frac{7-5i\sqrt{11}}{2}\tau-4+6i\sqrt{11}\right)\left(\tau^4+2\tau^3\right.$$
$$\left.+\frac{3-3i\sqrt{11}}{2}\tau^2-(5+i\sqrt{11})\tau-\frac{15+3i\sqrt{11}}{2}\right)^2$$
$$:1728.$$

Von hier aus gewinnen wir die andere Resolvente elften Grades einfach dadurch, *dass wir allenthalben das Vorzeichen der Quadratwurzel $\sqrt{11}$ umkehren.* Da nämlich -1 quadratischer Nichtrest von 11 ist, so wird beim Ersatz von ε durch ε^ν mit einem Nichtrest ν die G_{660} der ζ_α-Substitutionen derart isomorph auf sich selbst bezogen, dass das eine System der Untergruppen G_{60} in das andere übergeht**). Da aber bei diesem Ersatz des ε die Irrationalität $i\sqrt{11}$ das Zeichen wechselt, so ergiebt sich die ausgesprochene Behauptung unmittelbar.

Als Wurzel einer *formentheoretischen Resolvente* 11ten Grades ist, wie wir schon bemerkten, die Modulform $(-4)^{\text{ter}}$ Dimension $f(z_\alpha)$ besonders geeignet. Zur Vereinfachung der Zahlencoefficienten setze man $f(z_\alpha)$ mit $4x(\omega_1, \omega_2)$ identisch und folgere für diese ganze Modulform x aus (15) und (16) § 7 die beiden Gleichungen:

$$x^3=\Delta(\tau^2+3\tau+5-i\sqrt{11}),$$
$$12g_2=x\left(\tau^3-\tau^2-\frac{3+3i\sqrt{11}}{2}\tau-\frac{7-i\sqrt{11}}{2}\right).$$

*) Eben dieser Ansatz würde natürlich auch bei allen jenen Nichtcongruenzmoduln zur Geltung kommen, welche den am Schlusse von § 6 gemeinten Untergruppen Γ_{11} zugehören.

**) Es kommen hierbei die in I p. 427 ff. begründeten Sätze über die Gleichberechtigung der Substitutionen $S, S^2, S^3, \ldots$ in Anwendung.

Durch Elimination des τ aus diesen beiden Gleichungen entspringt als einfachste formentheoretische Gestalt der einen Resolvente elften Grades:

$$(2)\quad \begin{aligned} &x^{11} - 22\Delta\cdot x^8 + 11\,(9+2i\sqrt{11})\,\Delta^2\cdot x^5 - 11\cdot 12 g_2\Delta^2\cdot x^4 \\ &+ 88 i\sqrt{11}\,\Delta^3\cdot x^2 + 11\,(3-i\sqrt{11})\cdot 6 g_2\Delta^3\cdot x - 144 g_2^{\,2}\Delta^3 = 0. \end{aligned}$$

Die andere formentheoretische Resolvente entsteht aus (2) einfach wieder durch Zeichenwechsel der Wurzel $\sqrt{11}$. Natürlich hätte man die Gleichung (2) auch nach formentheoretischem Ansatz vermittelst der Reihenentwicklung (6) § 7 ableiten können.

Wir haben hier erneut eine lehrreiche Gelegenheit, die von uns häufig betonte Prävalenz der ersten Stufe in der Transformationstheorie vor den übrigen zu beobachten. Es war ja natürlich dem Herkommen gemäss, dass man früher die von Galois entdeckten besonderen Resolventen fünften, siebenten und elften Grades im Anschluss an die Jacobi'schen Modulargleichungen der betreffenden Grade zu realisieren suchte, welch' letztere in der That dieselbe Monodromiegruppe besitzen, wie die Gleichungen $f(J', J) = 0$. Eben dieses war der Zielpunkt der eingehenden Untersuchungen Hermite's*), dessen Ansatz jedoch viel zu umfänglich war, als dass die volle Durchbildung desselben im Bereich der „wirklichen Durchführbarkeit" gelegen hätte**). Auch hier gelang es erst dadurch, dass Hr. Klein die Transformationstheorie systematisch an die *erste* Stufe knüpfte und zugleich vermöge der Riemann'schen Principien sich stets die einfachsten Functionen eines gerade vorliegenden algebraischen Gebildes verschaffte, die Resolvente elften Grades in ihren einfachsten Gestalten (1) und (2) wirklich herzustellen. —

Für das gegenseitige Verhältnis der beiden formentheoretischen Resolventen elften Grades (2) gelten übrigens dieselben Sätze, die wir an analoger Stelle bei den Resolventen 7ten Grades 7ter Stufe entwickelten: *Die Wurzeln der einen Resolvente sind lineare Functionen der Wurzeln der anderen Resolvente.* Unterscheiden wir nämlich die verschiedenen Wurzeln von (2) durch untere Indices ν und benennen ihnen gegenüber die Wurzeln der anderen Resolvente y_ν, so ist nach (4) p. 423:

$$(3)\qquad 4x_\nu = \sum_\alpha \varepsilon^{\nu\alpha^2}(z_\alpha^{\,2} - z_{3\alpha} z_{9\alpha}) - \frac{1-i\sqrt{11}}{2}\sum_\alpha \varepsilon^{-\nu\alpha^2} z_{4\alpha} z_{9\alpha},$$

$$(4)\qquad 4y_\nu = \sum_\alpha \varepsilon^{\nu\alpha^2}(z_\alpha^{\,2} - z_{3\alpha} z_{9\alpha}) - \frac{1+i\sqrt{11}}{2}\sum_\alpha \varepsilon^{-\nu\alpha^2} z_{4\alpha} z_{9\alpha}.$$

*) *Sur la théorie des équations modulaires*, Paris 1859 (Comptes Rendus t. 49).

**) In der That sind denn auch in der Hermite'schen Gleichung noch 27 numerische Constanten unberechnet geblieben.

Durch Inversion der elf Gleichungen (3) folgt:

$$(5)\quad z_\alpha^2 - z_{3\alpha} z_{9\alpha} = \tfrac{4}{11}\cdot\sum_{\nu=0}^{10} \varepsilon^{-\nu\alpha^2} x_\nu, \quad \frac{-1+i\sqrt{11}}{2}\cdot z_{4\alpha} z_{9\alpha} = \tfrac{4}{11}\cdot\sum_{\nu=0}^{10} \varepsilon^{\nu\alpha^2} x_\nu;$$

durch Substitution dieser Ausdrücke für die zweigliedrigen z_α-Verbindungen in (4) entspringen die Darstellungen von y_ν durch die x. Da die Summe der elf x_ν identisch verschwindet, so lässt sich die Darstellung des einzelnen y_ν in der beabsichtigten Gestalt noch in ∞^1 Weise treffen. Besonders einfach sind die Formeln:

$$(6)\qquad -\frac{1-i\sqrt{11}}{2}\, y_\nu = x_{\nu+1} + x_{\nu+3} + x_{\nu+9} + x_{\nu+5} + x_{\nu+4},$$

welche offenbar den Formeln (8) in I p. 759 völlig gleichgebildet sind; es reihen sich ihnen die nachfolgenden Darstellungen der x durch die y an:

$$(7)\qquad -\frac{1+i\sqrt{11}}{2}\, x_\nu = y_{\nu+2} + y_{\nu+6} + y_{\nu+7} + y_{\nu+8} + y_{\nu+10},$$

so dass auch betreffs des unteren Indices in (6) und (7) dieselbe Gesetzmässigkeit herrscht, die wir l. c. bei $n = 7$ vorfanden.

§ 9. Das Transformationspolygon elfter Ordnung vom Geschlechte $p = 1$.

Eine erschöpfende Behandlung der elften Stufe würde an gegenwärtiger Stelle die Untersuchung der zu $n = 11$ gehörenden Modulsysteme $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension A_α anzureihen haben. Solcher Systeme aber werden uns von Kap. 3 (p. 354 ff.) im ganzen *zwei* geliefert, und ihnen würde sich die Untersuchung der Resolvente 12ten Grades dann wieder naturgemäss anschliessen lassen, gerade wie wir voraufgehend die Resolventen 11ten Grades an die z_α knüpften. Inzwischen sei es erlaubt, hier unmittelbar zur Betrachtung der Resolvente 12ten Grades bez. zur Betrachtung der ihr zugehörigen Riemann'schen Fläche F_{12} vorzugehen; wir werden dann weiter unten noch bei passender Gelegenheit, wenn auch nur ganz beiläufig, auf die beiden Systeme der A_α kurz zu sprechen kommen.

Die eben gemeinte Riemann'sche Fläche F_{12} wird uns durch die zwölf gleichberechtigten Untergruppen Γ_{12} des Index 12 geliefert, welche von den halbmetacyclischen Untergruppen der G_{660} herrühren. Eine unter ihnen ist arithmetisch durch die Congruenz $\gamma \equiv 0 \pmod{11}$ definiert, und das ihr zugehörige Polygon F_{12} nennen wir, wie gewohnt, *Transformationspolygon elfter Ordnung.* Dasselbe ist bezüglich seiner Gestalt oben (Kap. 2 des vor. Abschn.) ausführlich charakterisiert und

hat bekanntlich (cf. p. 52) das Geschlecht $p = 1$; demzufolge muss sich dieses Polygon durch teilweises Zusammenfügen seiner auf einander bezogenen Kanten zu einem einfach bedeckten Parallelogramm umgestalten lassen, dessen je zwei gegenüberliegende Seiten einander zuzuordnen sind. Wir brauchen diese Operation hier nicht explicite durchzuführen, da wir ohnedies schon über die Verzweigung der Fläche F_{12} orientiert sind (cf. p. 50 u. f.); übrigens sehe man die p. 43 genannte Abhandlung von Hrn. Papperitz, wo man auf der ersten der beigegebenen Tafeln das fragliche Periodenparallelogramm dargestellt findet.

Das Transformationspolygon wird nun durch die Substitution:

$$W(\omega) = -\frac{1}{11\omega} \tag{1}$$

in sich übergeführt, wie solches oben bereits ausführlich erläutert wurde. Durch Zusatz der Operation (1) wird demnach die Γ_{12} auf eine Gruppe Γ_6' erweitert, in welcher Γ_{12} eine ausgezeichnete Untergruppe des Index zwei ist; natürlich ist diese Γ_6' nicht mehr Untergruppe der Modulgruppe, und wir wollen an diesen Umstand immer durch den oberen Index bei Γ_6' erinnern. Das zu Γ_6' gehörende Polygon F_6' entsteht durch Hälftung aus F_{12}, und unsere ganze Entwicklung gründet sich nun auf die wichtige Thatsache, *dass das Polygon F_6' zum Geschlechte $p = 0$ gehört.*

Es stellt sich nämlich die Transformation W vermöge des Integrals erster Gattung u der Γ_{12} notwendig in der Gestalt:

$$u' = -u + c \tag{2}$$

Fig. 8.

dar, da die Substitution $\omega' = W(\omega)$ die Periode *zwei* aufweist und andrerseits auf der imaginären ω-Axe, wie man leicht überblickt, einen Fixpunkt besitzt. Man wolle aber u gleich so wählen, dass die Constante c in (2) mit Null identisch ist, worauf sich die Fixpunkte der Substitution W in der u-Ebene mit Hülfe ganzzahliger λ, μ einfach in der Gestalt:

$$u_0 = \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{2} \tag{3}$$

darstellen; hier sind in (3) und sogleich in (4) mit ω_1, ω_2 vorübergehend die beiden Perioden gemeint, welche das vorliegende elliptische Gebilde besitzt. Figur 8 soll uns schematisch die Abbilder der Polygone F_{12} und F_6' andeuten; ersteres überträgt sich in das grosse, um den Nullpunkt der u-Ebene symmetrisch angeordnete Parallelogramm (dessen gegenüberliegende Seiten einander zuzuordnen sind), F_6' liefert die obere

(schraffierte) Hälfte. Die Grenzlinien dieses schraffierten Bereiches sind dabei durch die Substitutionen:

(4) $$v_1(u) = -u,\quad v_2(u) = -u + \omega_1,\quad v_3(u) = u + \omega_2$$

einander zugeordnet, deren Wirkung z. T. in Fig. 8 angedeutet ist. Da ist nun unmittelbar evident, dass wir es mit einem Fundamentalbereich des Geschlechtes $p = 0$ zu thun haben, und das Gleiche muss dann natürlich auch zufolge der conformen Abbildung vom ursprünglichen Polygon F_6' der ω-Halbebene gelten.

Bildet man jetzt F_6' durch eine zugehörige einwertige Function auf eine complexe Ebene ab, so wird sich über derselben F_{12} *als zweiblättrige Riemann'sche Fläche* anordnen lassen. Die *vier* dabei auftretenden Verzweigungspunkte entsprechen natürlich den Fixpunkten (3) der Substitution W und haben als solche nach p. 189 eine interessante zahlentheoretische Bedeutung: sie werden nämlich in der ω-Helbebene die repräsentierenden Punkte für die ursprünglichen Formclassen der negativen Determinanten $D = -11$ und $D = -44$ liefern. Thatsächlich finden wir denn auch nach I p. 250 an reducierten ursprünglichen Formen (P, Q, R) für $D = -11$ nur die *eine:*

$$(1,\ 1,\ 3) \text{ mit } \omega = \frac{-1 + i\sqrt{11}}{2}$$

als repräsentierenden Punkt, sowie für $D = -44$ die *drei:*

$$(1,\ 0,\ 11) \text{ mit } \omega = i\sqrt{11},$$

$$(3,\ \pm 2,\ 4) \text{ mit } \omega = \frac{\mp 1 + i\sqrt{11}}{3}$$

als repräsentierenden Punkten.

§ 10. Die beiden zum Polygon F_{12} adjungierten einwertigen Modulformen A, B und die zweiwertige Function $\tau(\omega)$.

Eine dem Polygon F_{12} *adjungierte Modulform* $(-1)^{\text{ster}}$ *Dimension* wird auf demselben die Wertigkeit 1 haben. Die beiden im Anfang des vorigen Paragraphen erwähnten Systeme der A_α liefern uns nun in ihren beiden ersten Gliedern A_0 *zwei* derartige Modulformen, die wir hier gleich durch die besonderen Bezeichnungen A, B von einander unterscheiden wollen. Die Modulform $\mathsf{A}(\omega_1, \omega_2)$ sei jene, welche uns von dem System (7) p. 332 für $n = 11$ und $\alpha = 0$ geliefert wird; wir haben also nach leichter Umsetzung der damaligen Formel:

(1) $$\mathsf{A} = \frac{2\pi}{\omega_2}\sum_{\xi,\eta}(-1)^{\frac{\xi+\eta}{2}}\, r^{\frac{\xi^2+11\eta^2}{24}},\quad \xi \equiv \eta \equiv \pm 1 \pmod{6},$$

summiert über alle der beigefügten Congruenz genügenden Zahlen-

paare. Die Modulform $\mathsf{B}(\omega_1, \omega_2)$ wird uns von (2) p. 355 geliefert und wir haben als einfachste Darstellung derselben:

$$(2) \qquad \mathsf{B} = \frac{2\pi}{\omega_2} \sum_{\xi,\eta} r^{\xi^2+\xi\eta+3\eta^2},$$

summiert über alle Paare ganzer Zahlen ξ, η. Als Anfangsglieder für die nach ansteigenden Potenzen angeordneten Reihen (1) und (2) finden wir:

$$(3) \qquad \mathsf{A} = \frac{2\pi}{\omega_2} r^{\frac{1}{2}} (1 - r - r^2 + r^5 + r^7 - r^{11} \cdots),$$

$$(4) \qquad \mathsf{B} = \frac{2\pi}{\omega_2} (1 + 2r + 4r^3 + 2r^4 + 4r^5 \cdots).$$

Da das Polygon F_{12} Ausnahmepunkte a, b nicht aufweist (cf. p. 52), so wird B in einem im Innern von F_{12} gelegenen Punkte in der Ordnung 1 verschwinden. A verschwindet demgegenüber in der Spitze $\omega = i\infty$ von der Ordnung $\frac{1}{2}$ und muss somit in der anderen Polygonspitze $\omega = 0$ in eben dieser Ordnung zu Null werden. Sonstige Nullpunkte treten für unsere beiden Moduln aber nicht auf. A und B werden nun durch die homogenen Operationen der Γ_{12} nur bis aufs Zeichen in sich transformiert, *so dass erst ihre Quadrate im absoluten Sinne zu F_{12} gehören;* merken wir uns für die letzteren gleich die Anfangsterme:

$$(5) \qquad \mathsf{A}^2 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \{ * + r - 2r^2 - r^3 + 2r^4 + r^5 - \cdots \},$$

$$(6) \qquad \mathsf{B}^2 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \{ 1 + 4r + 4r^2 + 8r^3 + 20r^4 + 16r^5 + \cdots \}.$$

Bei dieser Sachlage gewinnen wir *eine zum Polygon F_{12} des Geschlechtes $p = 1$ gehörende zweiwertige Modulfunction* in dem Quotienten:

$$(7) \qquad \tau(\omega) = \frac{\mathsf{A}^2}{\mathsf{B}^2};$$

dieselbe wird in den beiden Polygonspitzen je einfach verschwinden, dagegen in einem gewissen Punkte im Innern des Polygons doppelt unendlich.

Die Lage dieses letzteren Punktes (nämlich des Nullpunktes von B) lässt sich nun auf F_{12} leicht noch näher umgrenzen. Die Nullpunkte von τ werden durch die Substitution W, wie wir wissen, permutiert. Der Zähler von τ, als Function des oben fixierten Integrals u aufgefasst, weist also die Residuensumme Null auf (cf. I p. 157). Da ein Gleiches von der Residuensumme des Nenners gelten muss, *so ist der Nullpunkt von* B *offenbar einer der vier Fixpunkte der Operation* W. Um jetzt weiter zu entscheiden, in welchem unter diesen vier Fixpunkten B verschwindet, bemerken wir erstlich, dass er jedenfalls nicht

der auf der imaginären ω-Axe gelegene sein kann. Benennen wir nämlich die in der Klammer von (6) stehende Potenzreihe, die übrigens auf der imaginären ω-Axe überall reelle Werte besitzt, der Kürze halber durch B_0, so lässt sich zeigen, dass B_0 auf dieser Axe einen Zeichenwechsel nicht erleidet und also auch nicht verschwinden kann. Es gilt nämlich für hinreichend kleine ω_2 (d. i. in der Nähe der Spitze $\omega = i\infty$) näherungsweise die Formel *):

$$(8) \qquad i\sqrt{11}\,\mathsf{B}(-\omega_2, \omega_1) = \mathsf{B}(\omega_1, \omega_2),$$

aus welcher wir sofort

$$\sqrt{11}\,\mathsf{B}_0\left(\frac{-1}{\omega}\right) = \left(\frac{\omega}{i}\right)\mathsf{B}_0(\omega)$$

als Näherungsformel für einen auf der imaginären Axe in der Nähe von $\omega = i\infty$ gelegenen Punkt ω ziehen. Mit der letzten Gleichung ist aber unsere Behauptung bestätigt, wenn man noch beachten will, dass B als *ein*wertige Modulform der Γ_{12} doch höchstens einen einzigen Zeichenwechsel auf der imaginären ω-Axe erfahren kann. — Da weiter τ in den beiden von den Formclassen $(3, +2, 4)$ herrührenden Fixpunkten conjugiert complexe Werte haben wird, so bleibt nur noch übrig, *dass der Nullpunkt von* B *auf dem Polygon* F_{12} *mit dem repräsentierenden Punkte der einen zu* $D = -11$ *gehörenden Formclasse zusammenfällt.*

Für unsere weiterhin durchzuführenden Rechnungen müssen wir die Substitution W in die homogene Gestalt setzen:

$$(9) \qquad (W) \qquad \omega_1' = \frac{i\omega_2}{\sqrt{11}}, \qquad \omega_2' = \frac{\omega_1\sqrt{11}}{i}$$

und werden wiederholt von dem Umstande Gebrauch machen, *dass auch die so definierte homogene Substitution W die Periode zwei besitzt.* Man wolle daraufhin gleich feststellen, wie die homogene Operation W auf die Formen A und B wirkt. Es werden sich jedenfalls A wie B nur um constante Factoren ändern können, da beide Male die Nullpunkte durch W in sich selbst übergeführt werden. Diese constanten Factoren können aber nur $+1$ oder -1 sein, da die Operation (9) die Periode zwei besitzt. Schreiben wir also den Ansatz:

$$\mathsf{A}\left(\frac{i\omega_2}{\sqrt{11}}, \frac{\omega_1\sqrt{11}}{i}\right) = \pm\,\mathsf{A}(\omega_1, \omega_2)$$

und entsprechend für B. Hier setze man nun die Specialwerte ein

*) Dieselbe ist eine unmittelbare Folge aus dem Verhalten des hier in Betracht kommenden Modulsystems B_α bei Ausübung der Substitution T; man wolle nur bemerken, dass die Zahl p in unserem Falle gleich 2, d. h. gleich einem Nichtrest von 11 ist, und dass unter den sechs Moduln B_α nur der erste $\mathsf{B}_0 = \mathsf{B}$ in den Polygonspitzen endlich bleibt.

$\omega_1 = i$, $\omega_2 = \sqrt{11}$, welche einen in der positiven Halbebene, und zwar auf der imaginären Axe, gelegenen Quotienten ω liefern; wir gewinnen solchergestalt:

$$\text{(10)} \qquad \mathsf{A}(i, \sqrt{11}) = \pm \mathsf{A}(i, \sqrt{11}), \quad \mathsf{B}(i, \sqrt{11}) = \pm \mathsf{B}(i, \sqrt{11}).$$

Nun erinnere man sich, dass auf der imaginären ω-Axe im Innern der Halbebene weder A noch B einen Nullpunkt aufweist; in Formel (10) muss demnach beide Male das obere Zeichen gelten. Wir haben so das Resultat erzielt: *Bei Ausübung der homogenen Substitution W geht jede der Formen A, B unverändert in sich selbst über:*

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} \mathsf{A}\left(\dfrac{i\omega_2}{\sqrt{11}}, \dfrac{\omega_1 \sqrt{11}}{i}\right) = \mathsf{A}(\omega_1, \omega_2), \\[2ex] \mathsf{B}\left(\dfrac{i\omega_2}{\sqrt{11}}, \dfrac{\omega_1 \sqrt{11}}{i}\right) = \mathsf{B}(\omega_1, \omega_2). \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich endlich als eine unmittelbare Folgerung für die zweiwertige Function $\tau(\omega)$, *dass dieselbe gleichfalls durch W unverändert in sich transformiert wird:*

$$\text{(12)} \qquad \tau\left(\frac{-1}{11\omega}\right) = \tau(\omega).$$

Man kann dieses Ergebnis auch dahin aussprechen, *dass $\tau(\omega)$ ein Hauptmodul der Gruppe Γ_6' des Geschlechtes $p = 0$ ist.* Hieran werden wir gleich weiter anzuknüpfen haben.

§ 11. Die zum Polygon F_{12} gehörenden dreiwertigen Grössen $\mathsf{E}(\omega_1, \omega_2)$ und $\tau'(\omega)$. Relation zwischen $\tau(\omega)$ und $\tau'(\omega)$.

Wenn wir den Nullpunkt von B für das Integral erster Gattung u der F_{12} als untere Grenze wählen, so wird $\tau(\omega)$, als Function von u betrachtet, entweder direct mit der Function $\wp(u)$ identisch werden oder aber doch eine lineare ganze Function von $\wp(u)$ sein. Wir wollen uns jetzt weiter eine Function $\tau'(\omega)$ verschaffen, welche, in Abhängigkeit von u gedeutet, bis auf einen constanten Factor mit $\wp'(u)$ identisch wird. Diese Function $\tau'(\omega)$ wird auf F_{12} *dreiwertig* sein, und die drei Nullpunkte werden in jenen drei Fixpunkten von W liegen, für welche B von Null verschieden ist; ferner wird $\tau'(\omega)$ im Nullpunkte von B dreifach unendlich. Bei dieser Sachlage wird:

$$\text{(1)} \qquad \mathsf{E}(\omega_1, \omega_2) = \tau'(\omega) \cdot \mathsf{B}^3(\omega_1, \omega_2)$$

eine zum Polygon F_{12} gehörende *ganze* Modulform $(-3)^{\text{ter}}$ Dimension vorstellen, welche wir hernach mit A und B zu einem vollen Modulsystem der Gruppe Γ_{12} vereinen.

Die explicite Gewinnung von E und damit von τ' basieren wir auf *zwei unterschiedene Darstellungen des Integrals u.* Wir wissen nämlich erstlich aus der *algebraischen* Theorie der Gebilde des Geschlechtes 1, dass u darstellbar ist in der Gestalt:

$$(2) \qquad u = \int \frac{d\tau}{\tau'}.$$

Andrerseits aber folgt auf *transcendentem* Wege, dass auch:

$$(3) \qquad u' = \int \mathsf{A}^2 \cdot (\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1)$$

ein überall endliches Integral unserer Fläche F_{12} ergiebt; denn die in (3) dargestellte Grösse ist nur noch von ω allein abhängig und besitzt, wie man in üblicher Weise zeigt, auf dem Polygon (dessen beide Spitzen eingeschlossen) keinerlei Unstetigkeitspunkte. Wir schliessen demnach auf die Identität:

$$\frac{d\tau}{\tau'} = -c\mathsf{A}^2 \cdot (\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1)$$

und finden von hier aus unter Benutzung von (1) für E den Ausdruck:

$$(4) \qquad c \cdot \mathsf{E}(\omega_1, \omega_2) = \frac{\mathsf{B}^3 \cdot d\tau}{\mathsf{A}^2 \omega_2^{\,2} d\omega}.$$

In Anschluss an eine schon im vorigen Paragraphen gebrauchte Abkürzung sei

$$\mathsf{A}_0 = \frac{\omega_2}{2\pi}\mathsf{A}, \quad \mathsf{B}_0 = \frac{\omega_2}{2\pi}\mathsf{B},$$

so dass A_0 und B_0 nur noch von r allein abhängen. Indem wir alsdann in (4) für τ seinen Ausdruck in A_0 und B_0 eintragen, zugleich aber die numerische Constante c in zweckmässiger Weise wählen, entspringt durch Entwicklung der Gleichung (4) *für die ganze Modulform* $\mathsf{E}(\omega_1, \omega_2)$ *der Ausdruck, den wir als Definition von* E *betrachten:*

$$(5) \qquad \mathsf{E} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^3 2r\mathsf{A}_0^{-1} \cdot \left(\mathsf{B}_0 \frac{d\mathsf{A}_0}{dr} - \mathsf{A}_0 \frac{d\mathsf{B}_0}{dr}\right).$$

Es ist ein Leichtes, von hier aus einige *Anfangsglieder der Potenzentwicklung von* E *nach* r zu berechnen; wir finden in der That:

$$(6) \qquad \mathsf{E} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^3 \{1 - 4r - 10r^2 - 40r^3 - 52r^4 - 104r^5 \cdots\}.$$

Es genügt für unsere ferneren Zwecke, diese Anfangsterme von E mitgeteilt zu haben, ohne dass wir allgemein ein analytisches Bildungsgesetz für diese Modulform entwickeln. Ob die Ansätze von p. 355 ff., für die Dimension (-3) specialisiert, auf unser E führen oder nicht, wird man ja nachträglich, wenn man will, leicht entscheiden können.

Nun wird das Quadrat der Modulfunction $\tau'(\omega)$ eine ganze Function dritten Grades von $\tau(\omega)$, wobei das Absolutglied im Ausdruck dieser ganzen Function gleich 1 ist, da bei $\omega = i\infty$ τ verschwindet, τ' dagegen gleich 1 wird. Man hat also den Ansatz:

$$(7) \qquad \tau'^2 = 1 + a\tau + b\tau^2 + c\tau^3.$$

Zur Berechnung der numerischen Factoren a, b, c tragen wir in (7) die Modulformen A, B, E ein, wodurch diese Gleichung übergeht in:

$$(8) \qquad \mathsf{E}^2 = \mathsf{B}^6 + a\mathsf{B}^4\mathsf{A}^2 + b\mathsf{B}^2\mathsf{A}^4 + c\mathsf{A}^6.$$

Durch Einsetzung der Reihenentwicklungen (6), sowie (5) und (6) § 10 bestimmt man leicht:

$$a = -20, \quad b = 56, \quad c = -44^{*}).$$

Also das Resultat: *Zwischen den beiden Modulfunctionen* $\tau(\omega)$ *und* $\tau'(\omega)$ *besteht die cubische Relation des Geschlechtes* $p = 1$:

$$(9) \qquad \tau'^2 = 1 - 20\tau + 56\tau^2 - 44\tau^3,$$

die man auch in die homogene Gestalt setzen mag:

$$(10) \qquad \mathsf{E}^2 - \mathsf{B}^6 + 20\mathsf{B}^4\mathsf{A}^2 - 56\mathsf{B}^2\mathsf{A}^4 + 44\mathsf{A}^6 = 0,$$

eine Gleichung, die für unser Gebilde $p = 1$ *charakteristisch ist.*

Wir können dem erhaltenen Resultate auch die Wendung geben: *Die beiden Grössen* $\tau(\omega)$, $\tau'(\omega)$ *liefern uns ein volles System von Modulfunctionen für die Untergruppe* Γ_{12}; *dabei stellt sich die Transformation* W *der Fläche* F_{12} *in sich einfach durch Zeichenwechsel des* τ' *bei unverändertem* τ *dar.* Daraus folgt noch für E unter Rücksicht auf (11) § 10:

$$(11) \qquad \mathsf{E}\left(\frac{i\omega_2}{\sqrt{11}}, \frac{\omega_1\sqrt{11}}{i}\right) = -\mathsf{E}(\omega_1, \omega_2),$$

was man auch leicht am Ausdruck (4) von E verificiert.

Man führe auch gleich noch die nachfolgende *formentheoretische* Überlegung durch: Die quadratische Verbindung $(\varkappa_1\mathsf{A}^2 + \varkappa_2\mathsf{B}^2)$ ist eine zum Polygon F_6' im absoluten Sinne gehörende Modulform der Dimension -2, welche auf diesem Polygon nur einen einzigen, mit den $\varkappa$ willkürlich beweglichen, Nullpunkt aufweist. Daraus folgt unmittelbar: *Jede zu* F_6' *im absoluten Sinne gehörende ganze Modulform, die als solche eine gerade Dimension* -2ν *aufweisen wird, ist eine rationale ganze homogene Function* ν^{ten} *Grades von* A^2 *und* B^2. Dem gegenüber sind, um es zu wiederholen, A, B und E dem Polygon F_6' nur erst adjungiert. Sie besitzen auf F_6' die Wertigkeit $\frac{1}{2}$, bez. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, und zwar

*) Bei Rechnungen dieser Art wird man immer noch eine überzählige lineare Gleichung für die unbekannten Coefficienten entwickeln, vermöge deren man die berechneten Zahlwerte einer Controlle unterziehen kann.

wird A in der Polygonspitze $\omega = i\infty$ in der Ordnung $\frac{1}{2}$ zu Null, E verschwindet je in der Ordnung $\frac{1}{2}$ in jenen drei Polygonecken, welche den Formclassen $D = -44$ zugehören, und B endlich verschwindet von der Ordnung $\frac{1}{2}$ in derjenigen Polygonecke von F_6', welche wir der einen Formclasse der Determinante $D = -11$ zuzuweisen hatten. Diese Überlegungen gewinnen nun gleich eine fundamentale Bedeutung für unsere weiter folgenden Betrachtungen.

§ 12. Darstellung von g_2, g_3, $\sqrt{\Delta}$ und ihrer transformierten Werte g_2', g_3', $\sqrt{\Delta'}$ in E, A, B. Ausdruck für die functionentheoretische Resolvente 12ten Grades.

Nachdem wir voraufgehend gelernt haben, die zur Untergruppe Γ_{12} gehörenden Functionen und Formen durch die einfachsten unter ihnen enthaltenen Grössen zu beherrschen, wenden wir uns unserem eigentlichen Ziele zu, nämlich einen functionentheoretischen Ausdruck für die *Resolvente zwölften Grades* zu gewinnen. Unserer oft verwendeten Massnahme getreu werden wir diesen Ausdruck dadurch herstellen, dass wir $J(\omega)$ im Modulsystem τ, τ' rational darstellen. Indessen gehen wir auch hier wieder, wie schon in der Einleitung angedeutet, vorab einen formentheoretischen Weg, indem wir nämlich zuerst die Modulformen erster Stufe g_2, g_3 mit den Formen A, B, E der Γ_{12} in Beziehung setzen.

Sei $g_k(\omega_1, \omega_2)$ eine der beiden Formen erster Stufe g_2, g_3, so wird g_k natürlich der Γ_{12} angehören; ein Gleiches gilt demnach auch von der Form:

$$(1) \qquad g_k'(\omega_1, \omega_2) = g_k\left(\frac{i\omega_2}{\sqrt{11}}, \frac{\omega_1\sqrt{11}}{i}\right),$$

welche aus g_k durch Ausübung der Substitution W der Periode zwei entsteht. Diese Form g_k' ist, wie man bemerken wolle, nur ganz unwesentlich von der Form $g_k(11\,\omega_1, \omega_2)$ verschieden, wie wir sie früher durch Transformation 11ter Ordnung aus g_k herstellten. Wir haben nämlich, was man leicht bestätigt:

$$g_k'(\omega_1, \omega_2) = 11^k g_k(11\,\omega_1, \omega_2).$$

Da W die Periode zwei hat, so wird eine erneute Anwendung der Operation W auf g_k' wiederum zu g_k zurückführen; daraus folgt sofort: *Die Ausdrücke $(g_k' \pm g_k)$ sind ganze Modulformen der Γ_{12}, welche bei Ausübung von W unverändert bleiben oder das Vorzeichen wechseln, je nachdem bei $(g_k' \pm g_k)$ das obere oder untere Zeichen genommen wird.* Hierauf gründen wir die Darstellung der g_2, g_3 in A, B, E, indem wir

die am Schlusse des vorigen Paragraphen entwickelten Sätze zur Anwendung bringen.

Da τ' und B^2 absolut zur Γ_{12} gehören, so folgt aus (1) § 11 das Gleiche für BE, ein Product, welches gegenüber W Zeichenwechsel erfährt. Demnach sind:

$$(2)\qquad \frac{g_2'-g_2}{BE} \text{ und } \frac{g_3'-g_3}{BE(\alpha A^2+\beta B^2)}$$

Modul*functionen* der Γ_6', und als solche sind diese Grössen auch in der Umgebung der Nullpunkte von B und E *auf der „Ebene" F_6'* eindeutig. In jedem dieser vier Punkte muss also mit dem Nenner auch der einzelne Zähler (2) wenigstens in der Ordnung $\frac{1}{2}$ verschwinden, so dass auch noch der Quotient von $g_k'-g_k$ und BE eine *ganze* Modulform der Γ_{12} vorstellt, welche aber nun gegenüber W absolut invariant ist und eben deshalb sich als ganze homogene Function von A^2 und B^2 darstellen lässt. Aus der Dimension in den ω_1, ω_2 ergiebt sich daraufhin unmittelbar der Ansatz:

$$(3)\qquad g_2'-g_2=aBE,\quad g_3'-g_3=BE(\alpha A^2+\beta B^2).$$

Noch directer erledigen sich die beiden Ausdrücke $g_k'+g_k$; denn hier gilt offenbar der Ansatz:

$$(4)\qquad \begin{cases} g_2'+g_2=bA^4+cA^2B^2+dB^4, \\ g_3'+g_3=\gamma A^6+\delta A^4B^2+\varepsilon A^2B^4+\zeta B^6. \end{cases}$$

Zur Bestimmung der noch unbekannten numerischen Coefficienten trage man die Reihenentwicklungen ein; dabei genügen für g_2 und g_3 selbst unter Einschluss der überschüssigen (zur Controlle der Rechnung hinzugezogenen) Glieder folgende Anfangsterme:

$$(5)\qquad \begin{cases} 12\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^4 g_2=1+12\cdot 20\,(r+\ 9r^2+\ 28r^3+\cdots), \\ 216\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^6 g_3=1-14\cdot 36\,(r+33r^2+244r^3+1057r^4+\cdots. \end{cases}$$

Nachdem wir die Rechnung zu Ende geführt haben, bestimmen wir durch Combination der entspringenden Gleichungen g_k und g_k' einzeln. *Als Ausdrücke für die Modulformen g_2, g_3 und ihre transformierten Werte g_2', g_3' in den Modulformen A, B, E der Γ_{12} ergeben sich solcherweise:*

$$(6)\qquad 12g_2,\ 12g_2'=2^5\cdot 11A^4-2^4\cdot 23A^2B^2+61B^4\mp 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot BE,$$

$$(7)\qquad 216g_3,\ 216g_3'=7(2^3\cdot 11^2A^6-2^6\cdot 3\cdot 11A^4B^2+2^4\cdot 3\cdot 23A^2B^4-5\cdot 19B^6) \mp 2\cdot 3^2BE(2^3\cdot 11A^2-37B^2).$$

Dabei beziehen sich die oberen Zeichen immer auf die ursprünglichen Moduln, die unteren aber auf die transformierten.

Um entsprechende Ausdrücke für Δ und Δ' zu gewinnen, betrachten wir $\sqrt{\Delta}$ auf F_{12}. Hierbei liegt der Nachdruck auf dem Umstande, *dass* $\sqrt[1]{\Delta\Delta'}$ *bis auf einen numerischen Factor mit* A^2 *übereinstimmt;* die betreffende Formel findet man weiter unten angegeben. Es folgt die Identität dieser beiden Modulformen einfach aus der gleichen Lage und Art ihrer Verschwindungspunkte auf F_{12}, wie man leicht ins einzelne verfolgen wird*). Demzufolge gehört $\sqrt{\Delta\Delta'}$ im absoluten Sinne zu F_6', und es werden die beiden Formen $(\sqrt{\Delta'} \pm \sqrt{\Delta})$ diesem Polygon F_6' adjungiert sein. Man bilde nunmehr die beiden nachfolgenden Quotienten:

$$(8) \qquad \frac{\sqrt{\Delta'} + \sqrt{\Delta}}{\mathsf{AB}(a\mathsf{A}^4 + b\mathsf{A}^2\mathsf{B}^2 + c\mathsf{B}^4)}, \quad \frac{\sqrt{\Delta'} - \sqrt{\Delta}}{\mathsf{AE}(\alpha\mathsf{A}^2 + \beta\mathsf{B}^2)},$$

wobei die Coefficienten a, b, c und α, β vorab ganz beliebig gewählt sein mögen. Die Ausdrücke (8) stellen, wie man sieht, Modul*functionen* dar, deren Quadrate absolut zur Γ_6' gehören, während sie als solche zufolge der früheren Formeln sowohl gegenüber S als W absolut invariant sind. Demnach muss z. B. $(\sqrt{\Delta'} - \sqrt{\Delta})$ bei der Lage und Art der Nullpunkte von A und E in der Spitze $\omega = i\infty$ von F_6', sowie in den drei zu $D = -44$ gehörenden Ecken von F_6' jeweils in einer der Ordnungen $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ (gemessen auf F_6') verschwinden; dagegen wird $(\sqrt{\Delta'} - \sqrt{\Delta})$ in der zu $D = -11$ gehörenden Polygonecke entweder endlich bleiben oder in ganzzahliger Ordnung auf F_6' verschwinden, da hier A und E selbst endlich und von Null verschieden sind. In sonstigen (gewöhnlichen) Punkten von F_6' wird der zweite Ausdruck (8) selbstverständlich nur in ganzzahliger Ordnung Null oder ∞ werden können, da er doch eine Modulfunction darstellt. Indem wir also daran erinnern, dass F_6' zum Geschlechte $p = 0$ gehört, wird auf der geschlossenen Fläche F_6' nicht nur das Quadrat des zweiten Ausdrucks (8), sondern dieser selbst, als nirgends von gebrochener Ordnung 0 oder ∞, eine *eindeutige* Function vorstellen. — Ebenso verfahren wir beim ersten Ausdruck (8) und erkennen so endlich, dass die Quotienten $(\sqrt{\Delta'} + \sqrt{\Delta}) : \mathsf{AB}$ und $(\sqrt{\Delta'} - \sqrt{\Delta}) : \mathsf{AE}$ als *ganze* Modulformen *absolut* zur Γ_6' gehören. Damit aber haben wir die Ansätze erreicht:

$$\sqrt{\Delta'} + \sqrt{\Delta} = \mathsf{AB}(a\mathsf{A}^4 + b\mathsf{A}^2\mathsf{B}^2 + c\mathsf{B}^4), \quad \sqrt{\Delta'} - \sqrt{\Delta} = \mathsf{AE}(\alpha\mathsf{A}^2 + \beta\mathsf{B}^2),$$

von denen aus wir nun in gewohnter Weise leicht die gewünschten

*) Man vgl. auch die nächstfolgenden Paragraphen sowie oben p. 67 u. f.

Resultate ableiten. *Als endgültige Darstellungen der Moduln* $\sqrt{\Delta}$ *und* $\sqrt{\Delta'}$ *in den Modulformen* A, B, E *der* Γ_{12} *ergeben sich:*

$$(9)\quad 2\sqrt{\Delta},\ 2\sqrt{\Delta'} = \mathrm{AB}(2^3\cdot 11\mathrm{A}^4 - 3\cdot 7\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2 + \mathrm{B}^4) \mp \mathrm{AE}(11\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2).$$

Dieses letzte Ergebnis ist übrigens einer interessanten Bestätigung fähig. Es wurde nämlich bereits angedeutet, dass $\sqrt[2]{\Delta'\Delta}$ bis auf einen numerischen Factor mit A identisch ist. Aus (9) folgt aber:

$$4\sqrt{\Delta'\Delta} = \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2(88\mathrm{A}^4 - 21\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2 + \mathrm{B}^4)^2 - \mathrm{A}^2\mathrm{E}^2(11\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2)^2.$$

Wenn man also hier E^2 durch seinen aus (10) p. 436 entspringenden Ausdruck in A, B ersetzt, so muss sich die rechte Seite der letzten Gleichung auf das einzelne Glied mit A^{12} zusammenziehen. Die Rechnung bestätigt dies, indem sie auf die Relation führt:

$$(10)\qquad \sqrt{\Delta'\Delta} = 121\mathrm{A}^{12}.$$

Die Aufstellung der *functionentheoretischen Resolvente zwölften Grades* ist mit dem Bisherigen bereits implicite geleistet. Wir brauchen nur noch auf die Proportion:

$$J : J - 1 : 1 = g_2^3 : 27g_3^2 : \Delta$$

zurückzugehen, um auf der rechten Seite derselben g_2, g_3, Δ durch ihre Ausdrücke (6), (7) und (9) zu ersetzen. Indem wir dann noch zur nicht-homogenen Bezeichnungsweise, d. i. zu den Modulfunctionen τ, τ' der Γ_{12} zurückgehen, erhalten wir das Resultat*):

$$\begin{aligned}(11)\quad J:J-1:1 = {} & [2^5\cdot 11\cdot\tau^2 - 2^4\cdot 23\cdot\tau + 61 - 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot\tau']^3\\ & :[7(2^3\cdot 11^2\tau^3 - 2^6\cdot 3\cdot 11\cdot\tau^2 + 2^4\cdot 3\cdot 23\cdot\tau - 5\cdot 19)\\ & \qquad - 2\cdot 3^2\cdot\tau'(2^3\cdot 11\cdot\tau - 37)]^2\\ & :2^4\cdot 3^3\cdot\tau\,[2^3\cdot 11\cdot\tau^2 - 3\cdot 7\cdot\tau + 1 - \tau'(11\tau - 1)]^2.\end{aligned}$$

Diese Gleichung im Verein mit der zwischen τ *und* τ' *bestehenden algebraischen Relation:*

$$(12)\qquad \tau'^2 - 1 + 20\tau - 56\tau^2 + 44\tau^3 = 0$$

ergiebt uns im gewohnten Sinne den Ausdruck für die functionentheoretische Resolvente zwölften Grades. Auf der anderen Seite besitzen wir hier ein interessantes Ergebnis für jene Darstellungsweise der Modulargleichungen erster Stufe, wie wir sie oben p. 58 ff. allgemein postu-

*) Man vgl. nun hier die schon in der Einleitung zum vorliegenden Kapitel namhaft gemachten Untersuchungen von Hrn. Kiepert. Die Formel (325 b) p. 98 l. c. ist in anderer Gestalt geradezu die Gleichung (11) des Textes, während unsere Gleichung (12) bei Hrn. Kiepert mit der Gleichung (320) p. 96 übereinstimmt; die Überführung dieser beiden letzten Gleichungen in einander lässt sich in der That mühelos vollziehen.

lierten und für die Fälle des Geschlechtes $p = 0$ vollständig durchführten. In der That wird ja für $J'(\omega) = J(11\omega)$ eine der Relation (11) völlig gleich gebaute Proportion gelten, deren rechte Seite aus derjenigen von (11) einfach durch Zeichenwechsel von τ' entspringt. *Die so gemeinte Gleichung im Verein mit* (11) *und* (12) *bildet alsdann den Ersatz für die Modulargleichung erster Stufe elfter Ordnung.* Der einzige Unterschied gegen die früheren Entwicklungen ist, wie man sieht, der, dass wir (dem Geschlechte $p = 1$ zufolge) nicht mehr mit einer einzelnen Grösse τ reichen, sondern deren *zwei* neben einander stellen müssen, die dann durch die algebraische Relation (12) an einander gebunden sind.

§ 13. Von den formentheoretischen Resolventen zwölften Grades.

Die Ableitung formentheoretischer Resolventen aus den functionentheoretischen gelang bei den niederen Stufen $n = 5, 7$ ohne weiteres; hier bei $n = 11$ liegen die Verhältnisse anders, und zwar infolge der Eigenart der zu Grunde gelegten Modulfunction τ, τ': Diese einfachsten Functionen der Γ_{12} sind eben Quotienten von Formen, die durchgehends nur erst der Stufe *elf* angehören, während bei $n = 5$ oder 7 der Hauptmodul τ Quotient zweier Formen war, von denen die eine der *ersten* Stufe adjungiert war (cf. Formeln (5) p. 64).

Bei dieser Sachlage werden wir zur Gewinnung formentheoretischer Resolventen zwölften Grades aufs neue ansetzen müssen. Da eine Modulform, die absolut zur homogenen Γ_{12} gehören soll, von gerader Dimension sein muss (insofern sie anderenfalls gegenüber T^2 das Zeichen wechselt), so werden wir offenbar eine möglichst einfache formentheoretische Resolvente erhalten, wenn wir als Wurzel derselben *eine ganze Modulform* $(-2)^{\text{ter}}$ *Dimension* der Γ_{12} wählen. Die allgemeinste Form dieser Art ist aber bekanntlich:

$$y_\infty = 11\,(\varkappa_1 \mathsf{A}^2 - \varkappa_2 \mathsf{B}^2), \tag{1}$$

um sie gleich (vermittelst eines willkürlich bleibenden Parameters $\varkappa_1 : \varkappa_2$) in diese typische Form zu setzen. *Auf dem bezeichneten Wege erhalten wir also gleich einfach unendlich viele wesentlich verschiedene Resolventen zwölften Grades.*

Was die Gestalt aller dieser Gleichungen angeht, so haben wir hier die wesentliche Fallunterscheidung, ob $\varkappa_2$ von Null verschieden oder Null ist. Im ersteren Falle, den wir vorwegnehmen, setzen wir einfach $\varkappa_2 = 1$ und erinnern daran, dass $\mathsf{B} = \mathsf{B}_0$ unter allen zwölf Grössen der beiden zu Grunde liegenden Modulsysteme A_α, B_α die einzige ist, welche bei $\omega = i\infty$ gegen einen von Null verschiedenen Wert con-

vergiert. Genau in derselben Weise, wie wir bei $n = 7$ im vorigen Kapitel (p. 398) ausführlich zeigten, hat dies zur Folge, dass die fragliche Resolvente in grosser Nähe von $\omega = i\infty$ annähernd die Gestalt annimmt:

$$\left\{ y + 11 \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \right\} \left\{ y - \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \right\}^{11} = 0.$$

Die Coefficienten der Resolvente sind damit bis auf Bestandteile, die mit r verschwinden, ohne weiteres zu bestimmen; *in der That finden wir als Ausdruck der formentheoretischen Resolvente für $\varkappa_2 = 1$ nach kurzer Rechnung:*

$$(2)\quad \begin{cases} y^{12} - 6 \cdot 11 \cdot 12 g_2 y^{10} + 11 \cdot 40 \cdot 216 g_3 y^9 - 11 \cdot 135 \cdot 12^2 g_2^2 y^8 \\ \quad + 11 \cdot 288 \cdot 12 g_2 \cdot 216 g_3 y^7 - (11 \cdot 420 \cdot 12^3 g_2^3 + \alpha\Delta)\, y^6 \\ \quad + 11 \cdot 432 \cdot 12^2 g_2^2 \cdot 216 g_3 y^5 - (11 \cdot 315 \cdot 12^4 g_2^4 + \beta g_2 \Delta) y^4 \\ \quad + (11 \cdot 160 \cdot 12^3 g_2^3 \cdot 216 g_3 + \gamma \cdot g_3 \Delta) y^3 - (11 \cdot 54 \cdot 12^5 g_2^5 + \delta g_2^2 \Delta) y^2 \\ \quad + (120 \cdot 14^4 g_2^4 \cdot 216 g_3 + \varepsilon g_2 g_3 \Delta) y - (11 \cdot 12^6 g_2^6 + \zeta g_2^3 \Delta + \vartheta \Delta^2) = 0. \end{cases}$$

Die sieben numerischen Coefficienten $\alpha, \beta, \ldots, \vartheta$ bleiben mit $\varkappa_1$ unbestimmt, indem sie offenbar rationale ganze Functionen dieses Parameters werden; die Ausdrücke derselben würde man vermöge einer allerdings etwas umständlichen Rechnung aus den Reihenentwicklungen nach r feststellen können.

Gegenüber der umfänglichen Gleichung (2) wolle man nun die besondere Einfachheit jener speciellen unter unseren Resolventen bemerken, welche dem Falle $\varkappa_1 = 1$, $\varkappa_2 = 0$ in (1) zugehört. In diesem Falle werden alle Coefficienten der Resolvente solche ganze Modulformen erster Stufe sein müssen, die mit r verschwinden; nun also kommen alle Glieder, welche wir in (2) explicite bestimmen konnten, gerade zum Fortfall, und unter den übrig bleibenden Gliedern wird auch noch $\zeta \cdot g_2^3 \Delta$ ausfallen müssen, da offenbar das Product der zwölf gleichberechtigten y bei $\omega = i\infty$ mit einer höheren als der ersten Potenz von r proportional wird. Die sechs noch unbekannten Coefficienten bestimmt man endlich aus den Reihenentwicklungen. *Auf solche Weise findet man als fertige Form der Resolvente zwölften Grades für $y_\infty = +11 A^2$ die nachfolgende:*

$$(3)\quad \begin{aligned} y^{12} &- 11 \cdot 90\Delta \cdot y^6 + 11 \cdot 40 \cdot 12 g_2 \Delta \cdot y^4 - 11 \cdot 15 \cdot 216 g_3 \Delta y^3 \\ &+ 11 \cdot 2 \cdot 12^2 g_2^2 \Delta y^2 - 12 g_2 \cdot 216 g_3 \Delta y - 11 \Delta^2 = 0. \end{aligned}$$

Hier haben wir zufolge der Identität (10) § 12, die wir nun auch in die Gestalt:

$$(4)\qquad y_\infty = \sqrt[2]{\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{11}\right) \Delta(\omega_1, \omega_2)}$$

setzen mögen, keine andere als *die formentheoretische Transformations-*

gleichung für $n = 11$ vor uns, die wir im vorigen Abschnitt (*p.* 72) *der ersten Stufen adjungiert nannten* *).

Der jetzt erreichte Fortschritt gegenüber den eben genannten Entwicklungen im vorigen Abschnitt besteht nun aber nicht nur darin, dass wir die fertige Gestalt der Resolvente (3) kennen gelernt haben: wir werden vielmehr vor allen Dingen $A = A_0$ jetzt wieder als erste Modulform im System der sechs Formen $A_0, A_1, \ldots, A_5$ elfter Stufe betrachten und könnten eine Theorie dieses Modulsystems durchbilden, welche in den entsprechenden Entwicklungen über das quaternäre Modulsystem der A_α bei $n = 7$ ihr genaues Vorbild finden würde. Da würden wir denn *ein Galois'sches Problem der* A_α *zu formulieren haben, dessen einfachste Resolvente die Gleichung* (3) *ist;* wir würden die Quadratwurzeln aus den zwölf Grössen y durch die sechs A_α in der Gestalt eines *Jacobi'schen Schemas* darstellen können und also in (3) eine *Jacobi'sche Gleichung* erkennen u. s. w.

Auf die hiermit bezeichneten Verhältnisse treffen wir nun aber nicht nur bei der Resolvente (3), sondern, was sofort evident ist, auch bei jener Resolvente (2), welche den Werten $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_2 = 1$ in (1) zugehört. Hier kommen wir zum Modulsystem der B_α, welches sich (bei richtiger Anordnung) *contragredient* zu den normierten A_α substituiert. Nichts würde hindern, nun auch ein *Problem der* B_α zu formulieren, für welches dann die in Rede stehende Gleichung (2) die einfachste Resolvente liefern würde.

Die Thatsache, dass auch noch $\sqrt{y_\infty}$ eine eindeutige Modulform ist, tritt übrigens (wie hier noch anschliessend bemerkt sein mag) ausser für die beiden Werte 0 und ∞ des Parameters $\varkappa_1 : \varkappa_2$ auch noch für jene drei Werte ein, welche aus der Gleichung:

$$(5) \qquad \varkappa_1^3 - 20\varkappa_1^2\varkappa_2 + 56\varkappa_1\varkappa_2^2 - 44\varkappa_2^3 = 0$$

zu berechnen sind. Nur für diese drei y_∞ werden nämlich die beiden Nullpunkte auf dem Polygon F_{12} coincidieren, so dass die Quadratwurzel $\sqrt{y_\infty}$ im Innern der ω-Halbebene keine Nullpunkte gebrochener Ordnung darbietet. Auf diese drei Modulformen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension, deren nähere Betrachtung sich gewiss verlohnte, wurden wir übrigens durch unsere anfänglichen Entwicklungen schon deshalb nicht geführt, weil wir hier in Betreff sowohl der Entwicklungscoefficienten der Potenzreihen nach r, wie auch der numerischen Bestandteile in den bezüglichen Resolventen (2) in ein *irrationales numerisches Gebiet* hineingelangen, dasjenige nämlich, welches durch die cubische Gleichung

*) Unter diesem Gesichtspunkt hat Hr. Klein seiner Zeit die Gleichung (3) des Textes aufgestellt und in seinem p. 402 genannten Brief an Brioschi mitgeteilt.

(5) charakterisiert ist. Dass übrigens die fraglichen drei Quotienten $x_1 : x_2$ die reciproken Werte der drei *singulären Moduln* τ sind, welche den drei ursprünglichen Formclassen *der Determinante* $D = -44$ zugehören, wird man bereits bemerkt haben.

Die beschriebenen Verhältnisse sind übrigens auch von der allgemeinen Stufentheorie aus verständlich, wenn wir dieselbe auf das durch die Fläche F_{12} gegebene elliptische Gebilde in Anwendung bringen*). Da geht offenbar die Form B der σ-Function *erster* Stufe parallel, jene drei Modulformen $\sqrt{y_\infty}$ aber, welche der Gleichung (5) entsprechen, würden wir mit den drei zur *zweiten* Stufe gehörenden Functionen $\sigma_{10}(u)$, $\sigma_{01}(u)$, $\sigma_{11}(u)$ zu identificieren haben. Der Fortschritt von der ersten zur zweiten Stufe bei unserer F_{12} würde also in *arithmetischer* Hinsicht den Charakter haben, *dass wir den Bereich der numerischen Zahlen durch Hinzunahme der drei zu* $D = -44$ *gehörenden singulären Moduln* τ *erweitern.*

Es mag in dieser Hinsicht noch interessant sein, zu erfahren, welche *numerischen* Zahlwerte die rationalen Invarianten und unter ihnen insbesondere die absolute für unser elliptisches Gebilde annehmen. Um Verwechslungen zu vermeiden, wollen wir alle in Betracht kommenden elliptischen Functionen erster Stufe durch die betreffenden deutschen Buchstaben bezeichnen. Die Gleichung (12) § 12 rechnet sich alsdann in die Weierstrass'sche Normalform um:

$$\mathfrak{p}'^2 = 4\mathfrak{p}^3 - \frac{2^2 \cdot 31}{3}\mathfrak{p} - \frac{41 \cdot 61}{3^3},$$

und es ergeben sich von hier aus als Werte der Invarianten:

$$\mathfrak{g}_2 = \frac{2^2 \cdot 31}{3}, \quad \mathfrak{g}_3 = \frac{41 \cdot 61}{3^3}, \quad \mathfrak{D} = -11^5, \quad \mathfrak{J} = -\frac{2^6 \cdot 31^3}{3^3 \cdot 11^5}.$$

Mit den vorstehenden Entwicklungen müssen wir die Theorie der elften Stufe abschliessen. Wir haben die letztere Theorie vermöge der Modulsysteme des Kap. 3 bis zu dem gleichen Grade durchbilden können, wie die Theorie der siebenten Stufe in Bd. I, und haben so aufs neue einen Beleg für die Brauchbarkeit der allgemeinen analytischen Ansätze des vorletzten Kapitels gewonnen.

---

*) Man sehe z. B. die Theorie der elliptischen Normalcurven der verschiedenen Ordnungen n und deren Beziehung zu den Modulfunctionen n^{ter} Stufe in den beiden ersten Kapiteln des vorliegenden Abschnitts; vgl. insbesondere auch das zu Anfang des vierten Abschnitts (p. 2 bis 8) entwickelte allgemeine Stufenschema für die Theorie der elliptischen Functionen.

Sechstes Kapitel.

Von den durch die Modulargleichungen erster Stufe definierten algebraischen Gebilden bei $n > 11$.

Bei der Fortsetzung unserer functionentheoretischen Einzeluntersuchungen über den Fall $n = 11$ hinaus könnte es sich für die weiter folgenden Stufenzahlen zunächst wieder um die Modulsysteme der A_α, der z_α etc. handeln, die von den allgemeinen Ansätzen des dritten Kapitels geliefert werden. Mag n prim oder zusammengesetzt, gerade oder ungerade sein, immer wird man dem einzelnen der vorgelegten Modulsysteme in bekannter Überlegung die ihm zugehörige Curve zuerteilen, für welche alsdann Ordnung und Geschlecht leicht angebbar sind. Jede solche Curve wird auf das Polygon der Hauptcongruenzgruppe der gerade vorliegenden Stufe eindeutig bezogen sein, und sie wird gegenüber den Transformationen dieses Polygons in sich selbst die gleiche Anzahl von Collineationen in sich erfahren.

Nun war aber bei $n = 11$ der eigentliche Beweggrund für die ausführliche Betrachtung der Moduln z_α, dass wir die Resolventen 11ten Grades bilden wollten. Höher hinauf sind die niedersten Resolventen immer diejenigen vom Grade $\psi(n)$; und diese sind functionentheoretisch zugänglich, auch ohne dass wir jene Galois'schen Modulsysteme vorher einer eingehenden Discussion unterzogen hätten. Es ist dies darin begründet, dass uns Moduln des Transformationspolygons $F_{\psi(n)}$ von den Systemen der $\frac{n+1}{2}$ bez. $\frac{n+2}{2}$ Grössen immer leicht geliefert werden; im Falle ungerader n sind es sogar direct die Grössen A_0, y_0 etc.

Bei dieser Sachlage wollen wir jetzt den Zielpunkt für die Entwicklungen des gegenwärtigen Kapitels folgendermassen festlegen: *Es soll sich darum handeln, für eine Reihe weiterer Stufenzahlen n die Resolvente $\psi(n)^{\text{ten}}$ Grades und das durch sie definierte algebraische Gebilde mit Hülfe der uns zur Verfügung stehenden Moduln A_0 etc. zu untersuchen.* Hier treffen wir in der That noch auf eine ganze Reihe leicht zugänglicher Einzeluntersuchungen, während sich die auf die regulären

Flächen $F_{\mu(n)}$ der gleichen Ordnungen n bezogenen Modulsysteme der z_α, A_α etc. einer erschöpfenden Betrachtung nicht mehr in dem Masse leicht zugänglich erweisen, wie bei $n \leq 11$.

Die folgenden Entwicklungen erstrecken sich mit Ausnahme des Falles $n = 35$ nur auf Primzahlstufen; es geschah dies namentlich wegen der einfachen Gestalt, die das Transformationspolygon $F_{\psi(n)}$ für primzahliges n aufweist. Dabei haben wir nach Bequemlichkeit eine Reihe von Stufen n zur Untersuchung herausgegriffen, und zwar war für die Auswahl der Umstand massgeblich, dass unsere analytischen Ansätze sich vornehmlich in jenen Fällen als brauchbar erweisen, welche zu elliptischen oder hyperelliptischen Gebilden hinführen.

Die Untersuchungen des vorliegenden Kapitels sind erst letzthin vom Herausgeber ausgeführt worden*); sie gründen sich durchaus auf den Gebrauch der Riemann'schen Flächen $F_{\psi(n)}$ und der zu denselben gehörenden Modul*formen*, und stellen sich auch in diesem Sinne den bezüglichen Entwicklungen bei $n = 11$ im vorigen Kapitel (§ 10 u. f.) unmittelbar an die Seite. Im übrigen liegt die engste Beziehung zu der schon häufig genannten Arbeit von Hrn. Kiepert in Bd. 32 der Mathem. Ann. vor; doch kommen in letzterer Arbeit mit einziger Ausnahme des Falles $n = 11$ nur zusammengesetzte Stufenzahlen zur Geltung.

§ 1. Das zur Ordnung $n = 31$ gehörende Transformationspolygon und seine Modulformen der Dimensionen -1 und -2.

Als Prototyp für diejenigen Fälle n, die zu einem algebraischen Gebilde des Geschlechtes $p = 1$ hinführen, kann die im vorigen Kapitel behandelte Ordnung $n = 11$ gelten. Für die Fälle $p = 2$ bringen wir hiermit die Ordnung $n = 31$ in Vorschlag**). Das zugehörige Transformationspolygon F_{32} hat nach früheren Regeln, als 32-blättrige Fläche über der J-Ebene angeordnet, die nachfolgende Verzweigung: *Bei $J = 0$ verlaufen zwei Blätter isoliert, während die übrigen dreissig zu je drei in zehn Verzweigungspunkten zusammenhängen; bei $J = 1$ hängen die Blätter zu je zwei in sechzehn Verzweigungspunkten zusammen; schliesslich verläuft bei $J = \infty$ ein Blatt isoliert, während die übrigen* 31 *im Cyclus zusammenhängen.* Die beiden bei $J = 0$ isoliert verlaufenden Blätter liefern im ursprünglichen Polygon F_{32} zwei Ecken b, die als Fixpunkte zu zweien in der Γ_{32} enthaltenen elliptischen Sub-

*) Vgl. auch Math. Ann. Bd. 40.

**) Die zu $p = 1$ bez. $p = 2$ gehörenden Ordnungen $n = 19$ und 23 sind in der eben genannten Arbeit des Herausgebers behandelt.

stitutionen der Periode drei gehören. Wir wollen, die frühere Benennung beibehaltend, diese beiden Ecken kurz als „Ausnahmepunkte b“ des Polygons F_{32} bezeichnen.

Die wichtigste Eigenschaft des Polygons F_{32} besteht darin, *dass dasselbe die früher (p. 42) mit W bezeichnete Transformation der Periode zwei in sich zulässt.* Diese Transformation W hatte nun für unsere Fläche F_{32} eine sehr merkwürdige arithmetische Bedeutung; in der That repräsentieren, wie wir früher (p. 189) fanden, die Fixpunkte von W im Polygon F_{32} gerade die gesamten Classen ursprünglicher quadratischer Formen (P, Q, R) der beiden Determinanten $D = -31$ und $D = -124$. Nun aber bestimmen wir nach I p. 250 sofort *drei* reducierte ursprüngliche Formen für $D = -31$ und ebensoviele für $D = -124$; es sind dies die Formen:

$$(1) \qquad \begin{cases} D = -31, & (1,\ 1,\ 8), \quad (2,\ \pm 1,\ 4), \\ D = -124, & (1,\ 0,\ 31), \quad (5,\ \pm 4,\ 7). \end{cases}$$

Nennen wir die aus Γ_{32} durch Zusatz von W entspringende Gruppe $\Gamma_{(31)}$ und ihr Polygon $F_{(31)}$, so ergiebt sich aus den eben dargelegten Verhältnissen der wichtige Satz, *dass dieses Polygon $F_{(31)}$ zum Geschlechte $p = 0$ gehört.* Wenn wir nämlich $F_{(31)}$ zu einer geschlossenen Fläche zusammenfalten, so werden wir nun umgekehrt F_{32} durch doppelte Überlagerung jener Fläche wiedererhalten, indem wir nur Sorge tragen, dass beide Blätter an den sechs durch (1) charakterisierten Stellen mit einander verzweigt sind. Nun bemerke man, dass wirklich eine doppelt-überdeckte *Ebene* mit sechs Verzweigungspunkten zum Geschlechte $p = 2$ hinführt, während eine elliptische Fläche, in dieser charakteristischen Weise doppelt überdeckt, bereits das Geschlecht 4 bekommt. Offenbar können wir übrigens das erhaltene Resultat auch in der Weise aussprechen, *dass die Substitution W es ist, welche die zweiwertigen Functionen unserer hyperelliptischen Fläche in sich transformiert.*

Um in die analytische Behandlung unserer Fläche F_{32} den Eingang zu gewinnen, sind die in (2) p. 355 angesetzten Reihen A_0 weitaus die geeignetsten. Wir haben dieselben zu bilden für die beiden quadratischen Formen $(1, 1, 8)$, $(2, 1, 4)$ bez. für zwei mit ihnen äquivalente Formen, welche den Gestaltanforderungen entsprechen, wie sie l. c. formuliert wurden. Setzen wir dann gleich 31ξ statt ξ, um der Summationsbedingung $\xi \equiv 0 \pmod{31}$ zu genügen, so erhalten wir die beiden Reihen:

$$(2) \qquad \frac{2\pi}{\omega_2} \sum r^{\xi^2 + \xi\eta + 8\eta^2}, \quad \frac{2\pi}{\omega_2} \sum r^{2\xi^2 + \xi\eta + 4\eta^2},$$

wo beide Male ξ und η alle Combinationen ganzer Zahlen durchlaufen sollen. Indem wir noch eine weitere naheliegende Vereinfachung in der Schreibweise der Exponenten einführen und zugleich auf die schon bei $n = 11$ gebrauchte Bezeichnung $\mathsf{B}(\omega_1, \omega_2)$ zurückgreifen, haben wir

$$\mathsf{B} = \frac{2\pi}{\omega_2}\sum r^{\frac{x^2+31y^2}{4}}, \quad x \equiv y \pmod{2},$$

$$\mathsf{B}' = \frac{2\pi}{\omega_2}\sum r^{\frac{x^2+31y^2}{8}}, \quad x \equiv y \pmod{4}$$

als die beiden zu Grunde zu legenden Modulformen. Doch ist es noch zweckmässiger statt B' die Form A durch $2\mathsf{A} = \mathsf{B} - \mathsf{B}'$ einzuführen, um nun das Modulsystem A, B zu benutzen. Als die Anfangsterme der Entwicklungen von A und B nach Potenzen von r merke man gleich an:

$$(3) \qquad \mathsf{A} = \frac{2\pi}{\omega_2}(r - r^2 - r^5 - r^7 + r^8 + r^9 + \cdots),$$

$$(4) \qquad \mathsf{B} = \frac{2\pi}{\omega_2}(1 + 2r + 2r^4 + 4r^8 + 2r^9 + \cdots).$$

Eine Modulform $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension hat auf dem Polygon F_{32} die Wertigkeit $\frac{8}{3}$; sie wird in den Ausnahmepunkten b des Polygons jeweils im Grade $\frac{1}{3}$ verschwinden, ausserdem aber *zwei*, allgemein nicht näher angebbare, einfache Nullpunkte auf F_{32} aufweisen. In der That sind diese beiden Nullpunkte für die lineare Verbindung:

$$(5) \qquad \alpha\mathsf{A} + \beta\mathsf{B}$$

mit den Quotienten $\alpha : \beta$ selbst beweglich. *Der Quotient irgend zweier linear-unabhängiger Verbindungen* (5) *wird demgemäss eine zweiwertige Function der Fläche F_{32} liefern, und zugleich erhalten wir auf diesem Wege offenbar ihre gesamten zweiwertigen Functionen;* wir werden im nächsten Paragraphen eine besondere unter ihnen zum speciellen Gebrauche auswählen.

Die Nullpunkte einer einzelnen Modulform (5) werden, wie wir eben fanden, durch die Transformation W in sich übergeführt. Es müssen demnach A und B gegenüber der *homogenen* Substitution W:

$$(6) \qquad (W) \qquad \omega_1' = \frac{i\omega_2}{\sqrt{31}}, \qquad \omega_2' = \frac{\omega_1\sqrt{31}}{i}$$

bis aufs Zeichen in sich selbst übergehen; denn auch in dieser homogenen Gestalt ist W von der Periode zwei. Aber aus dem Verhalten der Formen B gegenüber der Modulsubstitution T folgern wir hier genau, wie bei $n = 11$, dass direct die Gleichungen bestehen:

$$(7) \quad \mathsf{A}\left(\frac{i\omega_2}{\sqrt{31}}, \frac{\omega_1\sqrt{31}}{i}\right) = \mathsf{A}(\omega_1, \omega_2), \quad \mathsf{B}\left(\frac{i\omega_2}{\sqrt{31}}, \frac{\omega_1\sqrt{31}}{i}\right) = \mathsf{B}(\omega_1, \omega_2).$$

Die allgemeinste ganze Modulform $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension, welche absolut zur Γ_{32} gehört, ist

$$(8) \qquad \varkappa \mathsf{A}^2 + \lambda \mathsf{AB} + \mu \mathsf{B}^2;$$

die beweglichen Nullstellen dieser Formen bilden, wie man sieht, eine ∞^2-fache Schaar äquivalenter Systeme zu je vier Punkten auf unserer hyperelliptischen Fläche F_{32}. Die gleichfalls zur Γ_{32} gehörende ganze Modulform $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension:

$$(9) \qquad \mathsf{P}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\mu=0}^{15} \wp_{0,\mu}(\omega_1, \omega_2)$$

wird sich demnach in der Gestalt (8) darstellen lassen. Um diese Darstellung hier wirklich noch zu leisten, werden wir auf die charakteristische Reihenentwicklung der Form (9) zurückgreifen:

$$(10) \qquad \mathsf{P}(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \left\{\frac{5}{4} + \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{31}(m) r^m\right\},$$

in welcher $\Phi_{31}(m)$ die Summe aller gegen 31 primen Divisoren von m ist. Indem wir andrerseits die Entwicklungen für die quadratischen Verbindungen der A, B heranziehen, findet sich durch bekannte numerische Rechnungen als Darstellung der Modulform (9):

$$(11) \qquad 4\mathsf{P} = 8\mathsf{A}^2 - 16\mathsf{AB} + 5\mathsf{B}^2.$$

§ 2. Das volle Modulsystem der Γ_{32}. Die singulären Moduln und die Smith'sche Curve des Transformationspolygons F_{32}.

Unter den homogenen Verbindungen sechsten Grades von A und B muss es eine bestimmte geben, deren zwölf „bewegliche" Nullpunkte auf F_{32} zu Paaren in den sechs Fixpunkten der Substitution W coincidieren. Auch noch die Quadratwurzel aus dieser Verbindung der A, B ist eine Modulform, die wir $\mathsf{E}(\omega_1, \omega_2)$ nennen wollen, und die natürlich zunächst nur bis auf einen numerischen Factor bestimmt ist. E *ist alsdann eine ganze Modulform* $(-3)^{\text{ter}}$ *Dimension, die ausser in den sechs eben genannten Fixpunkten von* W *noch in den beiden Ausnahmepunkten* b *von* F_{32} *je einfach verschwindet.*

Um diese Modulform E der näheren Betrachtung zugänglich zu machen, gehen wir gerade wie bei $n = 11$ auf die überall endlichen Integrale der Fläche F_{32} zurück. Soll die unter (8) des vorigen Paragraphen angegebene Modulform in den beiden Spitzen des Polygons F_{32} verschwinden, so muss $\mu = 0$ gesetzt werden. Von hier aus finden wir auf *transcendentem* Wege (d. h. von den ω_1, ω_2 aus) als allgemeinstes Integral erster Gattung der F_{32}:

$$(1) \qquad \int (\varkappa \mathsf{A}^2 + \lambda \mathsf{AB})(\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1).$$

Andrerseits können wir uns diese Integrale aber auch wieder auf *algebraischem* Wege bilden und bedienen uns dabei der abkürzenden Bezeichnungen:

$$A_0 = \frac{\omega_2}{2\pi} A, \quad B_0 = \frac{\omega_2}{2\pi} B, \quad E_0 = \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^3 E.$$

An Stelle von (1) treten nun die Formeln:

$$(2) \qquad \int \frac{\varkappa' A_0 + \lambda' B_0}{E_0} \cdot (B_0 dA_0 - A_0 dB_0)$$

mit willkürlich zu wählenden $\varkappa'$, λ'. Wie hierbei die Zahlenpaare $\varkappa$, λ und $\varkappa'$, λ' einander eindeutig zugewiesen sind, brauchen wir nicht in voller Allgemeinheit festzustellen; jedenfalls aber ist sicher, dass $\lambda = 0$ auch den Wert $\lambda' = 0$ nach sich zieht. Indem wir jetzt die beiden Integrale (1) und (2), gebildet für $\lambda = 0$ und $\lambda' = 0$ einander gleich setzen, *gewinnen wir nach kurzer Rechnung für die Modulform* E *die Darstellung:*

$$(3) \qquad E_0 = \frac{rB_0}{A_0} \cdot \frac{dA_0}{dr} - r\frac{dB_0}{dr}$$

und berechnen von hier aus die nachfolgenden Anfangsglieder ihrer Potenzreihenentwicklung:

$$(4) \quad E = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^3 \{1 - r - 3r^2 - 3r^3 - 13r^4 - 18r^5 - 27r^6 - 36r^7 - 59r^8 - \cdots\}.$$

Der Ausdruck von E^2 in A und B enthält sieben numerische Coefficienten. Die Entwicklung (4) im Verein mit den Potenzreihen des vorigen Paragraphen wird uns also nicht nur die Bestimmung dieser Coefficienten ermöglichen, sondern liefert uns zugleich auch noch in bekannter Weise die Mittel zur Controlle der berechneten Werte. Es ergiebt sich auf diesem Wege *als algebraische Relation zwischen den drei Modulformen* A, B, E *der Fläche* F_{32}:

$$(5) \quad E^2 = -3A^6 - 2^3A^5B + 2\cdot 3\cdot 11 A^4B^2 - 2\cdot 53 A^3B^3 + 61A^2B^4 - 2\cdot 7AB^5 + B^6.$$

Um ein volles System von Modul*functionen* der Gruppe Γ_{32} zu bilden, werden wir nun einfach die beiden Quotienten:

$$(6) \qquad \tau(\omega) = \frac{A}{B}, \quad \sigma(\omega) = \frac{E}{B^3}$$

neben einander stellen. Der erste von ihnen ergiebt eine *zweiwertige*, der andere eine *sechswertige* Function der Fläche F_{32}; beide sind mit einander verknüpft durch die aus (5) unmittelbar hervorgehende Relation:

$$(7) \quad \sigma^2 + 3\tau^6 + 8\tau^5 - 66\tau^4 + 106\tau^3 - 61\tau^2 + 14\tau - 1 = 0.$$

Gegenüber der Transformation W wird $\tau(\omega)$ unverändert bleiben, während $\sigma(\omega)$ Zeichenwechsel erleidet:

$$(8) \qquad \tau\left(\frac{-1}{31\omega}\right) = \tau(\omega), \quad \sigma\left(\frac{-1}{31\omega}\right) = -\sigma(\omega).$$

Eben deshalb wird bei Ausübung der homogenen Operation W die Modulform E gleichfalls einen Zeichenwechsel erfahren:

$$\mathsf{E}\left(\frac{i\omega_2}{\sqrt{31}}, \frac{\omega_1\sqrt{31}}{i}\right) = -\mathsf{E}(\omega_1, \omega_2). \tag{9}$$

Setzen wir in (7) für σ den Wert 0, so sind die sechs zugehörigen Werte τ diejenigen „singulären Moduln τ", welche im Sinne von p. 185 u. f. zu den zweimal drei ursprünglichen Formclassen der Determinanten $D = -31$ und $D = -124$ gehören. Dieserhalb muss sich nach den früher mitgeteilten Sätzen über die complexe Multiplication der elliptischen Functionen die in Rede stehende ganze Function sechsten Grades von τ in zwei cubische Factoren spalten lassen, deren Coefficienten gleichfalls *rationale* Zahlen sind. Es bestätigt sich dies in der That; denn wir können die Relation (7) in die Gestalt setzen:

$$\sigma^2 + (\tau^3 + 6\tau^2 - 5\tau + 1)(3\tau^3 - 10\tau^2 + 9\tau - 1) = 0. \tag{10}$$

Welcher unter den beiden cubischen Factoren der Determinante $D = -31$ und welcher der Determinante $D = -124$ zugehört, ist leicht entschieden; wir haben in der That die Zuordnung:

$$D = -31, \quad \tau^3 + 6\tau^2 - 5\tau + 1 = 0, \tag{11}$$

$$D = -124, \quad 3\tau^3 - 10\tau^2 + 9\tau - 1 = 0. \tag{12}$$

Jede dieser Gleichungen hat nämlich *eine* reelle Wurzel, den beiden ambigen Formclassen $(1, 1, 8)$ und $(1, 0, 31)$ entsprechend. Dabei liegt der repräsentierende Punkt dieser letzten Form auf der imaginären ω-Axe, woselbst τ, wie man leicht feststellt, reelle positive Werte hat; unter den beiden Gleichungen (11) und (12) hat aber offenbar nur die letztere eine reelle positive Wurzel.

Auch auf die quadratischen Formen der *positiven* Determinante $D = 31$ haben wir hier zufolge der allgemeinen Entwicklungen von p. 169 ff. eine interessante Anwendung. Da müssen wir jene symmetrische Umformung der Fläche F_{32} in sich heranziehen, welche durch Combination der Substitution $\omega' = W(\omega)$ mit der Spiegelung an der imaginären ω-Axe entspringt. Durch σ und τ stellt sich die so gemeinte Operation in der Gestalt dar:

$$\sigma' = -\bar{\sigma}, \quad \tau' = \bar{\tau}, \tag{13}$$

wobei $\bar{\sigma}$ und $\bar{\tau}$ die zu σ und τ conjugiert complexen Werte sind. Nach den l. c. gewonnenen Resultaten besteht also „die auf die Fläche F_{32} übertragene Smith'sche Curve" aus denjenigen Linienzügen dieser Fläche, *welche reelle Werte von τ mit reellen negativen Werten von σ^2 tragen.* Wenn wir F_{32} als zweiblättrige Fläche über der τ-Ebene anordnen, so wird die Lage der Smith'schen Curve besonders übersichtlich. Zwei

unter den sechs Verzweigungspunkten dieser F_2 — wir wollen sie P_1 und P_2 nennen — liegen auf der reellen τ-Axe und teilen dieselbe in zwei Teile, von welchen wir jenen herausgreifen, der den Nullpunkt $\tau = 0$ *nicht* enthält. Etwa von P_1 beginnend durchlaufen wir diese Strecke bis P_2 im oberen Blatte der F_2 und kehren im unteren längs derselben Strecke nach P_1 zurück, um solchergestalt gerade die ganze Smith'sche Curve beschrieben zu haben.

Es ergiebt sich hieraus, dass nur *eine* Classe quadratischer Formen (a, b, c) der Determinante $D = 31$ existiert*). Um die zugehörige Formenperiode aufzustellen, wird man die Smith'sche Curve jetzt rückwärts in das Transformationspolygon F_{32} übertragen. Dabei zerfällt diese Curve in diejenigen sieben das Polygon durchziehenden Kreissegmente, welche durch die Gleichungen:

$$(14)\qquad \begin{cases} 31\,(x^2 + y^2) - 1 = 0, \\ 6 \cdot 31\,(x^2 + y^2) \pm 2 \cdot 31 x + 5 = 0, \\ 10 \cdot 31\,(x^2 + y^2) \pm 2 \cdot 31 x + 3 = 0, \\ 15 \cdot 31\,(x^2 + y^2) \pm 2 \cdot 31 x + 2 = 0 \end{cases}$$

dargestellt sind. Durch die Zuordnung der Randcurven des Polygons F_{32} werden natürlich diese sieben Kreissegmente zu einer geschlossenen Kette vereint. Indem man die fraglichen sieben Kreisbogen in das Polygon wirklich einzeichnet, wird man übrigens gewahr, dass die Formenperiode der einen zu $D = 31$ gehörenden Classe insgesamt 29 reducierte Formen umfasst. Zufolge der Bedeutung der Transformation (13) können wir natürlich die sieben Kreisbogen (14) auch als diejenigen Linienzüge des Polygons F_{32} ansprechen, welche reelle τ und rein imaginäre σ tragen. Dem gegenüber sind dann die Punkte mit reellem τ und *reellem* σ durch die Symmetrielinien der von $\omega' = -\bar{\omega}$ herrührenden Transformation der Fläche F_{32} in sich geliefert.

§ 3. Die Modulformen Z, H der Γ_{32}. Darstellung von Δ, g_2 und J in den Moduln der Γ_{32}.

Die in Formel (10) des vorigen Paragraphen angegebene Zerlegung des Ausdrucks sechsten Grades von τ ist auch in functionentheoretischer Hinsicht von Wichtigkeit. Wir lernen nämlich auf diesem Wege die Modulform $(-4)^{\text{ter}}$ Dimension AE in das Product *der beiden ganzen Modulformen* $(-2)^{\text{ter}}$ *Dimension* Z *und* H:

*) oder aber, wenn man sich so ausdrücken will, zwei mit einander inverse Classen; vgl. oben p. 164.

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathsf{Z}(\omega_1, \omega_2) = \sqrt{\mathsf{AB}^3 - 5\mathsf{A}^2\mathsf{B}^2 + 6\mathsf{A}^3\mathsf{B} + \mathsf{A}^4}, \\ \mathsf{H}(\omega_1, \omega_2) = \sqrt{\mathsf{AB}^3 - 9\mathsf{A}^2\mathsf{B}^2 + 10\mathsf{A}^3\mathsf{B} - 3\mathsf{A}^4} \end{cases}$$

spalten, deren einzelne dem Polygon F_{32} freilich nur erst adjungiert ist. Die Nullpunkte dieser neuen Formen haben im Polygon F_{32} eine sehr charakteristische Lage: Erstlich verschwindet jede von ihnen in den beiden Polygonspitzen je im Grade $\frac{1}{2}$, in den beiden Ausnahmepunkten b aber je im Grade $\frac{3}{2}$; alsdann bleiben sowohl für Z wie H noch drei Nullpunkte über, und dies sind für Z die repräsentierenden Punkte der drei Formclassen $D = -31$, für H diejenigen der drei Formclassen der Determinante $D = -124$.

Als die Anfangsglieder der Potenzreihen für Z und H berechnen wir leicht:

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathsf{Z} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{1}{2}} (1 + * + r^2 + 3r^3 - 3r^4 + 6r^5 + \cdots), \\ \mathsf{H} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{1}{2}} (1 - 2r - 3r^2 - r^3 + r^4 - 6r^5 + \cdots). \end{cases}$$

Andrerseits aber handelt es sich darum, festzustellen, wie sich Z und H bei Ausübung der homogenen Operation W verhalten. Jedenfalls muss dabei eine der beiden Modulformen Z, H das Zeichen wechseln, die andere unverändert bleiben, da ihr Product Zeichenwechsel erleidet, ihre Quadrate aber sich nicht ändern. Dass aber H die Form ist, welche gegenüber W Zeichenwechsel erfährt, folgt einfach aus dem Umstande, dass H auf der imaginären ω-Axe einen einfachen Nullpunkt besitzt, und dass demzufolge die auf der rechten Seite von (2) für H angegebene Potenzreihe $(1 - 2r - \ldots)$ bei Durchlaufung der imaginären ω-Axe einen Zeichenwechsel erfährt; merken wir uns demgemäss die Formeln:

$$(3) \quad \mathsf{Z}\left(\frac{i\omega_2}{\sqrt{31}}, \frac{\omega_1\sqrt{31}}{i}\right) = \mathsf{Z}(\omega_1, \omega_2), \quad \mathsf{H}\left(\frac{i\omega_2}{\sqrt{31}}, \frac{\omega_1\sqrt{31}}{i}\right) = -\mathsf{H}(\omega_1, \omega_2).$$

Die beiden Grössen H, Z werden nun besonders wichtig, wenn wir die Modulform *erster* Stufe Δ durch die Moduln der Γ_{32} ausdrücken wollen. Man knüpfe hierbei an die sechste Wurzel $\sqrt[6]{\Delta}$ der Discriminante, welche durch die homogene Operation W in

$$\sqrt[6]{\Delta'}(\omega_1, \omega_2) = \sqrt[6]{\Delta}\left(\frac{i\omega_2}{\sqrt{31}}, \frac{\omega_1\sqrt{31}}{i}\right)$$

übergehen möge. Da 31 mod. 6 mit 1 congruent ist, so ändert sich $\sqrt[6]{\Delta'}$ bei Ausübung einer Substitution der Γ_{32} um die gleiche Einheitswurzel, wie $\sqrt[6]{\Delta}$; man zeigt dies in der That durch eine elementare Zwischenrechnung, welche an Formel (14) und (17) in I p. 627 an-

zuknüpfen hat. Daraufhin erweisen sich die beiden zweigliedrigen Verbindungen $(\sqrt[6]{\Delta} \pm \sqrt[6]{\Delta'})$ als dem Polygon $F_{(31)}$ adjungierte Modulformen der Dimension -2, und wir wollen nunmehr die Modul*functionen:*

$$(4) \qquad \frac{\sqrt[6]{\Delta} + \sqrt[6]{\Delta'}}{\mathsf{Z}}, \quad \frac{\sqrt[6]{\Delta} - \sqrt[6]{\Delta'}}{\mathsf{H}}$$

auf dem Polygon in Discussion ziehen.

Auf $F_{(31)}$ betrachtet, ist jeder der beiden Zähler (4) von der Wertigkeit $\frac{8}{3}$ und verschwindet in der einen jetzt noch allein in Betracht kommenden Spitze bei $\omega = i\infty$ im Grade $\frac{1}{6}$, so dass noch Nullpunkte in der Gesamtordnung $\frac{5}{2}$ übrig bleiben. Notwendigerweise treten also noch Nullpunkte der Ordnung $\frac{1}{2}$ auf, und diese können offenbar nur in jenen Ecken des Polygons $F_{(31)}$ gelegen sein, welche die Formclassen der Determinanten $D = -31$ und $D = -124$ repräsentieren. Nun aber bemerke man, dass im Ausdruck der Functionen (4) durch τ unmöglich jene irrationalen numerischen Grössen explicite als Coefficienten auftreten können, welche wir im vorigen Paragraphen als singuläre Moduln τ den Determinanten $D = -31$ und -124 zugewiesen haben; denn die Entwicklungscoefficienten in den Potenzreihen nach r sind für *alle* hier in Betracht kommenden Modulformen *rationale* Zahlen, und aus diesen letzteren bestimmen sich die Constanten in den Ausdrücken von (4) durch τ auf *rationalem* Wege. Da nun der erste Zähler (4) bei W unverändert bleibt, während der zweite das Zeichen wechselt, so ist evident, dass $\sqrt[6]{\Delta} + \sqrt[6]{\Delta'}$ in den drei zu $D = -31$ gehörenden Ecken von $F_{(31)}$ je im Grade $\frac{1}{2}$ verschwindet, $\sqrt[6]{\Delta} - \sqrt[6]{\Delta'}$ aber in den drei zu $D = -124$ gehörenden Ecken. Für jede der Functionen (4) bleibt jetzt nur noch *ein* im Innern von $F_{(31)}$ gelegener Nullpunkt, und diesem müssen beide Male Unstetigkeitspunkte in der Gesamtordnung 1 gegenübertreten. Ein solcher von der Ordnung $\frac{1}{3}$ liegt aber bei $\omega = i\infty$, und der rückständige, als von der Ordnung $\frac{2}{3}$, kann jetzt nur noch in dem *einen* Ausnahmepunkte b liegen, welcher für $F_{(31)}$ noch in Betracht kommt.

Nehmen wir auf die Werteverteilung von τ Bezug, so kleidet sich die nun beendete Überlegung ein in den Ansatz:

$$\frac{\sqrt[6]{\Delta} + \sqrt[6]{\Delta'}}{\mathsf{Z}} = \frac{1 + a\tau}{\sqrt[3]{\tau(1 + c\tau)^2}}, \quad \frac{\sqrt[6]{\Delta} - \sqrt[6]{\Delta'}}{\mathsf{H}} = \frac{1 + b\tau}{\sqrt[3]{\tau(1 + c\tau)^2}},$$

wobei insbesondere $\tau = -c^{-1}$ der Wert dieser Modulfunction im Ausnahmepunkte b sein würde. Tragen wir hier statt τ die Formen A, B ein und ziehen ein paar Anfangsterme der Reihenentwicklungen heran, so ergeben sich die numerischen Werte von a, b, c. Wir com-

binieren die entspringenden Formeln sogleich und finden als *Ausdrücke für die sechsten Wurzeln aus der ursprünglichen und transformierten Discriminante:*

$$(5) \qquad \sqrt[6]{\Delta},\ \sqrt[6]{\Delta'} = \frac{\mathsf{Z}(\mathsf{B}-7\mathsf{A}) \pm \mathsf{H}(\mathsf{B}-5\mathsf{A})}{2\sqrt[3]{\mathsf{A}(3\mathsf{A}-\mathsf{B})^2}},$$

wobei sich das obere Zeichen auf $\sqrt[6]{\Delta}$, das untere auf $\sqrt[6]{\Delta'}$ bezieht.

Das gefundene Resultat (5) ist jetzt hinterher noch in anderer Weise einer Bestätigung fähig. Indem wir nämlich die beiden Formeln (5) mit einander multiplicieren, zieht sich das Product der Zähler auf ein einzelnes Glied, nämlich eine Potenz von A zusammen. Wir erhalten nämlich:

$$(6) \qquad \sqrt[24]{\Delta\Delta'} = \frac{\sqrt[4]{31}\cdot\sqrt[3]{\mathsf{A}^4}}{\sqrt[3]{3\mathsf{A}-\mathsf{B}}},$$

und diese Formel ist es, welche wir auch leicht auf directem Wege hätten ableiten können.

Wir setzen nun auch die Modulform g_2 mit den bisher betrachteten A, B etc. in Verbindung. Die Summe $(g_2' + g_2)$ besitzt auf $F_{(31)}$, wie man aus ihrer Wertigkeit schliesst, fünf einfache Nullpunkte und verschwindet überdies im Ausnahmepunkte b im Grade $\frac{1}{3}$. Aber an dieser Stelle verschwindet jede *ganze* Function fünften Grades von A und B in der Ordnung $\frac{5}{3}$ und andererseits $(3\mathsf{A}-\mathsf{B})$ in der Ordnung $\frac{4}{3}$; demgemäss wird $(g_2' + g_2)(3\mathsf{A}-\mathsf{B})$ mit einer ganzen homogenen Function fünften Grades von A und B identisch sein. Durch eine ähnliche Überlegung ergiebt sich $(g_2' - g_2)(3\mathsf{A}-\mathsf{B})$ als Product von E in eine ganze homogene Verbindung zweiten Grades von A und B. Aus den Reihenentwicklungen berechnen wir die Constanten in diesen Ausdrücken 5ten und 2ten Grades von A, B *und finden solcherweise als die gewünschten Darstellungen von* $g_2' \pm g_2$ *die nachfolgenden:*

$$(7) \qquad \begin{cases} \qquad\qquad 6(g_2' + g_2)(\mathsf{B}-3\mathsf{A}) = \\ 13\cdot 37\mathsf{B}^5 - 5171\mathsf{B}^4\mathsf{A} + 2^5\cdot 5\cdot 11^2\mathsf{B}^3\mathsf{A}^2 - 2^4\cdot 23\cdot 83\mathsf{B}^2\mathsf{A}^3 \\ \qquad + 2^4\cdot 3^2\cdot 131\mathsf{B}\mathsf{A}^4 - 2^5\cdot 5\cdot 23\mathsf{A}^5, \\ (g_2' - g_2)(\mathsf{B}-3\mathsf{A}) = 2^2\cdot 5\cdot \mathsf{E}(2^2\mathsf{B}^2 - 17\mathsf{A}\mathsf{B} + 2^4\mathsf{A}^2), \end{cases}$$

aus denen sich nun wieder ohne weiteres die Formeln für g_2 und g_2', einzeln genommen, ergeben.

Die bisher gewonnenen Resultate genügen bereits, um J im Modulsystem der Γ_{32} darzustellen. *Wir finden in der That nach elementarer Zwischenrechnung als Ausdruck von J in den beiden für die Γ_{32} zu Grunde gelegten Functionen σ und τ:*

$$(8)\begin{cases} 6^3 J\tau\{(13\tau^5-280\tau^4+328\tau^3-125\tau^2+19\tau-1)-\sigma(35\tau^2-12\tau+1)\}^2 \\ \qquad = \{(3680\tau^5-18864\tau^4+30588\tau^3-19360\tau^2+5171\tau-481) \\ \qquad\qquad -120\cdot\sigma\cdot(16\tau^2-17\tau+4)\}^3(1-3\tau). \end{cases}$$

Der Ausdruck für die transformierte Grösse $J(31\omega)$ entspringt aus (8) einfach dadurch, dass wir bei unverändertem τ das Zeichen von σ wechseln; beide Gleichungen im Verein mit (7) p. 450 bilden uns dann im bekannten Sinne ein Äquivalent für die zu $n = 31$ gehörende Modulargleichung erster Stufe.

Bei einer vollständigen Behandlung der Transformation 31ter Ordnung würde sich nunmehr die Discussion der einfachsten *formentheoretischen Resolventen* 32sten *Grades* anschliessen. Hier gewinnen wir offenbar die denkbar einfachste Gleichung, wenn wir das Quadrat der Modulform A zur Unbekannten x setzen. Da nämlich A und also auch die mit A gleichberechtigten Moduln in den Polygonspitzen durchgehends verschwinden, so werden die Coefficienten der zugehörigen Resolvente solche ganze Modulformen erster Stufe sein, die alle den Factor Δ aufweisen. Die fragliche Resolvente hat demnach die Gestalt:

$$(9)\qquad x^{32} + a\cdot\Delta x^{26} + b\cdot g_2\Delta x^{24} + c\cdot g_3\Delta x^{23} + d\cdot g_2^2\Delta x^{22} + \cdots = 0.$$

Die vollständige Berechnung dieser Gleichung bietet natürlich keine principielle Schwierigkeit; doch müssen wir davon absehen, da die zu diesem Ende durchzuführenden numerischen Rechnungen zu umfänglich sind.

Immerhin ist es wichtig, auf die Gleichung (9) hingewiesen zu haben, weil wir hier *nicht* mit jener formentheoretischen Transformationsgleichung zu thun haben, deren allgemeine Theorie wir oben (p. 72 u. f.) entwarfen. Diese letztere Gleichung hat vielmehr hier bei $n = 31$ das Quadrat der Modulform:

$$(10)\qquad \sqrt[24]{\Delta\,\Delta^5} = \frac{\mathsf{A}\mathsf{Z}(\mathsf{B}-7\mathsf{A})-\mathsf{A}\mathsf{H}(\mathsf{B}-5\mathsf{A})}{2(3\mathsf{A}-\mathsf{B})}$$

zur Wurzel, und dieses Quadrat gehört bereits zur Dimension -6, ist also weniger einfach, als die Wurzel von (9). Die gleichen Verhältnisse treffen wir übrigens bei allen Primzahlordnungen n an, die nicht mit 11 (mod. 12) congruent sind. In all' diesen Fällen weist eben das Polygon F_{n+1} Ausnahmepunkte a bez. b auf, und die zugehörigen Modulformen $(-1)^{\text{ter}}$ und $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension, welche sich doch allererst zur Bildung formentheoretischer Resolventen empfehlen, müssen in diesen Ausnahmepunkten feste Nullpunkte aufweisen. Von den Wurzeln der Multiplicatorgleichungen des vorigen Abschnitts gilt dies aber nicht, dieselben sind vielmehr innerhalb der ω-Halbebene allenthalben von Null verschieden. Hierin haben wir denn auch den

Grund zu sehen, warum wir l. c. bei den Multiplicatorgleichungen erster Stufe eine vierfache Fallunterscheidung für die Primzahlordnung n nach dem Zahlmodul 12 zu treffen hatten.

§ 4. Die zu $n = 35$ gehörende Fläche F_{48} und ihr einfachstes Modulsystem.

Um wenigstens an einem Beispiele den Charakter zusammengesetzter n zu erläutern, besprechen wir jetzt weiter die Ordnung $n = 35$. Da $\psi(35) = 48$ ist, so wird das Transformationspolygon 48 Doppeldreiecke umfassen, deren Anordnung nach den allgemeinen Sätzen von p. 50 ff. in Erfahrung zu bringen ist. Wir haben insbesondere als Verzweigung der über der J-Ebene gelagerten Riemann'schen Fläche F_{48}: *Bei $J = 0$ hängen die 48 Blätter zu je drei in 16 Verzweigungspunkten zusammen; bei $J = 1$ hängen sie zu je zwei in 24 Verzweigungspunkten zusammen; endlich haben wir vier Punkte der Fläche mit $J = \infty$, die wir als c_1, c_2, c_3 und c_4 bezeichnen mögen: im Verzweigungspunkt c_1 hängen 35 Blätter der Fläche cyclisch zusammen, bei c_2 deren sieben, bei c_3 fünf, während endlich ein letztes Blatt, welches c_4 trägt, bei $J = \infty$ isoliert verläuft.* Man bestimmt hieraus leicht $p = 3$ als das Geschlecht der Fläche F_{48}.

Es ist nun Γ_{48} als Untergruppe vom Index 6 in der zu $n = 7$ gehörenden Gruppe Γ_8 enthalten, deren Fundamentalpolygon in I p. 742 dargestellt ist. Auch die aus diesem Polygon durch Deformation entspringende einfach bedeckte Ebene mit ihren sechzehn Bereichen ist l. c. in Fig. 105 graphisch dargestellt, und es muss nun möglich sein, durch sechsfache Überlagerung dieser Ebene F_8 unter charakteristischer Verzweigung unsere Riemann'sche Fläche F_{48} herzustellen. Wie diese Verzweigung beschaffen ist, wird man leicht feststellen. In der That werden Verzweigungspunkte nur eintreten erstlich in den beiden Punkten c der Ebene F_8, wo der seinerzeit zu Grunde gelegte Hauptmodul τ die Werte 0 und ∞ annimmt, zweitens aber in den beiden Ausnahmepunkten b von F_8, woselbst τ die beiden Werte $\frac{-13 \pm 3i\sqrt{3}}{2}$ annimmt (cf. (12) p. 61). *Sowohl bei $\tau = 0$ wie bei $\tau = \infty$ verläuft je ein Blatt der sechsblättrigen Fläche isoliert, während jeweils die fünf übrigen cyclisch zusammenhängen; an den beiden Stellen $\tau = \frac{-13 \pm 3i\sqrt{3}}{2}$ hängen endlich die Blätter zu dreien in zweimal zwei Verzweigungspunkten zusammen.* Die Angabe $p = 3$ findet man von hier aus bestätigt.

Endlich ist Γ_{48} als Untergruppe des Index 8 in der zu $n = 5$ gehörenden Gruppe Γ_6 enthalten, deren Polygon man in den beiden

charakteristischen Gestalten in I p. 635 vorfindet. Durch achtfache Überdeckung der Ebene F_6 wird man demnach F_{48} herstellen können, und dabei finden sich Verzweigungen wieder nur in den beiden Punkten c, sowie in den beiden Ausnahmepunkten a, welche das Polygon F_6 aufweist; in jenen Punkten nimmt der zugehörende Hauptmodul τ die Werte 0, ∞ an, in diesen aber zufolge (11) p. 61 die Werte $-11 \pm 2i$. Man findet nun durch eine leichte Betrachtung: *Bei $\tau = 0$ und $\tau = \infty$ verläuft je ein Blatt der achtblättrigen Fläche isoliert, während die sieben andern jeweils cyclisch zusammenhängen; an den beiden Stellen $\tau = -11 \pm 2i$ ordnen sich die Blätter zu Paaren in zweimal vier Verzweigungspunkte zusammen.* Diese Angaben bestätigen das Geschlecht $p = 3$ der F_{48} aufs neue.

Man wolle nunmehr der Gruppe Γ_{48} die zu $n = 35$ gehörende Operation W zusetzen und benenne die solchergestalt erweiterte Gruppe nach Analogie der früheren Bezeichnungsweise durch $\Gamma_{(35)}$. Die vier Punkte c des Polygon F_{48} werden durch W zu Paaren permutiert, und zwar vertauschen sich c_1 und c_4 einerseits und c_2 und c_3 andrerseits. *Das durch Hälftung von F_{48} entspringende Polygon $F_{(35)}$ wird demgemäss noch zwei Spitzen c aufweisen*, ein Umstand, auf welchen wir sogleich zurückkommen. Die Fixpunkte von W auf F_{48}, d. h. die im Innern der ω-Halbebene gelegenen Ecken des Polygons $F_{(35)}$, entsprechen natürlich wieder den Formclassen der Determinanten $D = -35$ und $D = -140$. In diesem Betracht haben wir uns folgende reducierte Formen anzumerken:

$$D = -35, \quad (1, 1, 9), \quad (3, \pm 1, 3),$$
$$D = -140, \quad (1, 0, 35), \quad (3, \pm 2, 12), \quad (4, \pm 2, 9).$$

Hierbei haben wir die beiden Formen $(3, \pm 1, 3)$ besonders zu zählen, obwohl sie einander äquivalent sind und im Sinne von I p. 250 nur die erste reduciert sein würde. Indessen müssen wir die bez. Untersuchungen von p. 189 dahingehend ergänzen, dass bei jenen Abzählungen die ambigen Classen in der Regel doppelt zu zählen sind*); im vorliegenden Falle ist in der That jede der beiden Formen $(3, \pm 1, 3)$ als reduciert zu zählen. Indem hiernach W im Polygon F_{48} acht Fixpunkte aufweist, wird F_{48} als zweiblättrig überdeckte Fläche $F_{(35)}$ mit

---

*) Man wolle bei der fraglichen Abzählung eine ambige Classe stets und nur dann einfach zählen, wenn ihr in das Transformationspolygon übertragener repräsentierender Punkt auf einer Symmetrielinie der Operation A gelegen ist. In allen übrigen Fällen liefert die auf F_ψ übertragene Smith'sche Curve *zwei* zu jener ambigen Classe gehörende Schnittpunkte mit Dreiecksseiten der Einteilung von F_ψ; vgl. hier überall die ausführlichen Darlegungen p. 187 ff.

acht Verzweigungspunkten vorgestellt werden können. Umgekehrt folgt hieraus sofort, *dass das Polygon* $F_{(35)}$ *zum Geschlechte* $p = 0$ *gehört, und dass demgemäss die Fläche* $F_{(48)}$ *eine hyperelliptische ist.* Hiermit ist für die functionentheoretische Behandlung des Falles $n = 35$ der Weg gewiesen.

Die besonders leichte Zugänglichkeit zusammengesetzter Ordnungen n bewährt sich im vorliegenden Falle $n = 35$ dadurch, dass wir hier gar nicht auf die allgemeinen Ansätze von Kap. 3 zurückzugreifen brauchen, vielmehr mit den transformierten Werten der Discriminante bereits zum Ziele kommen. Man bilde sich nämlich den Ausdruck:

$$(1) \qquad \frac{\Delta\left(\sqrt{5}\,\omega_1, \frac{\omega_2}{\sqrt{5}}\right)\cdot\Delta\left(\sqrt{7}\,\omega_1, \frac{\omega_2}{\sqrt{7}}\right)}{\Delta\left(\sqrt{35}\,\omega_1, \frac{\omega_2}{\sqrt{35}}\right)\cdot\Delta(\omega_1, \omega_2)};$$

derselbe gehört nicht nur zur Γ_{48}, sondern geht auch bei der Operation:

$$(2) \qquad (W) \qquad \omega_1' = \frac{i\omega_2}{\sqrt{35}}, \qquad \omega_2' = \frac{\omega_1\sqrt{35}}{i}$$

in sich selbst über, stellt also eine zur $\Gamma_{(35)}$ gehörende Modulfunction dar. Aber diese letztere kann höchstens in den beiden Polygonspitzen c verschwinden oder unendlich werden, und thatsächlich wird (1) bei $\omega = i\infty$ zufolge leichter Rechnung mit r^{-24} proportional. *Demzufolge stellt die* 24ste *Wurzel des Ausdrucks* (1) *einen Hauptmodul der Gruppe* $\Gamma_{(35)}$ *dar, welcher bei* $\omega = i\infty$ *seinen Unstetigkeitspunkt, in der anderen Polygonspitze aber seinen Nullpunkt aufweist*)*.

Um mit leicht zugänglichen Modulformen zu thun zu haben, schreiben wir etwa:

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathsf{A}(\omega_1, \omega_2) = \sqrt[24]{\Delta}\,(5\,\omega_1, \omega_2)\cdot\sqrt[24]{\Delta}\,7\,\omega_1, \omega_2), \\ \mathsf{B}(\omega_1, \omega_2) = \sqrt[24]{\Delta}\,(35\,\omega_1, \omega_2)\cdot\sqrt[24]{\Delta}\,(\omega_1, \omega_2) \end{cases}$$

und fixieren den Hauptmodul $\tau(\omega)$ der Gruppe $\Gamma_{(35)}$ in der Gestalt:

$$(4) \qquad \tau(\omega) = \frac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}.$$

Als Anfangsglieder der Reihenentwicklungen für A und B berechnet man von (6) p. 375 aus ohne Mühe:

$$(5) \qquad \begin{cases} \mathsf{A} = \frac{2\pi}{\omega_2}\,r^{\frac{1}{2}}\,(1 - r^5 - r^7 - r^{10} + r^{12} + \cdots), \\ \mathsf{B} = \frac{2\pi}{\omega_2}\,r^{\frac{3}{2}}(1 - r - r^2 + r^5 + r^7 - r^{12} + \cdots). \end{cases}$$

---

*) Ausdrücke der Art (1) sind es, von denen Hr. Kiepert in seinen wiederholt genannten Arbeiten einen ausgedehnten Gebrauch macht; über den vorliegenden Fall $n = 35$ vgl. man insbesondere Math. Ann. Bd. 37 p. 395.

Jede dieser Modulformen ist auf $F_{(35)}$ von der Wertigkeit *zwei*; A weist in der Spitze bei $\omega = i\infty$ einen Nullpunkt der Ordnung $\frac{1}{2}$ auf, in der anderen Spitze aber einen solchen der Ordnung $\frac{3}{2}$; B verhält sich gerade umgekehrt. Wie man leicht bestätigt, bleiben beide Formen gegenüber der homogenen Operation W unverändert.

Die Ergänzung der A, B zu einem vollen Modulsystem der Γ_{48} geschehe nun in gewohnter Weise durch Verwertung der überall endlichen Integrale der Γ_{48}. Es sei $f(\mathsf{A}, \mathsf{B})$ diejenige homogene Verbindung achten Grades von A und B, welche auf F_{48} in den acht Fixpunkten von W je doppelt zu Null wird. Dann schreibe man:

$$(6) \qquad \mathsf{E}(\omega_1, \omega_2) = \sqrt{f(\mathsf{A}, \mathsf{B})}$$

und beweise, dass die beiden Integrale:

$$\int \mathsf{A}^2 \cdot (\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1), \quad \int \frac{\mathsf{A}_0 d\mathsf{B}_0 - \mathsf{B}_0 d\mathsf{A}_0}{\mathsf{E}_0} \cdot \mathsf{A}_0^2$$

bis auf einen Factor mit einander übereinstimmen müssen; im zweiten Integrale sind die Benennungen A_0 etc. im früheren Sinne (p. 450) gebraucht. Es ergiebt sich für E die Darstellung:

$$\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^4 \mathsf{E} = c \cdot \frac{\mathsf{A}_0 d\mathsf{B}_0 - \mathsf{B}_0 d\mathsf{A}_0}{d\omega},$$

und wir berechnen insbesondere als Anfangsglieder für die Potenzentwicklung der so gewonnenen Modulform:

$$(7) \quad \mathsf{E} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 r^2(1 - 2r - 3r^2 + 10r^5 - 3r^6 + 12r^7 - 5r^8 - 4r^9 + 8r^{10} + \cdots).$$

Die Modulform E wechselt gegenüber der Operation W das Vorzeichen und besitzt, auf dem Polygon $F_{(35)}$ gemessen, die Wertigkeit 8; es finden sich in der That acht Nullpunkte, je von der Ordnung $\frac{1}{2}$, auf $F_{(35)}$ in den acht im Innern der ω-Halbebene gelegenen Ecken dieses Polygons, ausserdem aber in den beiden Spitzen von $F_{(35)}$ je ein Nullpunkt der Ordnung 2.

Die ausführliche Berechnung des Ausdrucks $f(\mathsf{A}, \mathsf{B})$ geschieht jetzt in der gewöhnlichen Art durch Einsetzen der Reihenentwicklungen (5) und (7). *Man findet solchergestalt als hyperelliptische Relation des Geschlechtes $p = 3$ zwischen* A, B *und* E:

$$(8) \quad \mathsf{E}^2 = \mathsf{A}^8 - 4\mathsf{A}^7\mathsf{B} - 6\mathsf{A}^6\mathsf{B}^2 - 4\mathsf{A}^5\mathsf{B}^3 - 9\mathsf{A}^4\mathsf{B}^4 + 4\mathsf{A}^3\mathsf{B}^5 - 6\mathsf{A}^2\mathsf{B}^6 + 4\mathsf{A}\mathsf{B}^7 + \mathsf{B}^8.$$

Für die nicht-homogene Schreibweise benutzen wir wie früher die Bezeichnungen:

$$(9) \qquad \frac{\mathsf{E}}{\mathsf{B}^4} = \sigma(\omega), \quad \frac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}} = \tau(\omega).$$

Das in σ und τ gegebene volle System von Modulfunctionen der Γ_{48} ist alsdann der folgenden algebraischen Relation unterworfen:

$$(10)\quad \sigma^2 = \tau^8 - 4\tau^7 - 6\tau^6 - 4\tau^5 - 9\tau^4 + 4\tau^3 - 6\tau^2 + 4\tau + 1.$$

§ 5. Darstellung der Hauptmoduln der zu $n = 7$ und $n = 5$ gehörenden Gruppen Γ_8 und Γ_6 durch die Moduln der zu $n = 35$ gehörigen Γ_{48}.

Das Transformationspolygon F_{48} hatten wir zu Beginn des vorigen Paragraphen in zwei Riemann'sche Flächen verwandelt, von denen die eine *sechsblättrig*, die andere *achtblättrig* über einer Ebene gelagert war; beide Male wurden auch die Verzweigungspunkte nach Art und Lage angegeben. Wir werden jetzt hinterher die algebraischen Functionen kennen lernen wollen, welche gerade diese beiden charakteristischen Abbildungen des Polygons F_{48} leisten, und haben zu diesem Ende die rationalen Ausdrücke der fraglichen Functionen in σ und τ abzuleiten.

Als Functionen von ω betrachtet sind natürlich diese beiden Grössen die Hauptmoduln jener beiden Untergruppen Γ_8 und Γ_6, welche der Transformation der Ordnung $n = 7$ bez. $n = 5$ zu Grunde liegen. Um Verwechslungen mit dem im vorigen Paragraphen unter (4) eingeführten Modul $\tau(\omega)$ zu meiden, nennen wir die Hauptmoduln der Γ_8 bez. Γ_6 etwa $x(\omega)$ und $z(\omega)$ und lesen vorab von p. 61 als Beziehungen von x und z zu J die folgenden ab:

$$(1)\quad \begin{cases} J:J-1:1=(x^2+13x+49)(x^2+5x+1)^3 \\ \qquad\qquad :(x^4+14x^3+63x^2+70x-7)^2:1728x, \\ J:J-1:1=(z^2+10z+5)^3:(z^2+22z+125)(z^2+4z-1)^2:1728z. \end{cases}$$

Wenn man will, kann man die hiermit eingeführten x, z als volles Modulsystem der Γ_{48} annehmen, wobei alsdann zwischen beiden Grössen die Relation des Geschlechtes $p = 3$ besteht:

$$(2)\quad z(x^2+13x+49)(x^2+5x+1)^3 - x(z^2+10z+5)^3 = 0.$$

Im Anschluss hieran können wir es geradezu als die von uns zu lösende Aufgabe angeben, dass wir die rationale Transformation:

$$(3)\qquad x = R_1(\sigma, \tau), \quad z = R_2(\sigma, \tau)$$

aufstellen sollen, durch welche die Relation (2) in die hyperelliptische Normalform (10) des vorigen Paragraphen übergeht.

Das eben bezeichnete Problem lösen wir nun wieder durch formentheoretische Betrachtungen, bei denen wir die Darstellungen (5) p. 64 von x und z verwerten.

Gehen x und z durch Ausübung der Operation W in x' und z' über, so haben wir erstlich für x:

$$(4)\qquad x = 7\sqrt[6]{\frac{\Delta\left(\sqrt{7}\,\omega_1, \frac{\omega_2}{\sqrt{7}}\right)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)}}, \qquad x' = 7\sqrt[6]{\frac{\Delta\left(\sqrt{5}\,\omega_1, \frac{\omega_2}{\sqrt{5}}\right)}{\Delta\left(\sqrt{35}\,\omega_1, \frac{\omega_2}{\sqrt{35}}\right)}}.$$

Das Product dieser beiden Ausdrücke führt nach den Formeln des vorigen Paragraphen direct auf:

$$(5)\qquad xx' = 49\tau^4(\omega).$$

Andrerseits berechne man für die Differenz der x, x' den Ausdruck:

$$(6)\qquad \frac{(x'-x)\,\mathsf{B}^4}{\mathsf{E}} = \frac{x'-x}{\sigma} =$$

$$= \frac{\sqrt[6]{\Delta}\left(\sqrt{7}\,\omega_1, \frac{\omega_2}{\sqrt{7}}\right)\cdot\sqrt[6]{\Delta}\left(\sqrt{35}\,\omega_1, \frac{\omega_2}{\sqrt{35}}\right) - \sqrt[6]{\Delta}\left(\sqrt{5}\,\omega_1, \frac{\omega_2}{\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[6]{\Delta}(\omega_1, \omega_2)}{5\,\mathsf{E}(\omega_1, \omega_2)}$$

und unterziehe nun den hier rechter Hand stehenden Quotienten auf dem Polygon $F_{(35)}$ einer formentheoretischen Discussion. Dieser Quotient gehört nicht nur zur Γ_{48}, sondern bleibt auch gegenüber W unverändert und stellt demgemäss eine rationale Function von $\tau(\omega)$ dar. Der Zähler des fraglichen Quotienten (wie auch der Nenner) hat auf $F_{(35)}$ die Wertigkeit 8, und zwar liegen zwei Nullpunkte der Ordnung 1 in den beiden Spitzen, acht weitere Nullpunkte jeweils von der Ordnung $\frac{1}{2}$ in den acht im Innern der Halbebene gelegenen Ecken von $F_{(35)}$. Unter Rücksicht auf das Verhalten von E schliesst man von hier aus auf den Ansatz:

$$\frac{x'-x}{\sigma} = \frac{a\tau^2 + b\tau + c}{\tau}$$

und findet bei Gelegenheit der üblichen Bestimmung von a, b, c eine Bestätigung der vollzogenen Schlussweise; es ergiebt sich

$$(7)\qquad x' - x = \frac{\sigma(\tau^2 - 3\tau - 1)}{\tau}.$$

Wenn wir jetzt (5) und (7) zur Berechnung von x und x' vereinen, so muss sich die dabei auftretende Quadratwurzel durch σ und τ rational darstellen lassen. Dem ist in der That so, und wir erhalten nach elementarer Zwischenrechnung als *rationale Ausdrücke von x und x' in σ und τ*:

$$(8)\qquad x, x' = \frac{\tau^6 - 5\tau^5 + 5\tau^3 - 5\tau - 1 \mp \sigma(\tau^2 - 3\tau - 1)}{2\tau}.$$

Die Behandlung des Hauptmoduls z geschieht nach einer durchaus analogen Methode. Man knüpfe hier an die Darstellungen an:

$$(9)\quad z = 5\sqrt{5}\sqrt[4]{\frac{\Delta\left(\sqrt{5}\,\omega_1, \frac{\omega_2}{\sqrt{5}}\right)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)}}, \quad z' = 5\sqrt{5}\sqrt[4]{\frac{\Delta\left(\sqrt{7}\,\omega_1, \frac{\omega_2}{\sqrt{7}}\right)}{\Delta\left(\sqrt{35}\,\omega_1, \frac{\omega_2}{\sqrt{35}}\right)}},$$

aus denen sich einerseits unmittelbar die Formel:

$$(10)\qquad z'z = 125\tau^6$$

ergiebt, sowie andrerseits vermöge einer kurzen formentheoretischen Discussion der Ansatz:

$$\frac{z'-z}{\sigma} = \frac{A^5 + aA^4B + bA^3B^2 + cA^2B^3 + dAB^4 + eB^5}{A^2B^3}.$$

Die in der letzten Gleichung rechter Hand enthaltenen numerischen Coefficienten werden in der bekannten Weise ausgewertet und führen *für z und z' auf die Darstellungen:*

$$(11)\quad z, z' = \frac{(\tau^8 - 7\tau^7 + 7\tau^6 + 14\tau^5 + 14\tau^3 - 7\tau^2 - 7\tau - 1) \mp \sigma(\tau^4 - 5\tau^3 + 2\tau^2 + 5\tau + 1)}{2\tau}.$$

Durch (8) und (11) ist nun in der That die rationale Transformation angegeben, durch welche die hyperelliptische Relation (2) in die Normalgestalt $f(\sigma, \tau) = 0$ übergeführt wird. Auf der andern Seite kann man jetzt auf zweierlei Weise *den rationalen Ausdruck von J (und J') durch das Modulsystem σ, τ* bilden; man wird zu diesem Ende entweder den Ausdruck (8) von x in die erste Gleichung (1) einsetzen, oder aber den Ausdruck (11) von z in die zweite Gleichung (1). Beide so entspringenden Darstellungen von J sind alsdann vermöge der zwischen σ und τ bestehenden Relation in einander überführbar. Doch sehen wir von der Durchführung dieser Rechnung hier ab.

§ 6. Das zu $n = 47$ gehörende Transformationspolygon F_{48} und seine Modulformen $(-1)^{\text{ter}}$ und $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension.

Über $n = 35$ hinaus berücksichtigen wir nur noch die Primzahlordnungen n und unter ihnen einzig diejenigen der Form $n = 4h + 3$, weil uns für diese Fälle die analytischen Ansätze von Kapitel 3 im reichhaltigeren Maasse Hülfsmittel zur Verfügung stellen, als für $n = 4h + 1$. Der nächste zu discutierende Fall würde hiernach $n = 43$ sein, dessen Riemann'sche Fläche F_{44} zum Geschlechte $p = 3$ gehört. Die Classenanzahl der Formen für $D = -43$ und $D = -172$ aber ist vier, und eben dieserhalb wird die Riemann'sche Fläche $F_{(43)}$, welche durch die bekannte Hälftung des Polygons F_{44} entspringt, zum Geschlechte $p = 1$ gehören müssen. Die Fläche $p = 3$ ist also nicht mehr hyperelliptisch. Es liegt in diesen Verhältnissen eine doppelte

Complication begründet: erstlich sind selbstverständlich die Modulfunctionen einer Fläche $p = 1$ einer directen functionentheoretischen Betrachtung schwieriger zugänglich als diejenigen einer Fläche $p = 0$; andrerseits gewinnen wir, da es nur *eine* Formclasse für $D = -43$ giebt, vom Ansatz (2) p. 355 auch nur eine einzige Modulform $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension A_0. Nun könnte man freilich auch noch die übrigen Ansätze des Kap. 3 für $n = 43$ specialisieren, sowie namentlich auch die beiden Formen:

$$\sqrt[8]{\Delta}\left(\sqrt{43}\,\omega_1, \frac{\omega_2}{\sqrt{43}}\right) \pm \sqrt[8]{\Delta}\,(\omega_1, \omega_2)$$

heranholen. Aber man kann doch, um von hier aus *alle drei* Functionen φ der Fläche F_{44} des Geschlechtes $p = 3$ zu gewinnen, wie es scheint, umständlichen formentheoretischen Betrachtungen nicht aus dem Wege gehen. Wir wenden uns bei dieser Sachlage sofort zum Falle $n = 47$, dessen Behandlung sich derjenigen von $n = 31$ ganz analog gestalten lässt.

Die zu $n = 47$ gehörende Fläche F_{48} weist die für Primzahlen n der Gestalt $n = 12h - 1$ überhaupt charakteristische Verzweigung auf: *Bei $J = \infty$ verläuft ein Blatt isoliert, die 47 übrigen hängen im Cyclus zusammen, bei $J = 0$ hängen die 48 Blätter zu dreien in 16, bei $J = 1$ zu zweien in 24 Verzweigungspunkten zusammen. Die Fläche F_{48} weist daraufhin das Geschlecht $p = 4$ auf.*

Ferner haben wir die Ergebnisse: Die reducierten Formen der Determinanten $D = -47$ und $D = -188$ sind:

$$(1)\quad \begin{cases} D = -47, & (1, 1, 12),\ (2, \pm 1, 6),\ (3, \pm 1, 4), \\ D = -4\cdot 47, & (1, 0, 47),\ (3, \pm 2, 16),\ (7, \pm 6, 8). \end{cases}$$

Die Transformation W der Fläche F_{48} in sich besitzt auf derselben hiernach zehn Fixpunkte*), und also ist wiederum eine unmittelbare Folge: *Die Gruppe $\Gamma_{(47)}$, welche aus Γ_{48} durch Zusatz von W entspringt, gehört zum Geschlechte $p = 0$, so dass F_{48} eine hyperelliptische Fläche ist.* Wir werden dieses Resultat sogleich auf functionentheoretischem Wege bestätigt sehen.

Da sich unter den fünf Formclassen der Determinante $D = -47$ eine ambige findet, so liefert der allgemeine Ansatz (2) p. 355 für gegenwärtigen Fall $n = 47$ im ganzen *drei* Modulformen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension, die wir der Gewohnheit halber durch B, B', B'' bezeichnen. Ihr analytisches Bildungsgesetz spricht sich am einfachsten in der nachfolgenden Gestalt aus:

*) Wie man leicht nachweist, sind die ambigen Classen (1) hier je einfach zu zählen.

$$(2)\quad \begin{cases} \mathsf{B}\;(\omega_1, \omega_2) = \frac{2\pi}{\omega_2}\sum r^{\frac{x^2+47y^2}{4}}, & x \equiv y \pmod{2}, \\ \mathsf{B}'\;(\omega_1, \omega_2) = \frac{2\pi}{\omega_2}\sum r^{\frac{x^2+47y^2}{8}}, & x \equiv y \pmod{4}, \\ \mathsf{B}''(\omega_1, \omega_2) = \frac{2\pi}{\omega_2}\sum r^{\frac{x^2+47y^2}{12}}, & x \equiv y \pmod{6}. \end{cases}$$

Indessen eignet es sich für die Rechnungen noch mehr, statt dieser drei Formen die nachfolgenden drei Combinationen derselben zu gebrauchen:

$$(3)\qquad \mathsf{B}_0 = \frac{\mathsf{B} + \mathsf{B}''}{2},\quad \mathsf{B}_1 = \frac{\mathsf{B} - \mathsf{B}''}{2},\quad \mathsf{B}_2 = \frac{\mathsf{B}' - \mathsf{B}''}{2};$$

die Anfangsglieder der Potenzentwicklungen der so eingeführten Modulformen sind:

$$(4)\quad \begin{cases} \mathsf{B}_0 = \frac{2\pi}{\omega_2}(1 + r + r^3 + 2r^6 + r^7 + r^8 + r^9 + r^{12} + 3r^{14} + \cdots), \\ \mathsf{B}_1 = \frac{2\pi}{\omega_2}(r - r^3 - r^6 - r^8 + r^9 + r^{12} + r^{14} + \cdots), \\ \mathsf{B}_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}(r^2 - r^3 - r^4 + r^7 + r^9 - r^{14} + \cdots). \end{cases}$$

Eine Modulform der Dimension -1 hat auf F_{48} die Wertigkeit 4. Da die drei Formen B aber offenbar von einander linear-unabhängig sind und andrerseits, wie man aus (4) leicht ins einzelne nachweist, gemeinsame Nullpunkte auf F_{48} nicht aufweisen, so wird die Verbindung:

$$(5)\qquad \varkappa\mathsf{B}_0 + \lambda\mathsf{B}_1 + \mu\mathsf{B}_2$$

auf F_{48} zweifach unendlich viele Systeme von je vier beweglichen Nullpunkten festlegen. Durch Anwendung der in I p. 559 ff. entwickelten allgemeinen Principien folgt hieraus unmittelbar: *Setzt man die B zu homogenen Coordinaten der Ebene, so erscheint in dieser letzteren das Polygon F_{48} eindeutig bezogen auf eine Curve vierter Ordnung.* Aber eine eigentliche ebene Curve vierter Ordnung kann höchstens das Geschlecht $p = 3$ aufweisen, nämlich in dem Falle, dass sie keine singulären Punkte besitzt. Unsere C_4 der B hat jedoch das Geschlecht $p = 4$; *sie muss demnach notwendig eine doppelt-überdeckte C_2 sein und wird, um als solche dem Geschlechte $p = 4$ anzugehören, zehn Verzweigungspunkte aufweisen müssen.* Der hyperelliptische Charakter der Fläche F_{48} ist solchergestalt aufs neue zur Evidenz gebracht.

Man kann übrigens ganz direct den Beweis führen, dass zwischen den drei Moduln B eine quadratische Relation identisch besteht. Unter den sechs quadratischen Verbindungen der B verschwinden nämlich die fünf:

$$(6) \qquad B_0B_1, \quad B_0B_2, \quad B_1^2, \quad B_1B_2, \quad B_2^2$$

in den Polygonspitzen; diese also liefern, mit dem Differential $(\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1)$ multipliciert und integriert, fünf überall endliche Integrale der Fläche F_{48}. Aber die letztere ist vom Geschlechte $p = 4$, und also besteht zwischen den Grössen (6) eine lineare Identität. Um die Gestalt der letzteren zu erfahren, addieren wir die fünf Verbindungen (6), mit unbestimmten Coefficienten versehen, zu einander und entwickeln den solchergestalt gewonnenen Ausdruck nach ansteigenden Potenzen von r. Jene unbestimmten Coefficienten lassen sich alsdann nur in einer Weise so wählen, dass die Coefficienten dieser letzteren Potenzentwicklung nach r insgesamt mit Null identisch werden. *Die hiermit skizzierte Rechnung liefert als Gestalt der in Rede stehenden quadratischen Relation zwischen den drei Moduln* B:

$$(7) \qquad B_1^2 - B_0B_2 = 0;$$

wir werden dieselbe geometrisch als einen Kegelschnitt deuten, der auf das Polygon $F_{(48)}$ der Gruppe $\Gamma_{(48)}$ eindeutig bezogen ist. Die Gestalt der Relation (7) wird nun gleich weiter bei der Bildung eines vollen Modulsystems der Gruppe Γ_{48} massgeblich werden.

§ 7. Das volle Modulsystem der Γ_{48} und die zugehörige hyperelliptische Relation zehnten Grades.

Da die Riemann'sche Fläche F_{48} hyperelliptisch ist, so giebt es auf derselben *zweiwertige* Functionen, und wir wählen unter ihnen insbesondere die nachfolgende:

$$(1) \qquad \tau(\omega) = \frac{B_2}{B_1} = \frac{B_1}{B_0}$$

zum Gebrauch aus, deren Gestalt in den B sich aus der eben gewonnenen Relation (7) zwischen den drei B ergiebt.

Man bilde alsdann weiter (analog wie bei $n = 31$) etwa aus B_1 und B_2 den Ausdruck zehnten Grades $f(B_1, B_2)$, welcher neben je zehn einfachen Nullpunkten in den Polygonspitzen von F_{48} je in der Ordnung zwei in den zehn Fixpunkten der Operation W verschwindet. Im Anschluss an diesen Ausdruck $f(B_1, B_2)$ definieren wir die ganze Modulform $(-5)^{\text{ter}}$ Dimension:

$$(2) \qquad E(\omega_1, \omega_2) = \sqrt{f(B_1, B_2)}$$

und führen wiederum eine zweite Darstellung von E mit Hülfe der Integrale erster Gattung ein. Schreibt man hierbei zur Abkürzung

$$(3) \qquad \beta_i = \frac{\omega_2}{2\pi} B_i,$$

so ergeben sich unter Rücksicht auf die Überlegung des vorigen Paragraphen auf transcendentem Wege als Integrale erster Gattung:

$$(4) \qquad \int \beta_0\beta_1 d\omega, \quad \int \beta_0\beta_2 d\omega, \quad \int \beta_1\beta_2 d\omega, \quad \int \beta_2^2 d\omega,$$

während wir andrerseits durch algebraische Betrachtung auf folgende Ausdrucksformen für diese Integrale der Γ_{48} kommen:

$$(5) \qquad \int \frac{\beta_1 d\beta_2 - \beta_2 d\beta_1}{\sqrt{f(\beta_1, \beta_2)}} \cdot \beta_1^{\nu} \beta_2^{3-\nu}, \quad \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Wie sich die lineare Abhängigkeit der Grössen (4) von den vier Grössen (5) gestaltet, brauchen wir nicht allgemein zu untersuchen; es genügt festzustellen, dass die beiden Integrale

$$\int \beta_2^2 d\omega, \quad \int \frac{\beta_1 d\beta_2 - \beta_2 d\beta_1}{\sqrt{f(\beta_1, \beta_2)}} \cdot \beta_2^3$$

bei gemeinsamer unterer Grenze bis auf einen constanten Factor mit einander übereinstimmen, um von hier aus für die Modulform E die unmittelbare Definition zu gewinnen:

$$(6) \qquad \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^6 \mathsf{E}(\omega_1, \omega_2) = r\beta_2 \cdot \frac{\beta_1 d\beta_2 - \beta_2 d\beta_1}{dr}.$$

Als Anfangsglieder der Potenzentwicklung der Modulform E finden wir daraufhin:

$$(7) \quad \mathsf{E} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6 r^5 (1 - 3r - r^2 + 4r^3 + 3r^4 + 10r^5 - 16r^6 - 19r^8 - r^9 + 30r^{10} - 12r^{11} + \cdots).$$

Als ein *volles System von Modulformen* der Γ_{48} bringen wir E, B_1, B_2 in Vorschlag, was den Vorteil für sich hat, dass gemeinsame Nullpunkte dieser drei Formen einzig in den Polygonspitzen gelegen sind. Vermöge der mittlerweile gewonnenen Reihenentwicklungen können wir nun auch die ausführliche Gestalt des Ausdrucks $f(\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2)$ berechnen und finden auf diesem Wege als *algebraische Relation zwischen den Moduln* E, B_1, B_2:

$$(8) \quad \mathsf{E}^2 = \mathsf{B}_1^{10} - 6\mathsf{B}_1^9\mathsf{B}_2 + 11\mathsf{B}_1^8\mathsf{B}_2^2 - 24\mathsf{B}_1^7\mathsf{B}_2^3 + 19\mathsf{B}_1^6\mathsf{B}_2^4 - 16\mathsf{B}_1^5\mathsf{B}_2^5 - 13\mathsf{B}_1^4\mathsf{B}_2^6 + 30\mathsf{B}_1^3\mathsf{B}_2^7 - 38\mathsf{B}_1^2\mathsf{B}_2^8 + 28\mathsf{B}_1\mathsf{B}_2^9 - 11\mathsf{B}_2^{10}.$$

Um zur nicht-homogenen Schreibweise überzugehen, gestalten wir die bereits in (1) eingeführte zweiwertige Function τ durch die folgende Bestimmung:

$$(9) \qquad \sigma(\omega) = \frac{\mathsf{E}}{\mathsf{B}_1^5}, \quad \tau(\omega) = \frac{\mathsf{B}_2}{\mathsf{B}_1}$$

zu einem *vollen System von Modulfunctionen der* Γ_{48} aus. Die zwischen σ und τ bestehende hyperelliptische Relation weist alsdann die Gestalt auf:

$$(10)\quad \sigma^2 = 1 - 6\tau + 11\tau^2 - 24\tau^3 + 19\tau^4 - 16\tau^5 - 13\tau^6 + 30\tau^7 - 38\tau^8 + 28\tau^9 - 11\tau^{10}.$$

Die Anwendung der erhaltenen Resultate auf die ganzzahligen quadratischen Formen der Determinanten $D = \pm 47$ und $-4 \cdot 47$ gestaltet sich hier ganz ähnlich wie bei $n = 31$.

Nehmen wir zunächst $D = +47$: Die Symmetrielinien, welche die durch:

$$(11)\qquad \sigma' = -\bar{\sigma}, \quad \tau' = \bar{\tau}$$

dargestellte symmetrische Umformung der Fläche F_{48} in sich aufweist, liefern die zu $n = 47$ gehörende Smith'sche Curve. Am leichtesten lässt sich der Verlauf derselben verfolgen, wenn wir F_{48} als zweiblättrige Fläche über der τ-Ebene anordnen. Da werden nach (1) § 6 nur jene *zwei* Verzweigungspunkte auf der reellen τ-Axe liegen, welche den beiden damals genannten ambigen Formclassen zugewiesen sind. Demnach folgt aus (11) sofort: Auf der „im Raume geschlossenen F_{48}" erfüllen die Punkte mit reellen Werten τ zwei geschlossene einander in zwei Punkten überkreuzende Linien. Auf der einen sind die zugehörigen Werte σ reell, und dies ist die Symmetrielinie der durch $\omega' = -\bar{\omega}$ definierten Transformation der F_{48} in sich; auf der anderen jener beiden Linien ist σ rein imaginär, und sie liefert die Smith'sche Curve der Determinante $D = 47$. Da F_{48} Ausnahmepunkte mit $J = 1$ nicht aufweist, so folgt vor allem, *dass es nur eine sich selbst nicht inverse Classe von Formen der positiven Determinante* $D = 47$ *giebt*. Solches bestätigt man denn auch nach den Regeln von I p. 250 sofort durch die Rechnung; es ergeben sich 23 reducierte Formen, welche sich zu einer einzigen Formenperiode zusammengliedern. Dabei treten nur an zwei Stellen dieser Periode Hauptreducierte auf, und eben deshalb wird sich die im ursprünglichen Polygon F_{48} gezeichnete Smith-sche Curve aus *drei* Kreisbogensegmenten aufbauen; wir finden als deren Gleichungen:

$$47\,(x^2 + y^2) - 1 = 0,$$
$$23 \cdot 47\,(x^2 + y^2) \pm 2 \cdot 47x + 2 = 0. -$$

Andrerseits steht die rechte Seite von (10) in interessanter Beziehung zu den Formen der *negativen* Determinanten $D = -47$ und $-4 \cdot 47$. Setzen wir nämlich in (10) für σ den Wert Null, so sind die zugehörigen zehn Werte τ die singulären Moduln τ der zweimal fünf Formclassen der Determinanten $D = -47$, $D = -4 \cdot 47$. Demnach wird sich, eben diesen beiden Determinanten entsprechend, die ganze Function zehnten Grades auf der rechten Seite von (10) in zwei ebensolche Functionen fünften Grades spalten lassen, die gleichfalls *ganz-*

zahlige Coefficienten haben. Diese beiden Ausdrücke fünften Grades sind dank des Umstandes, dass die rechte Seite von (10) für $\tau = 0$, ± 1, ∞ lauter primzahlige Werte annimmt, leicht aufgefunden, und wir erhalten so mit Rücksicht auf die Werteverteilung von τ als *Gleichungen der singulären Moduln τ für $D = -47$ und $D = -4 \cdot 47$*:

$$(12) \quad \begin{cases} D = -47, & \tau^5 - 2\tau^4 + \tau^3 + \tau^2 - \tau + 1 = 0, \\ D = -4 \cdot 47, & 11\tau^5 - 6\tau^4 + 15\tau^3 - 5\tau^2 + 5\tau - 1 = 0. \end{cases}$$

Die hiermit geleistete Zerlegung des oft genannten Ausdrucks 10ten Grades hat weiter für den functionentheoretischen Ausbau der Transformation 47ster Ordnung ihre wichtige Bedeutung. Wir werden hier nämlich, ähnlich wie bei $n = 31$, im Anschluss an (12) die beiden Modulformen definieren:

$$(13) \quad \begin{cases} \mathsf{Z} = \sqrt{\mathsf{B}_1^5 \mathsf{B}_2^{-1} - \mathsf{B}_1^4 + \mathsf{B}_1^3 \mathsf{B}_2 + \mathsf{B}_1^2 \mathsf{B}_2^2 - 2\mathsf{B}_1 \mathsf{B}_2^3 + \mathsf{B}_2^4}, \\ \mathsf{H} = \sqrt{\mathsf{B}_1^5 \mathsf{B}_2^{-1} - 5\mathsf{B}_1^4 + 5\mathsf{B}_1^3 \mathsf{B}_2 - 15\mathsf{B}_1^2 \mathsf{B}_2^2 + 6\mathsf{B}_1 \mathsf{B}_2^3 - 11\mathsf{B}_2^4}, \end{cases}$$

welche vermöge ihrer Nullpunkte den beiden Determinanten $D = -47$ und $D = -4 \cdot 47$ in charakteristischer Weise zugeordnet sind. Als die Anfangsglieder der Potenzentwicklungen für diese Formen gewinnen wir nach kurzer Rechnung:

$$(14) \quad \begin{cases} \mathsf{Z} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{3}{2}} (1 - r^2 + r^3 - 2r^4 - r^7 - 2r^8 + 2r^9 + 2r^{10} + \cdots), \\ \mathsf{H} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{3}{2}} (1 - 2r - r^2 - 3r^3 + 4r^4 + 4r^5 + 2r^6 + 3r^7 - 8r^8 \\ \qquad - 6r^9 - 14r^{10} + \cdots). \end{cases}$$

Die beiden hiermit eingeführten Modulformen benutzt man mit Vorteil, wenn es gilt, die Discriminante Δ durch die Moduln der Γ_{48} darzustellen. Man knüpft hier natürlich wieder an die beiden Ausdrücke $(\sqrt{\Delta} \pm \sqrt{\Delta'})$, welche einer formentheoretischen Discussion auf dem Polygon $F_{(47)}$ zu unterwerfen sind. Dabei zeigt sich, dass die beiden Ausdrücke:

$$\mathsf{B}_2^5 (\sqrt{\Delta} + \sqrt{\Delta'}), \quad \mathsf{B}_2^5 (\sqrt{\Delta} - \sqrt{\Delta'})$$

als Producte von Z bez. H in ganze homogene Verbindungen 9ten Grades der $\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2$ darstellbar sein müssen. Wir haben die so gemeinten Formeln wenigstens z. T. berechnet und finden:

$$(15) \quad \begin{cases} \mathsf{B}_2^5 \cdot (\sqrt{\Delta} + \sqrt{\Delta'}) = \mathsf{Z} \cdot (\mathsf{B}_1^9 - 17\mathsf{B}_1^8 \mathsf{B}_2 + 2^4 \cdot 7\mathsf{B}_1^7 \mathsf{B}_2^2 - 5 \cdot 71 \mathsf{B}_1^6 \mathsf{B}_2^3 \\ \qquad + 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \mathsf{B}_1^5 \mathsf{B}_2^4 + \cdots), \\ \mathsf{B}_2^5 \cdot (\sqrt{\Delta} - \sqrt{\Delta'}) = \mathsf{H} \cdot (\mathsf{B}_1^9 - 3 \cdot 5 \mathsf{B}_1^8 \mathsf{B}_2 + 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \mathsf{B}_1^7 \mathsf{B}_2^2 \\ \qquad - 3^2 \cdot 23 \mathsf{B}_1^6 \mathsf{B}_2^3 + 2^2 \cdot 43 \mathsf{B}_1^5 \mathsf{B}_2^4 + \cdots). \end{cases}$$

Die weitere Berechnung dieser Formeln hat natürlich keinerlei Schwierigkeit; es reichen hierfür sogar bereits die in den voraufgehenden Potenzentwicklungen angegebenen Anfangsglieder von B, Z, H aus.

Bei der Darstellung von g_2 hat man nur die beiden Formen B_1, B_2 und E nötig; hier erhalten wir als Gestalt und Anfangsglieder der betreffenden Formeln:

$$(16)\quad \begin{cases} 6B_2^4(g_2'+g_2) \doteq 5(13\cdot 17 B_1^8 - 2^2\cdot 5\cdot 43 B_1^7 B_2 + 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7^2 B_1^6 B_2^2 \\ \qquad\qquad - 2^2\cdot 3\cdot 193 B_1^5 B_2^3 + \cdots), \\ 3B_2^4(g_2'-g_2) = 4E(2\cdot 3\cdot 23 B_1^3 - 3^2\cdot 17 B_1^2 B_2 + 3\cdot 47 B_1 B_2^2 \\ \qquad\qquad - 2^4\cdot 3 B_2^3). \end{cases}$$

Die erste dieser beiden Formeln wird man ohne besondere Schwierigkeit vervollständigen können, worauf sich alsdann der rationale Ausdruck von J in σ und τ aus den Formeln (15) und (16) unmittelbar abschreiben lässt. —

§ 8. Grundlagen für die Transformation der Ordnung $n = 71$.

Nach den bisher gewonnenen Erfahrungen gestaltet sich die Untersuchung für diejenigen Ordnungen n besonders zugänglich, bei denen die Classenanzahl quadratischer Formen der *negativen* Determinanten $D = -n$ und $D = -4n$ eine möglichst *grosse*, diejenige der *positiven* Determinante $D = n$ aber eine möglichst *geringe* ist. Unter den Primzahlordnungen $n = 4h + 3$ tritt dies in ganz hervorragender Weise noch bei $n = 71$ ein, so dass sich dieser Fall geradezu wieder in ganz analoger Weise behandeln lässt wie voraufgehend $n = 47$, $n = 31$ etc. Die Verzweigung der zugehörigen Riemann'schen Fläche F_{72} ist natürlich die bekannte, und es treten insbesondere Ausnahmepunkte mit $J = 0$ oder $J = 1$ nicht auf; als das Geschlecht der fraglichen Fläche F_{72} berechnet man $p = 6$.

Die reducierten ursprünglichen Formen der beiden Determinanten -71 und $-4\cdot 71$ haben wir hier tabellarisch zusammengestellt:

$$(1)\quad \begin{cases} D = -71, & (1,1,18),\ (2,\pm 1, 9),\ (3,\pm 1, 6),\ (4,\pm 3, 5), \\ D = -4\cdot 71, & (1,0,71),\ (3,\pm 2, 24),\ (8,\pm 2, 9),\ (5,\pm 4, 15). \end{cases}$$

Die zu $n = 71$ gehörende Transformation W der Fläche F_{72} in sich besitzt hiernach auf derselben *vierzehn**) Fixpunkte, und daraus schliessen wir in gewohnter Überlegung, *dass die Fläche* $F_{(71)}$, *welche durch be-*

*) Es sind nämlich die beiden ambigen Classen (1) jeweils wieder nur einfach zu zählen, da die betreffenden repräsentierenden Punkte im Polygon F_{72} auf der Symmetrielinie der Operation A gelegen sind.

kannte Hälftung aus F_{72} entspringt, dem Geschlechte $p = 0$ zugehört; die Fläche F_{72} ist dieserhalb wieder hyperelliptisch.

Zu eben diesem Ergebnis gelangen wir auch auf analytischem Wege. Da unter den Formen (1) der Determinante $D = -71$ nur eine ambig ist, so liefert der Ansatz (2) p. 355 vier unterschiedene Modulformen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension, die wir dem bisherigen Brauche folgend durch B bezeichnen. Das einfachste analytische Bildungsgesetz für diese Modulformen ist gegeben durch:

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathsf{B} \;\;= \frac{2\pi}{\omega_2}\sum r^{\frac{x^2+71y^2}{4}}, & x \equiv y \pmod{2}, \\ \mathsf{B}' \;= \frac{2\pi}{\omega_2}\sum r^{\frac{x^2+71y^2}{8}}, & x \equiv y \pmod{4}, \\ \mathsf{B}'' = \frac{2\pi}{\omega_2}\sum r^{\frac{x^2+71y^2}{12}}, & x \equiv y \pmod{6}, \\ \mathsf{B}''' = \frac{2\pi}{\omega_2}\sum r^{\frac{x^2+71y^2}{16}}, & x \equiv 3y \pmod{8}. \end{cases}$$

Für die Rechnung eignen sich aber noch besser die nachfolgenden Combinationen der Modulformen (2):

$$\mathsf{B}_1 = \mathsf{B}, \quad \mathsf{B}_2 = \frac{\mathsf{B} - \mathsf{B}'}{2}, \quad \mathsf{B}_3 = \frac{\mathsf{B}' - \mathsf{B}''}{2}, \quad \mathsf{B}_4 = \frac{\mathsf{B}'' - \mathsf{B}'''}{2}.$$

Die Anfangsterme der hiermit definierten Modulformen sind:

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathsf{B}_1 = \frac{2\pi}{\omega_2}(1 + 2r + 2r^4 + 2r^9 + 2r^{16} + \cdots), \\ \mathsf{B}_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}(r - r^2 + r^4 - r^8 - r^{10} - r^{12} - r^{15} + \cdots), \\ \mathsf{B}_3 = \frac{2\pi}{\omega_2}(r^2 - r^3 - r^6 + r^9 + r^{15} - r^{16} + r^{18} + \cdots), \\ \mathsf{B}_4 = \frac{2\pi}{\omega_2}(r^3 - r^4 - r^5 + r^8 + r^{10} - r^{15} - r^{18} + \cdots), \end{cases}$$

und der Vorteil beim Gebrauch dieser Formen ist der, dass bei der 2ten, 3ten und 4ten unter ihnen Anfangsglieder der Entwicklung ausfallen.

Die einzelne Form B ist auf F_{72} *sechswertig;* wählt man also die B zu homogenen Coordinaten des gewöhnlichen Raumes, so erscheint dabei die Fläche F_{72} eindeutig bezogen auf eine in diesem Raume gelegene Curve sechster Ordnung C_6. *Aber diese C_6 ist notwendig eine doppelt-überdeckte Raumcurve dritter Ordnung C_3, welch' letztere alsdann, einfach genommen, auf das Polygon $F_{(71)}$ eindeutig bezogen ist.* Um solches zu zeigen bemerke man, dass die neun quadratischen Verbindungen:

$$(4)\qquad \mathsf{B}_1\mathsf{B}_2,\ \mathsf{B}_1\mathsf{B}_3,\ \mathsf{B}_1\mathsf{B}_4,\ \mathsf{B}_2^2,\ \mathsf{B}_3^2,\ \mathsf{B}_4^2,\ \mathsf{B}_2\mathsf{B}_3,\ \mathsf{B}_2\mathsf{B}_4,\ \mathsf{B}_3\mathsf{B}_4$$

nicht nur bei $\omega = i\infty$, sondern auch in der andern Polygonspitze, bei $\omega = 0$, verschwinden, welches letztere aus dem von früher her bekannten Verhalten der Formen B gegenüber der Modulsubstitution T sich leicht folgern lässt. Die Verbindungen (4) werden also, mit $\omega_2^2 d\omega$ multipliciert und integriert, neun überall endliche Integrale der Fläche F_{72} des Geschlechtes $p = 6$ liefern; zwischen den fraglichen neun quadratischen Verbindungen bestehen also drei lineare Relationen identisch. *Die so gemeinten, in den* B *quadratischen Identitäten haben die Gestalt:*

$$(5)\quad \begin{cases} B_3^2 - B_4^2 - B_2B_4 = 0, \\ B_2^2 - B_1B_3 + 2B_4^2 + 3B_2B_3 + 3B_2B_4 + B_3B_4 = 0, \\ B_4^2 - B_1B_4 + B_2B_3 + 3B_2B_4 + 2B_3B_4 = 0, \end{cases}$$

drei Gleichungen, die augenscheinlich von einander linear-unabhängig sind. Deuten wir jetzt die Relationen (5) geometrisch, so stellen dieselben drei linear-unabhängige Flächen zweiten Grades vor, *deren gemeinsamer Bestandteil in der That eine Raumcurve dritter Ordnung ist.* Hier haben wir also direct die C_3 nachgewiesen, welche, doppelt überdeckt und mit 14 Verzweigungspunkten versehen, zur oben gemeinten Curve sechster Ordnung C_6 hinführt.

Was übrigens den Beweis für die Richtigkeit der Relationen (5) angeht, so entwickele man die linken Seiten dieser Gleichungen auf Grund von (3) nach ansteigenden Potenzen von r; man wird finden, dass jedenfalls alle Glieder ausfallen, bei denen der Potenzexponent von r kleiner als 12 ist. Wäre also eine der quadratischen Verbindungen (5) nicht identisch Null, so würde sie eine Modulform $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension der Γ_{72} vorstellen, deren zwölf Nullpunkte auf F_{72} alle in der Spitze bei $\omega = i\infty$ vereint liegen; inzwischen verschwindet diese Form auch noch in der Spitze bei $\omega = 0$, und also würde die Zahl der Nullpunkte, die ≥ 13 wäre, nicht mit der Wertigkeit unserer Modulform übereinstimmen.

Eine Folge der eben gewonnenen Ergebnisse ist, dass die Modulformen B sich gegenüber der Substitution W einzeln bis auf einen Factor reproducieren; dass aber dieser Factor in einfachster Weise für alle vier B gleich 1 ist, schliessen wir in der bei den früheren Beispielen entwickelten Art. Weiter gelingt es nun auch sofort, die *zweiwertigen Functionen* der hyperelliptischen Fläche F_{72} anzugeben. In der That liegen von den sechs Nullpunkten von $\varkappa B_3 + \lambda B_4$ zweimal zwei in den Polygonspitzen fest, so dass nur noch zwei beweglich bleiben: *die Quotienten linear-unabhängiger Verbindungen* $\varkappa B_3 + \lambda B_4$ *liefern also die zweiwertigen Functionen der* Γ_{72}.

Wie früher ergänzen wir endlich die Formen B_3, B_4 durch Zusatz einer Form E zu einem vollen Modulsystem der Γ_{72}. Diese ganze Modulform E wird zur $(-7)^{\text{ten}}$ Dimension gehören müssen, und von ihren 42 Nullpunkten auf F_{72} sollen in den Spitzen je 14 liegen, während die rückständigen 14 Nullpunkte mit den 14 Verzweigungsstellen der doppelt-überdeckten Fläche $F_{(71)}$ zusammenfallen müssen. Setzen wir abgekürzt $\beta_i = \frac{\omega_2}{2\pi} B_i$, so gewinnen wir in üblicher Art durch Vermittlung der überall endlichen Integrale der F_{72} für E die Darstellung:

$$(6) \qquad \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^7 E = r\beta_4^3 \cdot \frac{\beta_3 d\beta_4 - \beta_4 d\beta_3}{dr}.$$

Als Anfangsterme der Reihenentwicklung für die ganze Modulform E *berechnen wir von hier aus:*

$$(7) \quad E = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^7 r^{14}(1 - 5r + 4r^2 + 13r^3 - 13r^4 - 15r^5 - 15r^6 + 49r^7 + 26r^8 - 36r^9 - 8r^{10} - 60r^{11} + 32r^{12} + 46r^{13} + 46r^{14} - 152r^{15} + \cdots).$$

Hiermit sind nun auch alle Mittel beisammen, um den mit E^2 identischen Ausdruck 14ten Grades in B_3, B_4 explicite zu berechnen; setzen wir um der bequemeren Schreibweise willen $B_3 = A$, $B_4 = B$, *so lautet die algebraische Relation zwischen* A, B, E *wie folgt:*

$$(8) \quad E^2 = A^{14} + 4A^{13}B - 2A^{12}B^2 - 38A^{11}B^3 - 77A^{10}B^4 - 26A^9B^5 + 111A^8B^6 + 148A^7B^7 + A^6B^8 - 122A^5B^9 - 70A^4B^{10} + 30A^3B^{11} + 40A^2B^{12} + 4AB^{13} - 11B^{14}.$$

Sollen wir letzten Endes nicht-homogene Schreibweise anwenden, so schlagen wir

$$(9) \qquad \sigma(\omega) = \frac{E}{B^7}, \quad \tau(\omega) = \frac{A}{B}$$

als ein *volles System von Modulfunctionen der* Γ_{72} vor; diese beiden Functionen sind alsdann zufolge (8) mit einander verknüpft durch die *hyperelliptische Relation* 14ten *Grades:*

$$(10) \quad \sigma^2 = \tau^{14} + 4\tau^{13} - 2\tau^{12} - 38\tau^{11} - 77\tau^{10} - 26\tau^9 + 111\tau^8 + 148\tau^7 + \tau^6 - 122\tau^5 - 70\tau^4 + 30\tau^3 + 40\tau^2 + 4\tau - 11.$$

Auf eine Discussion über die Beziehung von g_2, g_3, Δ und J zu den untersuchten Functionen der Γ_{72} gehen wir hier nicht mehr ein.

In den Entwicklungen der vorangegangenen Kapitel haben wir dank der analytischen Hülfsmittel, die der Theorie der doppeltperiodi-

schen Functionen entstammen, die Behandlung des functionentheoretischen Grundproblems weit über die in Bd. I innegehaltenen Grenzen ausdehnen können. Eine Fortsetzung der Ausbeute der gedachten analytischen Ansätze für unsere functionentheoretischen Modulprobleme würde zwar nicht schwierig sein; inzwischen würden wir uns dabei immer nur wieder in jenen Gedankengängen bewegen, die wir voraufgehend bereits ausgiebig kennen lernten. Indem wir dieserhalb die in Rede stehenden Entwicklungen hiermit abschliessen, wenden wir uns weiterhin neuen und wichtigen Untersuchungen zu.

Sechster Abschnitt.

Theorie der Modularcorrespondenzen und der aus ihnen hervorgehenden Classenzahlrelationen.

Erstes Kapitel.

Neue Ausführungen zu Riemann's Theorie der algebraischen Functionen.

Die Aufgabe, welche uns nun noch zu lösen übrig bleibt, ist bereits am Schlusse des vierten Abschnittes (p. 235) vorgezeichnet: Wir sollen die *allgemeine Theorie der Modularcorrespondenzen* entwickeln, deren erstes Glied die oben behandelte Lehre von den Modular*gleichungen* ausmachte. Wie wir dann von den letzteren Gleichungen in Kapitel 5 und 6 des vierten Abschnitts eine ausgedehnte Verwendung *arithmetischen* Inhalts gaben, so sollen uns nun auch die Modularcorrespondenzen ganz allgemein zu einer Quelle für die Gewinnung *neuer Classenzahlrelationen allgemeinerer Stufenzahlen* werden, die sich an die Relationen erster und fünfter Stufe des Abschnitt 4 anschliessen.

Aber wir können auch jetzt wieder nicht unmittelbar zu unserem neuen Gegenstande übergehen, müssen vielmehr eine Reihe vorbereitender Kapitel voraussenden. Es ist vor allem die in den beiden Anfangskapiteln des dritten Abschnitts (I p. 493 ff.) nur erst begründete Riemann'sche Theorie der algebraischen Functionen, welcher wir hier eine weiter ausbauende allgemeine Behandlung widmen müssen. Einmal sollen über die Integrale einer Riemann'schen Fläche, namentlich diejenigen dritter Gattung, einige ergänzende Entwicklungen gegeben werden. Namentlich aber sollen *formentheoretische* Betrachtungsweisen, deren Brauchbarkeit im engeren Gebiete der Congruenzmoduln soeben an zahlreichen Beispielen evident wurde, jetzt ganz allgemein zur Grundlage für die Untersuchung der Functionen einer Riemann'schen

Fläche gemacht werden. Indem wir in der That den allgemeinen Begriff einer „Form auf der Riemann'schen Fläche" einführen und sachgemäss durchbilden, werden wir uns durch Verwertung gleich zu nennender Weierstrass'scher Gedanken die Hülfsmittel verschaffen, mit denen wir hernach auf den speciellen Flächen F_μ der Modultheorie die zugehörigen Modularcorrespondenzen in der einfachsten Weise zum Ausdruck bringen können.

Unsere Darstellung ist eine mit Rücksicht auf die ferneren Zwecke eng umgrenzte. Aber es liegt für das weitergehende Studium insbesondere der formentheoretischen Principien eine grosse Reihe von Specialuntersuchungen vor, welche man in der Arbeit von Klein *„Zur Theorie der Abel'schen Functionen"* genannt findet*). In dieser letzteren Abhandlung sind die formentheoretischen Principien zuerst in Allgemeinheit entwickelt und werden insbesondere mit der Weierstrass-schen Theorie der Primfunction in Verbindung gesetzt. Diese Function, welche von Weierstrass für die Darstellung der übrigen Grössen eines algebraischen Gebildes zu Grunde gelegt wird, erscheint in der formentheoretischen Behandlungsweise Klein's als *Primform* in einer wesentlich abgeklärteren Gestalt wieder**).

§ 1. Einführung der Integrale dritter Gattung $Q_{\xi,\eta}^{x,y}$ und insbesondere der Normalintegrale $\Pi_{\xi,\eta}^{x,y}$.

Bei unserer nächstfolgenden Untersuchung knüpfen wir, was deren Voraussetzungen und Bezeichnungsweisen angeht, unmittelbar an den Abschluss des ersten Kapitels im dritten Abschnitt (I p. 492 bis 532) wieder an. Wir haben daselbst die Theorie der Integrale *dritter* Gattung auf einer beliebigen Riemann'schen Fläche F_n nur erst soweit durchgebildet, dass wir die ihnen zugehörigen Potentiale hergestellt hatten; es waren dies die Grössen $u_{a,b}$ (cf. p. 520), welche wir durch *axiale* Aneinanderreihung der Elementarpotentiale zweiter Gattung bildeten. Es wird weiterhin zweckmässig sein, die beiden bei $z = a$ und $z = b$ auf der Fläche F_n gelegenen Unstetigkeitspunkte von $u_{a,b}$ selbst als variabel zu denken; wir wollen dem schon jetzt Rechnung tragen, indem wir statt a, b fortan die Symbole ξ und η brauchen. Natürlich sind ξ und η zugleich Werte der Variabelen z, über deren

*) Math. Ann. Bd. 36 (1889).

**) Man vergl. übrigens, was die Weierstrass'sche Primfunction angeht, die Arbeit Schottky's in Crelle's Journal Bd. 101 (1887); Weierstrass selbst hat seine bezügliche Theorie direct nur in seinen Vorlesungen bekannt gegeben.

Ebene die Fläche F_n construiert ist, aber darum soll doch der „Punkt ξ bez. η der F_n" immer nur *ein* bestimmter unter den n bei $z = \xi$ bez. $z = \eta$ über einander liegenden Punkten der Fläche sein.

Nach dieser Verabredung bilden wir das zu $u_{\xi\eta}$ conjugierte Potential $v_{\xi\eta}$ und von hier aus das *Integral dritter Gattung:*

$$(1) \qquad Q_{\xi\eta} = u_{\xi\eta} + iv_{\xi\eta}.$$

Insofern dieses Integral nur *zwei* (logarithmische) Unstetigkeitspunkte auf F_n besitzt, nennt man es auch wohl ein *elementares* Integral dritter Gattung; doch lassen wir diese genauere Benennung weiterhin ausser Betracht. Jedenfalls aber sollen ξ und η fortan als die *Parameter des Integrals* Q bezeichnet werden.

Um (1) zu einem bestimmten Integrale auszugestalten, integrieren wir $dQ_{\xi\eta}$ von der Stelle y der Fläche F_n bis zur Stelle x, wobei wir die Symbole x und y in genau demselben Sinne brauchen wollen, den wir soeben für ξ und η auf der F_n festlegten; wir führen daraufhin die ausführliche Schreibweise:

$$(2) \qquad Q_{\xi\eta}^{xy} = \int_y^x dQ_{\xi\eta}$$

ein. Als Function der Stelle x wird sich alsdann das Integral (2) nach I p. 520 in den Umgebungen der beiden Stellen ξ und η verhalten wie:

$$+ \log(x - \xi) \quad \text{bez.} \quad - \log(x - \eta).$$

Wollen wir aber das Integral (2) als Function der unteren Grenze y auffassen, so wird sich diese Function an den beiden fraglichen Stellen ξ, η der Fläche verhalten wie:

$$- \log(y - \xi) \quad \text{bez.} \quad + \log(y - \eta).$$

Um die *Periodeneigenschaften* des Integrals $Q_{\xi\eta}^{xy}$ zu charakterisieren, denken wir auf F_n ein kanonisches Querschnittsystem gezogen, wie es in I p. 495 beschrieben wurde. Ausserdem aber ziehen wir noch eine weder sich selbst, noch die Schnitte a_i, b_i, c_i des kanonischen Systems überkreuzende Linie l vom Punkte η nach ξ und denken auch längs l die Fläche F_n zerschnitten. Die so vorgerichtete Fläche heisse etwa F_n', und die auf F_n' eingeschränkte Function (2) werde $\overline{Q}_{\xi\eta}^{xy}$ genannt, so oft diese genauere Bezeichnungsweise wünschenswert erscheint. Es gelten hiernach die folgenden Sätze: *Die Function* $\overline{Q}_{\xi\eta}^{xy}$, *abhängig von der oberen Grenze* x *betrachtet, weist längs jeder der* $2p$ *geschlossenen Linien* a_i, b_i *eine constante (rein imaginäre) Wertdifferenz auf, längs der Linien* c_i *tritt jedoch eine von Null verschiedene Wertdifferenz*

nicht auf; endlich findet längs der Linie l die Wertdifferenz $-2i\pi$ *statt* *).

Zur Einführung von *Normalintegralen* dritter Gattung benutzen wir denselben Gedankengang, wie in I p. 531 bei den Integralen zweiter Gattung. Seien gerade wie in I p. 529 $j_1, j_2 \cdots j_p$ die zum ausgewählten Querschnittsystem gehörenden Normalintegrale erster Gattung, so wollen wir, gerade wie in (2), unter Aufnahme der Grenzen x, y in die Bezeichnung schreiben:

$$j_k^{xy} = \int_y^x dj_k. \tag{3}$$

Man bilde daraufhin aus dem particulären Integral $Q_{\xi\,\eta}^{x\,y}$ das *allgemeine Integral dritter Gattung mit den Parametern* ξ, η:

$$Q_{\xi\,\eta}^{x\,y} + \sum_{k=1}^{p} c_k j_k^{xy}, \tag{4}$$

wo die c_k irgendwie gewählte Constante sind. Das Integral (4) teilt offenbar mit $Q_{\xi\,\eta}^{x\,y}$ alle bisher namhaft gemachten Eigenschaften dieses letzteren Integrals, abgesehen nur von dem einen Umstande, dass die Wertdifferenzen des Integrals (4) längs a_i, b_i nicht mehr ausschliesslich imaginäre Werte zu haben brauchen. Wie in I p. 531 bei den Integralen zweiter Gattung werden wir jetzt die constanten Coefficienten c_k in (4) so auswählen, *dass die Wertdifferenzen des Integrales* (4) *längs aller* p *Linien* a_i *mit Null identisch sind.* Das so gewonnene Integral werde durch:

$$\Pi_{\xi\,\eta}^{x\,y} = Q_{\xi\,\eta}^{x\,y} + \sum_k c_k j_k^{xy} \tag{5}$$

bezeichnet und heisse fortan das *Normalintegral dritter Gattung mit den Parametern* ξ, η; wie man leicht bemerkt, ist dasselbe durch das gezogene kanonische Querschnittsystem, sowie übrigens durch seine Parameter ξ, η eindeutig bestimmt.

Nebenher bemerken wir gleich noch, wie sich die Integrale *zweiter* Gattung hier anschliessen. In der That erhalten wir das Integral $Z_{\xi}^{x,y}$ im Sinne der in I p. 531 gebrauchten Bezeichnung jetzt ganz einfach durch Differentiation von $Q_{\xi\,\eta}^{x\,y}$ nach ξ, und insbesondere liefert $\Pi_{\xi\,\eta}^{x\,y}$ bei diesem Übergange das Normalintegral zweiter Gattung; wir

---

*) Es ist hier an der in I getroffenen Verabredung festgehalten, dass längs des einzelnen Schnittes die Wertdifferenz durch einen Wert der Function auf der *rechten* Seite, vermindert um den Wert im gegenüberliegenden Punkte des linken Ufers gegeben sein soll.

kommen bei Gelegenheit auf diese Ableitung der Integrale zweiter Gattung nochmals zurück*).

§ 2. Perioden des Normalintegrals $\Pi_{\xi\eta}^{xy}$. Satz von der Vertauschbarkeit von Parameter und Argument bei $\Pi_{\xi\eta}^{xy}$.

Die Perioden des Normalintegrals $\Pi_{\xi\eta}^{xy}$ auf der Fläche F_n sind z. T. bereits im vorigen Paragraphen bestimmt worden. In der That hat längs der Linie l das Normalintegral dieselbe Wertdifferenz wie jedes andere Integral $Q_{\xi\eta}^{xy}$, nämlich $-2i\pi$. An den p Schnitten a_i findet eine von Null verschiedene Wertdifferenz für $\Pi_{\xi\eta}^{xy}$ nicht statt; eben dies war die Definition unseres Normalintegrals. Es bleiben hiernach nur noch die p Linien b_k.

Sei nun längs der einzelnen Linie b_k die Wertdifferenz von $\Pi_{\xi\eta}^{xy}$ durch τ_k bezeichnet, so berechnen wir die Werte τ_k durch genau dieselbe Überlegung wie seinerzeit die Perioden der Integrale zweiter Gattung in I p. 531. Wir bilden uns das Integral:

$$\int \Pi_{\xi\eta}\, dj_k \tag{1}$$

und leiten dasselbe zuvörderst im positiven Sinne über die geschlossene Berandung der durch a_i, b_i, c_i zerschnittenen Fläche F_n. Dank des einfachen Verhaltens der Normalintegrale j_k (cf. I p. 530) gewinnen wir durch leichte Zwischenbetrachtung als Wert des fraglichen Integrals einfach die eben gemeinte Wertdifferenz $-\tau_k$ von $\Pi_{\xi\eta}^{xy}$. Nun aber dürfen wir die für (1) vorgeschriebene Integrationsbahn unbeschadet des Integralwertes $-\tau_k$ auf eine geschlossene Linie L zusammenziehen, welche den Schnitt l allenthalben eng umschliesst; und als Wert des Integrals (1), erstreckt über diese Linie L, findet sich leicht $-2i\pi j_k^{\xi\eta}$. Formulieren wir demgemäss das Resultat: *Die Perioden des Normalintegrals $\Pi_{\xi\eta}^{xy}$ sind gegeben durch das Schema:*

$$-2i\pi \mid 0, 0, \ldots, 0 \mid 2i\pi j_1^{\xi\eta}, \ldots, 2i\pi j_p^{\xi\eta} \mid, \tag{2}$$

wo j_k die Normalintegrale erster Gattung sind. Der Sinn der Anordnung (2) ist wohl ohne weiteres verständlich.

Ein viel benutzter Satz ist der über die *Vertauschbarkeit von Parameter und Argument bei den Normalintegralen dritter Gattung* $\Pi_{\xi\eta}^{xy}$:

$$\Pi_{\xi\eta}^{xy} = \Pi_{xy}^{\xi\eta}. \tag{3}$$

*) Man vergl. übrigens zu den Entwicklungen des vorliegenden und der nächstfolgenden Paragraphen Riemann's Abhandlung *„Theorie der Abel'schen Functionen"*, Crelle's Journ. Bd. 54 (1857), sowie *Clebsch-Gordan, Theorie der Abel'schen Functionen,* Leipzig (1866).

Um die Gleichung (3) zu beweisen, bilde man die beiden unbestimmten Integrale $\Pi_{\xi\eta}$, Π_{xy} und denke jetzt auch die Stellen y, x durch eine Linie λ verbunden, welche weder a_i, b_i, c_i noch l überkreuzt. Man leite nunmehr das Integral

$$\int \Pi_{\xi\eta}\, d\Pi_{xy} \tag{4}$$

über den Rand der durch a_i, b_i, c_i zerschnittenen Fläche und lese aus (2) durch gewohnte Überlegung leicht ab, dass man solchergestalt den Wert Null für (4) erhält. Nun lässt sich aber die durchlaufene Bahn auf zwei Linien zusammenziehen, deren eine die vorhin schon gebrauchte Linie L ist, während die andere Linie, Λ, in entsprechender Weise den Schnitt λ eng umschliesst. Fassen wir zusammen, so ergiebt sich aus der bisherigen Überlegung die Identität:

$$\int_L \Pi_{\xi\eta}\, d\Pi_{xy} + \int_\Lambda \Pi_{\xi\eta}\, d\Pi_{xy} = 0. \tag{5}$$

Das zweite unter den Integralen der Gleichung (5) ist jetzt einer einfachen Umgestaltung zu unterziehen. Offenbar ist nämlich:

$$\int_\Lambda d\,(\Pi_{\xi\eta}\cdot \Pi_{xy}) = 0;$$

aber andrerseits ist identisch:

$$d(\Pi_{\xi\eta}\cdot\Pi_{xy}) = \Pi_{\xi\eta}\, d\Pi_{xy} + \Pi_{xy}\, d\Pi_{\xi\eta},$$

und also folgt:

$$\int_\Lambda \Pi_{\xi\eta}\, d\Pi_{xy} = -\int_\Lambda \Pi_{xy}\, d\Pi_{\xi\eta}.$$

Gestalten wir daraufhin die Gleichung (5) in die folgende um:

$$\int_L \Pi_{\xi\eta}\, d\Pi_{xy} = \int_\Lambda \Pi_{xy}\, d\Pi_{\xi\eta}, \tag{6}$$

so folgt nun Gleichung (3) ganz einfach dadurch, dass wir in (6) die Integration rechter und linker Hand in gewohnter Weise ausführen.

Bei dieser Sachlage wird es die naturgemässe Auffassung sein, wenn wir das Integral $\Pi_{\xi\eta}^{xy}$ nicht als Function von x allein, sondern vielmehr als *Function der beiden unabhängig veränderlichen Stellen* x *und* ξ *der Fläche* ansehen oder, wenn man so will, sogar als *Function der vier Stellen* x, y, ξ, η. Dieser Auffassung werden wir insbesondere dann gerecht werden müssen, wenn wir aus $\Pi_{\xi\eta}^{xy}$ ein allgemeines Integral $Q_{\xi\eta}^{xy}$ herstellen wollen. Hier werden wir an Stelle der vorläufigen Gleichung (5) § 1 die genauere:

$$Q_{\xi\eta}^{xy} = \Pi_{\xi\eta}^{xy} + \sum_{i,k} c_{ik}\, j_i^{\xi\eta}\, j_k^{xy} \tag{7}$$

setzen müssen, wo jetzt rechter Hand eine *bilineare Combination der beiden Grössenreihen* $j_i^{\xi\eta}$, j_k^{xy} hinzugesetzt ist. Das solchergestalt aufgebaute allgemeine Integral (7) schliesst also noch p^2 willkürliche Constante c_{ik} ein. Soll insbesondere das in (7) gebildete Integral Vertauschbarkeit von Parameter und Argument gestatten, wie $\Pi_{\xi\eta}^{xy}$, so ist dazu die Bedingung $c_{ik} = c_{ki}$, wie man leicht sieht, hinreichend und notwendig.

§ 3. Das Abel'sche Theorem, insbesondere für die Integrale erster und dritter Gattung.

Der weiter folgenden Entwicklungen halber müssen wir auch auf das Abel'sche Theorem für unsere Integrale zu sprechen kommen*).

Es seien $x_1, x_2, \ldots x_m$ und $y_1, y_2, \ldots y_m$ zwei im Sinne von I p. 562 mit einander äquivalente Systeme zu je m Punkten unserer Fläche F_n, und es liege in w eine m-wertige algebraische Function des Gebildes vor, welche in den m Punkten y übereinstimmend den Wert w_0 annehme, während sie in den m Punkten x den Wert w_1 besitzt. Durch w wird die F_n auf eine Fläche F_m abgebildet, in welcher die m Stellen y gerade über einander zu liegen kommen und desgleichen auch die m Stellen x. Wir wollen jetzt eine bestimmte Zuordnung zwischen den m Stellen y und den Stellen x verabreden, und zwar in der folgenden Weise: Von y_1 aus mögen wir zu einer Stelle x — eben derjenigen, welche wir nun x_1 nennen — in der über der Ebene w gelegenen Fläche F_m eine Bahn ziehen, welche alle diejenigen Werte w meiden soll, bei denen Verzweigungen der Fläche F_m eintreten. Ziehen wir dann von irgend einem anderen Punkte y_k aus im k^{ten} Blatte der F_m wieder genau dieselbe Bahn, so wird diese durch keinen Verzweigungspunkt der F_m hindurchlaufen und wird demgemäss in einem *eindeutig* bestimmten Punkte x endigen, den wir nun x_k nennen. Indem wir zur ursprünglichen Fläche F_n über der z-Ebene zurückkehren, werden wir die gezeichneten m Bahnen von y_1 nach x_1, von y_2 nach x_2 u. s. w. mit übertragen denken; eben hierdurch ist dann die eindeutige Zuordnung unserer beiden Punktreihen y und x festgelegt, die wir verabreden wollten. Dass die beschriebene Zuordnung übrigens in mehrfacher Weise getroffen werden kann, ist leicht evident; in-

*) Man vergl. die Abel'sche Originalarbeit „*Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendantes*", présenté à l'académie des sciences de Paris (1826), p. 145 der neuen Ausgabe von Abel's Werken. Wegen des im Texte eingehaltenen Verfahrens sehe man Riemann's schon genannte Abhandlung über Abel'sche Functionen Abteilung I, Art. 14.

zwischen dürfen wir dieselbe weiterhin beliebig particulär ausgewählt denken.

Sei jetzt J irgend ein Integral unseres Gebildes, so wollen wir die folgende Summe von m Integralen:

$$(1) \qquad \int_{y_1}^{x_1} dJ + \int_{y_2}^{x_2} dJ + \cdots + \int_{y_m}^{x_m} dJ$$

betrachten, wo die Integrationsbahnen die m soeben in der F_n festgelegten Linien sind. Das *Abel'sche Theorem* behauptet dann, *dass sich die Integralsumme* (1) *in w bez. in w_0 und w_1 durch eine rationale Function und den Logarithmus einer solchen ausdrücken lässt.*

Um solches zu zeigen, ziehen wir wieder die Fläche F_m über der w-Ebene heran und schreiben die Integralsumme (1) dementsprechend um in:

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{m} \int_{y_k}^{x_k} dJ = \int_{w_0}^{w_1} dw \cdot \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{dJ}{dw}\right)_k.$$

Dabei ist unter $\left(\frac{dJ}{dw}\right)_k$ der Wert der Ableitung von J nach w im k^{ten} Blatte der F_m oder (besser gesagt) auf der Bahn von y_k nach x_k verstanden. Die in (2) rechter Hand unter dem Integralzeichen stehende Summe ist nun offenbar mit einer *rationalen* Function $r(w)$ identisch, so dass wir von (2) aus:

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{m} \int_{y_k}^{x_k} dJ = \int_{w_0}^{w_1} r(w)\, dw$$

erhalten. Durch unbestimmte Integration folgt in bekannter Weise:

$$\int r(w)\, dw = \text{const.} + R_1(w) + \log R_2(w),$$

wo R_1 und R_2 zwei gewisse rationale Functionen von w vorstellen; aus (3) ergiebt sich demgemäss:

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{m} \int_{y_k}^{x_k} dJ = R_1(w_1) - R_1(w_0) + \log \frac{R_2(w_1)}{R_2(w_0)},$$

und hiermit ist in der That die Behauptung des Abel'schen Theorems bewiesen.

Wir specificieren jetzt die Formel (4) erstlich für die *überall endlichen Integrale* der Fläche F_n. In diesem Falle wird die linke Seite von (4) bei einmal gegebenen y_k für *keine* Auswahl des äquivalenten Punktsystems x_k unendlich werden können, und es wird also auch die

rechte Seite von (4) für *keinen* Wert von w_1 unendlich werden dürfen. Eben dieserhalb sind die $R_1(w)$, $R_2(w)$ mit Constanten identisch, so dass die Integralsumme (4) einen Wert hat, der unabhängig von der Auswahl des zu den y äquivalenten Punktsystems der x ist. Aber dieser Wert der Integralsumme (4) muss direct mit Null identisch sein; denn er verschwindet, wenn wir sämtliche x_k mit ihren zugeordneten Punkten y_k bez. identisch nehmen und die Verbindungsbahnen verschwinden lassen. *Als Ausdruck des Abel'schen Theorems für irgend ein Integral erster Gattung j unseres Gebildes haben wir somit:*

$$\sum_{k=1}^{m} j^{x_k y_k} = 0. \tag{5}$$

Bei den Integralen *dritter* Gattung, zu welchen wir jetzt übergehen, betrachten wir nur den (späterhin allein zu gebrauchenden) Specialfall, dass w mit unserer anfänglich ausgewählten n-wertigen Function z selbst identisch ist. Dann also ist $m = n$ und die n Stellen x_k liegen ebenso wie die n Stellen y_k in der F_n über einander. Ist $Q_{\xi\eta}$ ein irgendwie particulär gewähltes Integral dritter Gattung mit den fest gegebenen Parametern ξ, η, so wird die nach Vorschrift von (4) gebildete Integralsumme

$$\sum_{k=1}^{n} Q_{\xi\eta}^{x_k y_k} \tag{6}$$

auf F_n jedenfalls *nur* logarithmische Unstetigkeitspunkte aufweisen können. Unendlichwerden kann überdies nur eintreten, falls eine der Stellen x_k, y_k nach ξ oder η rückt. Aber aus dem in § 1 angegebenen Verhalten von Q in der Umgebung der Punkte ξ und η auf F_n ist dann leicht ersichtlich, *dass der Ausdruck der Integralsumme* (6) *der nachfolgende sein muss:*

$$\sum_{k=1}^{n} Q_{\xi\eta}^{x_k y_k} = \log \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{(x-\eta)(y-\xi)}, \tag{7}$$

und hiermit haben wir unter Voraussetzung unserer speciellen Grenzen das *Abel'sche Theorem für den Specialfall der Integrale dritter Gattung* vor uns. Dass in der That auf der rechten Seite von (7) nicht noch eine additive Constante hinzutritt, sieht man durch Substitution der Specialwerte $y_k = x_k$, wobei wir natürlich wieder die Integrationsbahnen auf Null zusammenziehen; dann nämlich bietet Formel (7) links und rechts übereinstimmend den Wert Null dar.

Für die Integrale zweiter Gattung können wir zufolge der Schlussbemerkung in § 1 aus (7) durch Differentiation nach ξ eine ent-

sprechende Gleichung ableiten; doch gehen wir an der vorliegenden Stelle darauf nicht mehr besonders ein.

§ 4. Grundlagen der formentheoretischen Betrachtungsweise. Historisches.

Nach den Entwicklungen der vorangegangenen Paragraphen gehen wir nunmehr zu unserer eigentlichen neuen Aufgabe über, nämlich zur *formentheoretischen* Darstellungsweise unseres algebraischen Gebildes. Es bieten sich hier verschiedene Ansätze, und wir knüpfen etwa zuvörderst an die Riemann'schen Flächen F_μ, welche der Modultheorie entspringen. Für diese Flächen haben wir ja in den Modulformen und in den sie betreffenden Rechnungsregeln seit lange einen durchgebildeten formentheoretischen Apparat im Gebrauch gehabt. Dabei waren ω_1 und ω_2 die unabhängigen Variabelen; aber es war zumal in den letztvoraufgehenden Kapiteln durchaus die herrschende Anschauung, dass wir die Modulformen als *auf den geschlossenen Flächen existierende Grössen* ansahen. Immerhin bemerke man, dass die F_μ doch nur particuläre Riemann'sche Flächen sind, während wir hier eine für alle algebraischen Gebilde gleichmässig gültige Formentheorie anstreben müssen.

Um in diesem Sinne allgemeinere Ansätze zu erhalten, gehen wir auf die in I p. 559 ff. entwickelten Grundsätze zurück. Wir bezogen dort die Riemann'sche Fläche eindeutig auf eine Curve C_m m^{ter} Ordnung im Raum R_ν von ν Dimensionen ($\nu \geqq 1$) und führten zu diesem Zwecke a. a. O. auch bereits das Hülfsmittel der *homogenen Coordinaten* $x_0, x_1, \ldots, x_\nu$ ein. Dieser letztere Schritt — die Einführung der homogenen Coordinaten — soll uns jetzt ganz allgemein die Grundlage der formentheoretischen Betrachtung liefern: *Statt die Grössen unseres algebraischen Gebildes durch die $w_0, w_1, \ldots, w_{\nu-1}$ darzustellen, vermöge deren wir anfänglich die C_m einführten, betrachten wir sie jetzt als homogene Functionen nullter Dimension in den $x_0, x_1, \ldots, x_\nu$.* Aber dann ist es nur noch ein Schritt, wenn wir weiter auch eigentliche *Formen* des Gebildes betrachten, d. i. *homogene Functionen der $x_0, x_1, \ldots, x_\nu$ von nicht-verschwindender Dimension.*

Wie sich die hiermit begründete Betrachtungsweise ausgestaltet, werden wir weiterhin wenigstens in einigen Fällen zu untersuchen haben; zunächst nur folgende vorläufige Mitteilungen:

Der Fall $\nu = 2$, d. i. derjenige einer *ebenen* Curve C_m hat bereits vor längerer Zeit die ausführlichste Untersuchung gefunden und ist auch neuerdings wiederholt in Betracht gezogen. Die Behandlung der

Abel'schen Functionen, wie sie von Clebsch und Gordan geliefert wurde*), ist gerade auf dieser Grundlage aufgebaut, und man vergleiche wegen der Fortentwicklung dieser Richtung namentlich auch die Vorlesungen über Geometrie von Clebsch**). Auch die in Bd. I l. c. oft genannten Arbeiten von Brill und Nöther legen fast durchweg die ebenen Curven C_m der Betrachtung zu Grunde, und nur ganz vorübergehend wird gelegentlich (wie schon bei Clebsch) von den C_m des Raumes R_3 von drei Dimensionen gehandelt.

Für höhere Zahlwerte des ν ist bislang in dem hier in Betracht kommenden Sinne wohl nur diejenige Curve ausführlicher benutzt worden, welche wir in I p. 569 als „*Normalcurve der* φ" benannten. Wir haben in diesem Betracht die Abhandlung von Weber, *Über gewisse in der Theorie der Abel'schen Functionen auftretende Ausnahmefälle****), sowie diejenige von Nöther, *Über die invariante Darstellung algebraischer Functionen*†), zu nennen. Späterhin wurden durch Klein in der bereits wiederholt genannten Abhandlung „*Zur Theorie der Abel'schen Functionen*"††) die dort entwickelten allgemeinen formentheoretischen Ansätze aufs engste an die Normalcurve der φ angeschlossen.

Jetzt aber wolle man sich erinnern, dass wir $\nu = 2$ gar nicht als den niedersten für uns in Betracht kommenden Fall anzusehen haben (cf. I p. 558). Dieser ist vielmehr durch $\nu = 1$ gegeben, und damit kommen wir auf die gewohnte Gestalt der Riemann'schen Theorie zurück, wie sie auf die Betrachtung einer mehrblättrigen Fläche über der Ebene einer zugehörigen algebraischen Function z gegründet wird. Hier hindert uns dann nichts, statt $z = z_1 : z_2$ die homogenen Variabelen z_1 und z_2 zu gebrauchen und auf sie die Darstellung der übrigen Grössen des Gebildes zu gründen, insbesondere auch solcher homogener Functionen der z_1, z_2, deren Dimension nicht Null ist. Wir werden dabei nur der allgemeinen Anschauungsweise der homogenen Coordinaten $x_0, \ldots$ getreu bleiben, wenn wir für die z_1, z_2 vorschreiben, *dass sie weder unendlich werden noch zugleich verschwinden sollen*; an dieser Bestimmung aber soll in der That für die Folge festgehalten werden.

Die auf die z_1, z_2 gegründete Formentheorie wollen wir nun in den nächstfolgenden Paragraphen ausführlicher behandeln, und es soll

*) In ihrem schon genannten Werke „*Theorie der Abel'schen Functionen*", Leipzig, 1866.

**) Bearbeitet und herausgegeben von Lindemann, Bd. I, Leipzig 1876.

***) Mathem. Ann. Bd. 13 (1878).

†) Mathem. Ann. Bd. 17 (1880).

††) Mathem. Ann. Bd. 36 (1889).

dabei über die Auswahl der algebraischen Function z keinerlei beschränkende Bestimmung getroffen werden. Die auf z_1, z_2 basierten formentheoretischen Entwicklungen sind es in erster Linie gewesen, welche Hr. Klein a. a. O. und in einer Reihe voraufgehender Arbeiten (die namentlich die hyperelliptischen Gebilde betreffen) durchgebildet hat. Doch sind daselbst betreffs der Auswahl der algebraischen Function z gewisse Beschränkungen vorgeschrieben, und die speciellen Riemann'schen Flächen, welche solchergestalt zu Stande kommen, fanden den Namen der „kanonischen" Riemann'schen Flächen*). Inzwischen hat es für die folgende Darstellung keinen Zweck, an der hierin liegenden Einschränkung betreffend die Auswahl des z festzuhalten**); wir werden vielmehr unter $z = z_1 : z_2$ eine ganz beliebige algebraische Function der Fläche verstehen. Es ist dies der Standpunkt, welchen Hr. Hensel in Bd. 109 des Journals für Mathematik***), sowie die Vorlesung von Klein über „Riemann'sche Flächen" aus dem Wintersemester 1891/92 vertritt. Die enge Beziehung dieses Standpunktes zu den Arbeiten von Kronecker, bez. der Herren Dedekind und Weber wird sogleich hervortreten. Bei dieser Besprechung bleibt zunächst überall die zu z gehörende Riemann'sche Fläche F_n das eigentliche Fundament unserer Überlegung.

Wie sich übrigens die am Anfang des vorliegenden Paragraphen berührte Theorie der Modulformen der hiermit besprochenen allgemeinen auf z_1, z_2 gegründeten Formentheorie anschliesst, werden wir bei einer späteren Gelegenheit (zu Beginn des übernächsten Kapitels) noch kurz zu betrachten haben.

§ 5. Von den algebraischen Formen, insbesondere den ganzen algebraischen Formen $G(z_1, z_2)$ der Fläche F_n.

Ist w irgend eine algebraische Function unseres Gebildes, so werden wir $w \cdot z_2^\nu$ als *eine zur Fläche F_n gehörende algebraische Form der Dimension ν* benennen, wobei ν irgend eine positive oder negative ganze Zahl sein soll. Falls nicht gerade $\nu = 0$ ist, existiert die Form $w \cdot z_2^\nu$ natürlich zunächst nur auf unserer particulär gewählten Fläche F_n, sowie auf jeder Fläche, die aus F_n durch *lineare* Transformation der z hervorgeht (insofern wir diese durch eine *homogene*

---

*) Man sehe die weiter unten (§ 7) gegebenen bezüglichen Bemerkungen.

**) Für die Einschränkung massgebend ist nämlich die Bezugnahme auf die Normalcurve der φ, welche im Folgenden zurücktritt.

***) *Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen und der algebraischen Integrale* (1891).

lineare Transformation der z_1, z_2 ersetzt denken können); dagegen existieren unsere Formen noch keineswegs auf einer Fläche F_m, welche aus F_n durch höhere Transformation entsteht. Man wolle hieran festhalten, um die Tragweite unserer formentheoretischen Betrachtungen von vornherein richtig zu bemessen.

Der Einfachheit halber denken wir die Anordnung so getroffen, dass bei $z_2 = 0$ d. i. bei $z = \infty$ kein Verzweigungspunkt der Fläche F_n gelegen ist, was ja nötigenfalls durch *lineare* Transformation des z leicht erreichbar ist. Dann ist unmittelbar evident, dass die „Form" z_2 der Fläche F_n auf derselben insgesamt n einfache Nullpunkte hat, und man folgert daraus ohne weiteres den allgemeinen Satz: *Für eine zur Fläche gehörende algebraische Form ν^{ter} Dimension übertrifft die Gesamtzahl einfacher Nullpunkte auf F_n um den Betrag $n\nu$ die Gesamtzahl einfacher Unstetigkeitspunkte.*

Diejenigen unter unseren Formen, welche überhaupt nicht unendlich werden, bezeichnen wir jetzt als *ganze algebraische Formen der Fläche F_n*. Infolge des eben abgeleiteten Satzes *wird eine ganze algebraische Form ν^{ter} Dimension insgesamt $n\nu$ einfache Nullpunkte auf F_n besitzen*, einen Betrag, den wir in üblicher Weise als *Wertigkeit* der fraglichen Form bezeichnen. Zu den ganzen algebraischen Formen der F_n gehören insbesondere die ganzen rationalen homogenen Verbindungen der z_1, z_2; wir wollen diese Ausdrücke hinfort durch $g(z_1, z_2)$ bezeichnen. Aber hiermit sind die fraglichen Formen noch keineswegs erschöpft. Erforderlich ist nur, dass eine derartige Form, mit $z_2^{-\nu}$ multipliciert, eine *ganze algebraische Function* w von z giebt, welche unserem Gebilde angehört, d. i. eine solche algebraische Function w, deren Unstetigkeitspunkte ausschliesslich auf die n bei $z = \infty$ gelegenen Punkte der F_n eingeschränkt sind. Solcher *ganzer* algebraischer *Functionen*, die sich zumal nicht durch z rational darstellen lassen sollen, können wir aber auf Grund des Riemann-Roch'schen Satzes gleich beliebig viele nachweisen. Diesem Umstande Rechnung tragend, mögen wir die ganzen algebraischen Formen der F_n allgemein durch $G(z_1, z_2)$ bezeichnen; dabei soll die Dimension ν in den z_1, z_2 gelegentlich als oberer Index am G vermerkt werden, während wir untere Indices zur Unterscheidung verschiedener Formen unserer Art bereit stellen: $G_0^{(\nu)}(z_1, z_2)$, $G_1^{(\nu)}(z_1, z_2), \cdots$. Die $g(z_1, z_2)$ gehören natürlich alle den $G(z_1, z_2)$ an, aber sie stellen nicht die Gesamtheit der letzteren vor*). Für die Dimension $\nu = 0$ haben wir natürlich nur die *eine* Form $G^{(0)} = 1$

*) Abgesehen von dem sehr speciellen Falle, dass wir mit einer *ein*blättrigen Fläche zu thun haben.

oder etwas allgemeiner $G^{(0)} = \text{const.}$; negative Dimensionen kommen für die *ganzen* Formen, wie man bemerkt haben wird, nicht vor.

Um die Bedeutung der ganzen Formen $G(z_1, z_2)$ richtig zu überblicken, wählen wir unter den unserem Gebilde angehörenden ganzen algebraischen Functionen von z eine einzelne, w, aus, welche im Verein mit z einen einzelnen Punkt der Fläche F_n zu fixieren gestattet. Die Function w wird nur bei $z = \infty$ unendlich, und zwar möge der höchste hierselbst in einem einzelnen Blatte vorkommende Unstetigkeitspunkt die Ordnung ν aufweisen. Alsdann wird $w \cdot z_2^{\nu}$ eine ganze algebraische Form der F_n. Nun ist nach Voraussetzung jede algebraische Function des Gebildes als rationale Function $R(w, z)$ von w und z darstellbar. Indem man aber $R(w, z)$ in Zähler und Nenner spaltet, die in w und z ganz sind, und indem man hernach oben und unten mit einer geeigneten Potenz von z_2 multipliciert, ist evident, *dass jede algebraische Function des Gebildes und demnach auch jede algebraische Form der Fläche F_n als Quotient zweier ganzer Formen $G(z_1, z_2)$ darstellbar ist.* Mit den $G(z_1, z_2)$ beherrschen wir also das Gesamtgebiet der algebraischen Formen unserer F_n.

Dass übrigens, wie behauptet, unsere eigentlich formentheoretischen Überlegungen durchaus der particulären Fläche F_n anhaften, wird man zwischendurch bereits bemerkt haben. So ist z. B. die Wertigkeit unserer ganzen Formen $G(z_1, z_2)$ stets ein Multiplum von n, und n bedeutet doch die Blätteranzahl der zu Grunde liegenden Riemann'schen Fläche. Ist F_m eine andere Fläche unseres Gebildes, errichtet über der z'-Ebene, so könnte man freilich durch Abänderung der p. 485 getroffenen Festsetzungen über die Variabilität der z_1, z_2 oder der z'_1, z'_2 der anderen Fläche den Connex zwischen den beiden Formentheorien der Flächen F_n und F_m ohne besondere Mühe herstellen. Indessen liegen derlei Betrachtungen gar nicht in der Absicht, welche man bei der Einführung der Formentheorie überhaupt bezweckt; dieselben sollen demgemäss auch hier ganz ausser Betracht bleiben.

Bei der eingehenderen Untersuchung der ganzen Formen $G(z_1, z_2)$ wird vor allem die Frage aufzuwerfen sein, *wieviel linear-unabhängige Formen $G(z_1, z_2)$ bei der einzelnen Dimension ν auftreten.* Dass bei $\nu = 0$ nur die eine Form $G^{(0)} = \text{const.}$ auftritt, wurde vorhin bereits bemerkt. Für $\nu > 0$ aber ergiebt der Riemann-Roch'sche Satz das nachfolgende Resultat: *Es giebt auf der Fläche F_n genau:*

$$(1) \qquad n\nu - p + \tau + 1$$

linear-unabhängige ganze algebraische Formen $G^{(\nu)}(z_1, z_2)$ der ν^{ten} Dimen-

sion; dabei bedeutet τ die Gesamtzahl linear-unabhängiger „Formen" φ*), welche in den n bei $z_2 = 0$ über einander liegenden Punkten der F_n je im Grade ν verschwinden. In der That ist ja der Quotient von $G^{(\nu)}(z_1, z_2)$ und z_2^ν eine algebraische *Function* der Fläche, welche in den n Punkten $z_2 = 0$ der Fläche je in Ordnungen $\overline{\overline{<}}\, \nu$ unendlich wird, sonst aber endlich bleibt. Die Mannigfaltigkeit dieser Functionen ist aber zufolge des Riemann-Roch'schen Satzes gerade durch die Anzahl (1) gegeben.

Für die Darstellung aller ganzen algebraischen Formen $G(z_1, z_2)$ unserer Fläche durch einige unter ihnen liefert nun die Arbeit von Dedekind und Weber, *Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen***), sehr wichtige Principien; und andrerseits berühren wir uns hier mit Entwicklungen, die in den hierher gehörigen Arbeiten von Kronecker, *Über die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabeln*, und: *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen****) eine durchgreifende Rolle spielen. Die in Rede stehenden Gegenstände kommen freilich bei unseren ferneren Untersuchungen explicite nicht weiter vor; immerhin aber werden wir bald analoge Überlegungen gebrauchen, und es erscheint daher zweckmässig, im nächstfolgenden Paragraphen mit einigen Worten auf dieselben einzugehen. Wir schliessen uns dabei an die Terminologie der Herren Dedekind und Weber an.

§ 6. Darstellung aller ganzen Formen $G(z_1, z_2)$ durch einige unter ihnen. Satz von der Minimalbasis.

Weiterhin verstehen wir unter den n *conjugierten* Werten einer algebraischen Function oder Form der Fläche diejenigen n Werte derselben, welche in n über einander liegenden Punkten der F_n stattfinden. Sei alsdann w eine *ganze* algebraische Function der Fläche, welche definiert ist durch:

$$f(w, z) = 0, \tag{1}$$

und welche im Verein mit z den einzelnen Punkt der Fläche zu bestimmen gestattet; die Gleichung (1), welche in w vom n^{ten} Grade ist, wird alsdann *irreducibel* sein. Die n conjugierten Werte von w seien $w_1, w_2, \ldots, w_n$; aus ihnen bilde man die Determinante:

---

*) Es sei gestattet, hier die Bezeichnung der *Formen* φ, welche wir erst im übernächsten Paragraphen einführen, vorwegzunehmen.

**) Crelle's Journ. Bd. 92 (datiert 1880).

***) Crelle's Journ. Bd. 91 (1881) und Bd. 92 (1881).

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} 1, w_1, w_1^2, \ldots, w_1^{n-1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 1, w_n, w_n^2, \ldots, w_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

deren Quadrat die *Discriminante* Δ der Gleichung (1) ist. Da diese Gleichung irreducibel ist, so haben wir in Δ eine nicht identisch verschwindende rationale ganze Function von z.

Sei jetzt w' irgend eine andere algebraische Function der Fläche, deren conjugierte Werte wir wieder $w_1', \ldots, w_n'$ nennen. Es gelten dann die n Gleichungen:

$$(3)\qquad \begin{cases} w_1' + w_2' + \cdots + w_n' = r_0(z), \\ w_1 w_1' + w_2 w_2' + \cdots + w_n w_n' = r_1(z), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ w_1^{n-1} w_1' + w_2^{n-1} w_2' + \cdots + w_n^{n-1} w_n' = r_n(z). \end{cases}$$

Man bemerke zum Beweise dieser Gleichungen, dass linker Hand stets eine symmetrische Verbindung von n conjugierten Werten gebildet ist; eine solche ist aber in z immer rational. Durch Auflösung des Gleichungssystems (3) nach $w_1', \ldots$ ergiebt sich nun leicht: *Jede algebraische Function w' der Fläche lässt sich in der Gestalt:*

$$(4)\qquad w' = r_0(z) + r_1(z)\cdot w + \cdots + r_{n-1}(z)\cdot w^{n-1}$$

*darstellen, wo die $r(z)$ rationale Functionen von z sind**). Dabei ist diese Darstellung von w' zufolge der Irreducibilität von (1) *nur in einer einzigen Weise* zu leisten.

Unter ν verstehen wir jetzt die kleinste positive Zahl, für welche $w\cdot z_2^\nu$ eine *ganze* Form der F_n wird; diese Form $w\cdot z_2^\nu$ heisse $G(z_1, z_2)$. Indem man hierauf in (2) rechts und links eine geeignete Potenz von z_2 als Factor hinzusetzt, entspringt leicht der Satz: *Jede algebraische Form und also insbesondere jede ganze algebraische Form der F_n lässt sich auf eine einzige Weise in der Gestalt:*

$$(5)\qquad r_0(z_1, z_2) + r_1(z_1, z_2)\cdot G + \cdots + r_{n-1}(z_1, z_2)\cdot G^{n-1}$$

darstellen, wo die r rationale homogene Verbindungen der z_1, z_2 sind. Wir benennen in diesem Sinne die n Formen $1, G, G^2, \ldots, G^{n-1}$ als eine *Basis* für die algebraischen Formen der F_n und bezeichnen diese Basis symbolisch durch $[1, G, G^2, \ldots, G^{n-1}]$.

Den hiermit gewonnenen Begriff der Basis fassen wir gleich noch etwas allgemeiner. In der That wählen wir unter den *ganzen* Formen (5) beliebige n aus, jedoch so, dass die n-gliedrige Determinante der

*) Jedoch sind mit den $r(z)$ in (4) keineswegs dieselben Functionen gemeint wie im Gleichungssystem (3).

dabei zur Geltung kommenden n^2 Formen $r(z_1, z_2)$ nicht mit Null identisch ist. *Unter dieser Bedingung lassen sich offenbar in den ausgewählten Formen $G_1, G_2, \ldots, G_n$ alle übrigen Formen der F_n wieder in der charakteristischen Gestalt:*

$$(6) \qquad r_1(z_1, z_2) \cdot G_1 + r_2(z_1, z_2) \cdot G_2 + \cdots + r_n(z_1, z_2) \cdot G_n$$

darstellen; wir haben also auch in $[G_1, G_2, \ldots, G_n]$ eine *Basis* für die Formen der F_n.

Sind die n conjugierten Werte der G_k für den Augenblick mit Hülfe doppelter Indices durch $G_{k,1}, G_{k,2}, \ldots, G_{k,n}$ bezeichnet, so bilde man die Determinante:

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} G_{11}, & G_{21}, & \ldots, & G_{n1} \\ G_{12}, & G_{22}, & \ldots, & G_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ G_{1n}, & G_{2n}, & \ldots, & G_{nn} \end{vmatrix}$$

und benenne deren Quadrat als *Discriminante* $\Delta\ (G_1, \ldots, G_n)$ *der Basis* $[G_1, \ldots, G_n]$; *dieselbe ist,* wie man aus der bisherigen Entwicklung leicht entnimmt, *eine nicht identisch verschwindende rationale ganze homogene Verbindung der* z_1, z_2:

$$(8) \qquad \Delta(G_1, G_2, \cdots, G_n) = g(z_1, z_2),$$

die eine Dimension > 0 *aufweist.*

Behalten wir die Bezeichnung $g(z_1, z_2)$ für die *ganzen* rationalen homogenen Verbindungen der z_1, z_2 bei, so wird, sofern wir gleich die eben eingeführte Basis $[G_1, \ldots, G_n]$ weiter benutzen wollen, jedenfalls jeder Ausdruck:

$$(9) \qquad g_1 G_1 + g_2 G_2 + \cdots + g_n G_n,$$

wenn derselbe nur Homogeneität in z_1, z_2 zeigt, eine *ganze* algebraische Form der F_n vorstellen. Dieser Satz ist jedoch keineswegs umkehrbar; in der That überzeugt man sich leicht, dass es Basen $[G_1, G_2, \ldots, G_n]$ giebt, in denen die ganzen Formen der F_n zum Teil nur erst mit nicht ganzen Cofficienten r in der Gestalt (6) darstellbar sind. Die hiermit angeregte Frage nach der Darstellung der *ganzen* Formen wird nun von dem folgenden im Centrum dieser ganzen Theorie stehenden Satze beantwortet: *Es giebt jedenfalls besondere Basen, in denen sich alle ganzen Formen G der F_n in der Gestalt* (9) *darstellen lassen.* Eine Basis dieser Art benennt Hr. Klein in seiner vorhin genannten Vorlesung als eine *Minimalbasis,* eine Bezeichnung, die wir durch Bezugnahme auf die zur Minimalbasis gehörende Discriminante rechfertigen werden.

Auf den von Dedekind und Weber geführten Beweis der Existenz einer Minimalbasis gehen wir hier um so lieber in Kürze ein, weil uns weiter unten, wie wir schon andeuteten, die gleichen Gesichtspunkte unter etwas veränderten Verhältnissen noch öfter begegnen. Nehmen wir an, es seien noch nicht alle G in der Gestalt (9) darstellbar, so giebt es wenigstens *eine* ganze Form der Gestalt:

$$\frac{g_1 G_1 + g_2 G_2 + \cdots + g_n G_n}{z_1 a_2 - z_2 a_1}, \tag{10}$$

wobei nicht alle g_k zugleich den Factor $(z_1 a_2 - z_2 a_1)$ aufweisen. Zur Erleichterung der Überlegung denken wir die $G_1, G_2, \ldots$ nach ansteigender Dimensionenzahl angeordnet und nehmen übrigens $a_2 \gtrless 0$ an; sollte aber $a_2 = 0$ sein, so wird jedenfalls $a_1 \gtrless 0$ sein, worauf man nach einfacher Permutation der Indices von z_1, z_2 die nun zu skizzierende Überlegung durchführen wird.

Ist die Dimension von g_k durch ν_k bezeichnet, so können wir vermöge elementarer Division g_k in die Gestalt setzen:

$$g_k = (z_1 a_2 - z_2 a_1) \cdot g'_k + c_k z_2^{\nu_k}; \tag{11}$$

dabei ist g'_k eine Form $g(z_1, z_2)$ der Dimension $(\nu_k - 1)$, und es verschwinden die n Constanten c_k zufolge der über (10) gemachten Voraussetzung offenbar nicht alle. Tragen wir jetzt den in (11) gelieferten Ausdruck von g_k in (10) ein, so ist mit (10) offenbar auch

$$\frac{c_1 z_2^{\nu_1} G_1 + c_2 z_2^{\nu_2} G_2 + \cdots + c_n z_2^{\nu_n} G_n}{z_1 a_2 - z_2 a_1} \tag{12}$$

eine *ganze* Form der F_n; die $\nu_1, \nu_2, \ldots$ aber sind positive ganze Zahlen, welche die Bedingung $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \nu_3 \ldots$ befriedigen. Indem man die constanten Coefficienten c in der Reihenfolge $c_n, c_{n-1}, \ldots$ durchläuft, sei c_k der erste, der einen von Null verschiedenen Wert aufweist; alsdann ist auch noch:

$$G'_k = \frac{G_k}{z_1 a_2 - z_2 a_1} + \frac{c_k^{-1} c_{k-1} z_2^{\nu_{k-1}} G_{k-1} + \cdots}{z_2^{\nu_k}(z_1 a_2 - z_2 a_1)} \tag{13}$$

eine *ganze* Form der F_n.

Indem wir jetzt vom Formensystem $G_1, \ldots, G_n$ zum System $G'_1, \ldots, G'_n$ fortgehen, welches gegen das erste nur insofern geändert sein soll, dass G_k durch G'_k ersetzt ist, so werden wir zufolge (13) auch in $[G'_1, G'_2, \ldots, G'_n]$ eine Basis besitzen. Für die beiderseitigen Discriminanten haben wir aber nach (7) und (13) offenbar die Relation

$$\Delta(G_1, G_2, \cdots, G_n) = (z_1 a_2 - z_2 a_1)^2 . \Delta(G'_1, \cdots, G'_n). \tag{14}$$

Die Discriminante $\Delta(G'_1, \ldots, G'_n)$ ist, wie überhaupt jede Discriminante einer Basis ganzer Formen, selbst wieder eine Form $g(z_1, z_2)$, und also

war notwendig $(z_1 a_2 - z_2 a_1)$ quadratischer Factor der Discriminante $\Delta(G_1, \ldots, G_n)$. Da nun diese letztere Discriminante zufolge ihrer Gestalt (8) jedenfalls nur eine begrenzte Anzahl quadratischer Factoren aufweisen kann, so wird man den gekennzeichneten Reductionsprocess auch nur eine *endliche* Anzahl von Malen ausüben können. Am Schlusse müssen wir offenbar eine Basis erhalten, bei welcher keine einzige ganze Form mehr die Gestalt (10) aufweisen kann; diese Basis aber ist dann gerade eine Minimalbasis*), d. h. eine Basis von kleinster Discriminante.

§ 7. Formentheoretische Darstellungen der Integrale der Fläche F_n.

Um für die Integrale der F_n den vollen Anschluss an die soeben entwickelten formentheoretischen Principien zu gewinnen, bilden wir uns zunächst auf der Fläche F_n einen homogenen Differentialausdruck, den wir genau nach Art des in der Theorie der Modulformen oft gebrauchten Differentials $\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1$ construieren.

Wir schreiben nämlich:

$$(1) \qquad d\zeta = z_1 dz_2 - z_2 dz_1 = - z_2^2 dz.$$

Um mit diesem $d\zeta$ bequem rechnen zu können, verabreden wir folgende auf beliebige Differentiale der Fläche F_n bezügliche Sprechweise:

Es werde die Umgebung eines Punktes z_0 der F_n vermöge der Function w der Fläche conform auf die *einfach* bedeckte Umgebung des Punktes w_0 der w-Ebene abgebildet. In diesem Falle sagen wir, *das Differential dw sei im Punkte z_0 der F_n endlich und von Null verschieden.* Ist aber dw' irgend ein anderes zur F_n gehörendes Differential, so sagen wir, *es verschwinde dw' im Punkte z_0 der F_n μ-fach, falls in erster Annäherung die Gleichung besteht:*

$$(2) \qquad \frac{dw'}{dw} = \text{const.}\ (w - w_0)^\mu,$$

wo die Constante endlich und von Null verschieden ist. Aus der Angabe des Verhaltens zweier Differentiale auf der Fläche ist dann unmittelbar das Verschwinden und Unendlichwerden der durch ihren Quotienten dargestellten Function oder Form abzulesen.

Stellen wir nun gleich in Übereinstimmung mit dieser Verabredung das Verhalten des homogenen Differentialausdrucks $d\zeta$ auf der

*) In der Kronecker'schen Terminologie drückt sich das Sachverhältnis so aus, dass die Discriminante einer Minimalbasis nur noch *wesentliche* Factoren aufweist; dieselben liefern nämlich, einzeln gleich Null gesetzt, diejenigen Stellen der z-Ebene, über welchen Verzweigungen der Fläche F_n gelegen sind, jede dieser Stellen mit der durch die Verzweigungsart bedingten Multiplicität.

F_n fest! Bei $z = \infty$ hat man w etwa $= z^{-1}$ zu setzen und findet $d\zeta = z_1^2 dw$, hier also bleibt $d\zeta$ endlich und von Null verschieden. In einem bei $z = z_0$ gelegenen Verzweigungspunkte, in welchem $\varkappa$ Blätter zusammenhängen, wird man $w - w_0$ mit $\sqrt[\varkappa]{z - z_0}$ identificieren können und findet:

$$\frac{d\zeta}{dw} = - \varkappa z_2^2 (w - w_0)^{\varkappa - 1}.$$

Indem wir zwischendurch gleich auch noch die gewöhnlichen Punkte der Fläche ohne Mühe erledigen, ergiebt sich das Resultat: *Das homogene Differential zweiter Dimension $d\zeta$ ist auf der Fläche überall endlich, dasselbe verschwindet allein in den Verzweigungspunkten, und zwar im einzelnen von der Ordnung $(\varkappa - 1)$, wenn in demselben $\varkappa$ Blätter zusammenhängen.*

Im Anschluss hieran lässt sich, wie wir beiläufig erwähnen wollen, der Begriff der in § 4 erwähnten *kanonischen Flächen F_n* leicht angeben. Man frage nach der Existenz einer ganzen algebraischen Form $\gamma(z_1, z_2)$, welche auf der Fläche genau in derselben Weise verschwindet wie $d\zeta$. Es giebt natürlich höchstens *eine* Form $\gamma(z_1, z_2)$ dieser Art (von einer multiplicativen Constanten abgesehen); existiert sie aber wirklich, so nennen wir die Fläche F_n eine kanonische. Der Charakter einer kanonischen Fläche kann hiernach dahin angegeben werden, *dass auf derselben ein homogener Differentialausdruck $\frac{d\zeta}{\gamma}$ existiert, der allenthalben endlich und von Null verschieden ist.* Die Gesamtordnung des Verschwindens von $\gamma(z_1, z_2)$ auf F_n ist:

$$(3) \qquad \sum (\varkappa - 1) = 2p - 2 + 2n,$$

wo man den hier rechter Hand gegebenen Ausdruck der linksstehenden Summe aus Formel (2) in I p. 494 verificieren wolle. Nach dem Satze von der Wertigkeit der Formen auf F_n wird also die Dimension ν von γ in den z_i die folgende sein:

$$\nu = 2 + \frac{2p-2}{n}.$$

Die Blätteranzahl n einer kanonischen Fläche F_n ist hiernach ein Teiler von $2p - 2$. — Inzwischen verweisen wir wegen der weiteren Theorie dieser interessanten Flächen auf die genannte Abhandlung von Klein in Bd. 36 der Math. Annalen*).

Zur allgemeinen Fläche F_n zurückkehrend, stellen wir jetzt leicht fest, dass das Differential dj eines Integrals erster Gattung j auf

*) Vergl. ebenda (pag. 23) die allgemeine Begriffsbestimmung der *kanonischen Curven* eines beliebig ausgedehnten Raumes.

der Fläche überall endlich ist. Benennt man also im Anschluss an I p. 543:

$$\frac{dj}{d\zeta} = \varphi(z_1, z_2) \tag{4}$$

als eine „*Form* φ“ oder auch als eine *Form erster Gattung der* F_n, so wird eine derartige Form auf der F_n jedenfalls nur in den Verzweigungspunkten unendlich werden, und zwar im einzelnen, allgemein zu reden, von der Ordnung $(\varkappa - 1)$. Zufolge (3) ist demnach die Gesamtordnung des Unendlichwerdens einer Form φ auf der Fläche $2p - 2 + 2n$. Mit Rücksicht auf die Dimension (-2) von φ ergeben sich daraufhin aus dem Wertigkeitssatze $(2p - 2)$ Nullpunkte für φ auf der F_n; dies ist mit dem bezüglichen Resultate von I p. 545 in Übereinstimmung.

Natürlich kann man die Formen erster Gattung auch auf independentem Wege definieren. *Jede algebraische Form* $(-2)^{\text{ter}}$ *Dimension der* F_n, *welche nur in den Verzweigungspunkten unstetig wird, und zwar im einzelnen in einer Ordnung* $< \varkappa$, *ist eine Form erster Gattung.* Solcher Formen giebt es dann auf F_n notwendig gerade p linear-unabhängige, und in ihnen stellen sich die Integrale erster Gattung vermöge der Gestalt dar:

$$j = \int \varphi(z_1, z_2) \cdot d\zeta. \tag{5}$$

Bei den Integralen *dritter* Gattung $Q_{\xi\,\eta}^{x\,y}$ müssen wir an der oben begründeten Auffassung festhalten, dass wir das einzelne Integral als Function der *beiden* unabhängig veränderlichen Stellen x, ξ ansehen. Indem wir also das Differential $d\zeta$, gebildet für einen besonderen Wert z der unabhängigen Variabelen, durch $d\zeta_z$ bezeichnen, haben wir zumal für unsere Integrale dritter Gattung die beiden „partiellen“ Differentiale $\partial\zeta_x$, $\partial\zeta_\xi$ zu unterscheiden. Um von $Q_{\xi\,\eta}^{x\,y}$ zu einem Ausdruck zu gelangen, der sowohl von der Stelle x wie ξ der Fläche algebraisch abhängt, müssen wir *zweimal* differenzieren *und haben in*

$$\frac{\partial^2 Q_{\xi\,\eta}^{x\,y}}{\partial\zeta_x \partial\zeta_\xi} \tag{6}$$

eine von den beiden Stellen x *und* ξ *der Fläche abhängende algebraische Form* $(-2)^{\text{ter}}$ *Dimension.*

Untersuchen wir jetzt gleich den Charakter dieser Form (6) näher! Bei stehendem Werte der einen Variabeln wird die Form (6), in Abhängigkeit von der anderen Stelle gedeutet, $(\varkappa - 1)$-fach ∞ in jedem Verzweigungspunkte. Ausserdem aber kann Unendlichwerden *nur* bei Coincidenz der beiden Stellen x und ξ eintreten, und zwar verhält sich dann die Form (6) zufolge § 1 wie:

$$\frac{\partial^2 Q_{\xi\,\eta}^{x\,y}}{\partial \zeta_x \partial \zeta_\xi} = \frac{1}{(x_1 \xi_2 - x_2 \xi_1)^2} + \cdots,$$

wo die ausgelassenen Glieder bei Coincidenz von x und ξ endlich bleiben. Es wird hiermit evident, dass wir in

$$(7) \qquad (x_1 \xi_2 - x_2 \xi_1)^2 \frac{\partial^2 Q_{\xi\,\eta}^{x\,y}}{\partial \zeta_x \partial \zeta_\xi} = \Psi(x, \xi)$$

eine von zwei Stellen der Fläche algebraisch abhängende *Function* von folgenden Eigenschaften haben: *sie wird als Function jeder der beiden Stellen im einzelnen Verzweigungspunkt* $(\varkappa - 1)$*-fach unendlich, und sie verschwindet bei Coincidenz der „Argumente"* x *und* ξ *in allen* n *Blättern der* F_n *je zweifach, mit Ausnahme eines einzelnen Blattes, wo sie endlich bleibt.* Da sonstige Unstetigkeitspunkte nicht auftreten, so bleiben nach dem Wertigkeitssatze noch $2p$ Nullpunkte von Ψ unbekannt. Hierbei wolle man bemerken, dass zufolge (7) § 2 die Function Ψ noch p^2 unbestimmte Constante enthält. Jener Formel entspricht es in der That genau, wenn wir die allgemeinste Function $\Psi'(x, \xi)$ aus irgend einer particulären $\Psi(x, \xi)$ in der Gestalt zusammensetzen:

$$(8) \quad \Psi'(x,\xi) = \Psi(x,\xi) + (x_1 \xi_2 - x_2 \xi_1)^2 \sum_{i,k} c_{ik}\, \varphi_i(\xi_1, \xi_2) \cdot \varphi_k(x_1, x_2),$$

was ja aus (7) § 2 vermöge unserer jetzigen Formel (7) unmittelbar hervorgeht.

Jede der hiermit erhaltenen Functionen $\Psi(z, z')$ zweier Punkte z, z' der F_n soll jetzt als *eine zur* F_n *gehörende Function dritter Gattung* benannt werden. Es ist leicht ersichtlich, *dass dieselbe durch die angegebenen Eigenschaften völlig charakterisiert ist.* In der That weist man umgekehrt leicht nach, dass:

$$(9) \qquad Q_{\xi\,\eta}^{x\,y} = \int_\eta^\xi \int_y^x \frac{\Psi(z, z')}{(z_1 z_2' - z_2 z_1')^2} \cdot d\zeta_z\, d\zeta_{z'}$$

ein Integral dritter Gattung der F_n ist. Diese Formel nun liefert uns also *das formentheoretische Bildungsgesetz für die Integrale dritter Gattung der Fläche* F_n.

Die Integrale *zweiter* Gattung ordnen sich, wie schon im § 1 am Schlusse bemerkt wurde, in den jetzigen Gedankengang einfach dadurch ein, dass wir die $Q_{\xi\,\eta}^{x\,y}$ allein nach der Stelle ξ differenzieren. In der That ist:

$$(10) \qquad Z_\xi = \frac{\partial Q_{\xi\,\eta}^{x\,y}}{\partial \zeta_\xi}$$

ein Integral der F_n mit nur *einem* bei ξ gelegenen algebraischen Un-

stetigkeitspunkt erster Ordnung. Sollen wir zur besseren Unterscheidung statt durch ξ den „Parameter“ des Integrals zweiter Gattung durch t bezeichnen, *so wird sich aus* (9) *als formentheoretisches Bildungsgesetz des Integrals zweiter Gattung* Z_t *das folgende ergeben:*

$$Z_t^{xy} = \int_y^x \frac{\Psi(z, t)}{(z_1 t_2 - z_2 t_1)^2} d\zeta_z. \tag{11}$$

Dieses Integral ist in z_1, z_2 von *nullter* Dimension, dagegen weist es *in* t_1, t_2 *die Dimension* (-2) *auf;* es ist also nicht eine Function, sondern eine *Form* der Unstetigkeitsstelle t.

Ist (1) insbesondere das Normalintegral zweiter Gattung mit dem Parameter t, so ergiebt sich aus (2) § 2 als Periodenschema desselben

$$0, 0, \ldots, 0 \mid 2i\pi\varphi_1(t_1, t_2), \ldots, 2i\pi\varphi_p(t_1, t_2),$$

wobei die φ die *„normalen“* Formen erster Gattung sind. Hier also haben wir nun in homogener Gestalt die Resultate von I p. 532 wiedergewonnen.

§ 8. Notizen über die auf eine ebene Curve zu gründende Formentheorie.

Unter den allgemeinen Ansätzen des § 4 folgte auf den eben behandelten Fall der F_n derjenige, welcher eine *ebene* Curve zur Grundlage für die Einführung der Formentheorie machte. Es ist interessant zu vergleichen, in wie weit sich bei der Durchführung des hiermit gemeinten Ansatzes die soeben auf der F_n entwickelten formentheoretischen Gesichtspunkte wieder vorfinden. Dabei betrachten wir aber nur den allereinfachsten Fall, *dass nämlich die ebene Curve* C_n *singuläre Punkte überhaupt nicht aufweist.* Einzig dieser Fall wird nämlich bei unseren späteren Untersuchungen (im sechsten Kapitel) zur Geltung kommen; im übrigen verweisen wir auf die in § 4 genannten Arbeiten über den fraglichen Gegenstand. Wir betonen hier von vornherein, dass der Charakter unserer nachfolgenden Überlegungen ein etwas allgemeinerer ist, als er den hier in Betracht kommenden Entwicklungen der Geometer innewohnt. Dies kommt sogleich bei der Definition der *ganzen* Formen zur Geltung; und es ist, wie man leicht sehen wird, die fragliche Abweichung von der herkömmlichen Darstellung der Geometer in dem engeren Anschluss an Riemann bedingt, den unsere Überlegung nimmt.

Es sei die zu Grunde liegende Curve n^{ter} Ordnung C_n dargestellt durch die Gleichung:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0. \tag{1}$$

Jede algebraische *Function* des Gebildes ist alsdann eine rationale homogene Function *nullter* Dimension der x_i, und wir definieren dementsprechend *als die algebraischen Formen unseres Gebildes die homogenen rationalen Verbindungen der* x_i *von beliebiger Dimension* ν. Ist eine solche Form auf der Curve C_n überall endlich, so heisse sie eine *ganze* algebraische Form auf der C_n und werde speciell durch $G(x_1, x_2, x_3)$ bezeichnet. Hierher gehören insbesondere die homogenen ganzen rationalen Verbindungen der x, die wir $g(x_1, x_2, x_3)$ nennen; aber es ist zunächst eine offene Frage, ob neben diesen g auch noch weitere Formen G existieren mögen oder nicht.

Um den Sinn dieser Frage an einem Beispiel zu ermessen, nehme man für den Augenblick an, die Curve C_n habe einen Doppelpunkt. Auf einer Riemann'schen Fläche F_m, auf welche wir die C_n abbilden mögen, wird jener Doppelpunkt *zwei getrennt liegende* Punkte z_0, z_0' liefern; und nun bemerke man, dass in den beiden unterschiedenen, im Doppelpunkt coincidierenden, Stellen unseres Gebildes C_n jede Form $g(x_1, x_2, x_3)$ *gleiche* Werte aufweist. Es lassen sich aber ohne Mühe Formen $G(x_i)$ nachweisen, welche an den beiden fraglichen Stellen *keine* gleichen Werte aufweisen, und welche eben deshalb *nicht* als Formen $g(x_i)$ darstellbar sind.

Im Gegensatz zu diesen Verhältnissen gilt nun für unsere *singularitätenfreie* ebene Curve C_n der Satz, *dass ihre sämtlichen ganzen Formen* $G(x_i)$ *bereits von den* $g(x_i)$ *geliefert werden*. Indessen werden wir diesen Satz erst nach Erledigung einiger Zwischenbetrachtungen beweisen können, welche letztere übrigens auch an sich wichtig sind.

Wir werden vor allem das *Geschlecht* p unseres Gebildes bestimmen wollen und wählen uns zu dem Ende in der Ebene der C_n einen Punkt mit den Coordinaten c_1, c_2, c_3 aus, der den beiden folgenden Bedingungen zu genügen hat: es soll der Punkt (c_i) nicht auf der Curve C_n liegen, und überdies sollen unter den $n(n-1)$ Tangenten von (c_i) an die Curve keine zwei coincidieren, eine Bedingung, der leicht Genüge geschieht. Ist (a_i) irgend ein zweiter Punkt, so soll eine dreigliedrige Determinante wie:

$$\begin{vmatrix} x_1, & a_1, & c_1 \\ x_2, & a_2, & c_2 \\ x_3, & a_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

stets abgekürzt durch (x_1, a_2, c_3) bezeichnet werden. Man wird daraufhin das Geradenbüschel mit dem Centrum (c_i) durch:

$$(2) \qquad (x_1, a_2, c_3) - z \cdot (x_1, b_2, c_3) = 0$$

darstellen können, wo die beiden Punkte (a_i), (b_i) der Coordinaten-

ebene einzig der Bedingung zu genügen haben, mit (c_i) nicht auf einer Geraden zu liegen. Umgekehrt stellt:

$$z = \frac{(x_1, a_2, c_3)}{(x_1, b_2, c_3)}$$

auf der C_n eine n-wertige Function dar, welche die C_n auf eine n-blättrige Fläche F_n abbildet. Die Verzweigungspunkte dieser F_n werden von den $n(n-1)$ Berührungspunkten der von (c_i) an die C_n gehenden Tangenten geliefert, und im einzelnen dieser Punkte hängen zufolge unserer Annahme stets *zwei* Blätter zusammen. *Nach bekannten Regeln ergiebt sich daraus als Geschlecht unserer Riemann'schen Fläche:*

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \tag{3}$$

Auf Grund dieser Formel nehmen wir $n > 2$ an, um nicht mit einem Gebilde des Geschlechtes $p = 0$ zu thun zu haben. —

Das merkwürdigste Element der auf die C_n gegründeten Formentheorie ist der nachfolgende bereits von Aronhold*) angegebene *Differentialausdruck* — $(n-3)^{\text{ter}}$ *Dimension:*

$$d\xi = \frac{(c_1, x_2, dx_3)}{c_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}}, \tag{4}$$

in welchem die c die Coordinaten irgend eines Punktes in der Ebene der C_n sind. Man kann leicht zeigen**), *dass der Wert des Differentials $d\xi$ auf der C_n unabhängig von der Auswahl des Punktes (c_i) ist.* Der Nenner von $d\xi$ wird offenbar auf der C_n *nur* in den Berührungspunkten der Tangenten von (c_i) aus verschwinden. Diese Stellen liefern aber gerade auch die Verschwindungspunkte des Zählers von $d\xi$, insofern *nur* für diese Stellen die drei Punkte (c_i), (x_i), $(x_i + dx_i)$ in einer geraden Linie liegen. Man findet durch solche Überlegung, *dass das Differential* — $(n-3)^{\text{ter}}$ *Dimension $d\xi$ auf der ganzen C_n „endlich und von Null verschieden" ist****).

Sei jetzt $G^{(n-3)}(x_i)$ irgend eine ganze algebraische Form $(n-3)^{\text{ter}}$ Dimension der C_n, so wird offenbar $G^{(n-3)} \cdot d\xi$ ein überall endliches Differential *nullter* Dimension auf der C_n vorstellen; wir schliessen, *dass:*

$$j = \int G^{(n-3)}(x_i) \cdot d\xi, \tag{5}$$

längs der Curve C_n erstreckt, ein überall endliches Integral liefert und finden umgekehrt leicht, dass sich jedes Integral erster Gattung in der Gestalt (5) *darstellen lässt.* Insbesondere bilde man nun die zu den

*) Berliner Monatsberichte von 1861.

**) Siehe z. B. Clebsch-Gordan, l. c. pag. 1.

***) Hiernach liefert die ebene C_n ein einfaches Beispiel einer „kanonischen" Curve.

rationalen ganzen Formen $g^{(n-3)}$ gehörenden Integrale j und bestimme die Anzahl linear-unabhängiger Integrale j dieser Art. Da der allgemeine Ausdruck $g^{(n-3)}$ im ganzen gerade $\frac{(n-1)(n-2)}{2} = p$ Glieder hat, so finden wir, als zu den $g^{(n-3)}$ gehörig, bereits p unabhängige Integrale j; dieses aber heisst: *Die ganzen Formen $G^{(n-3)}$ der Dimension $(n-3)$ auf der C_n sind bereits durch die in den x_i rationalen ganzen $g^{(n-3)}$ erschöpft**).

Eine einzelne Gleichung $g^{(n-3)} = 0$ hat man in der Ebene als eine Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung C_{n-3} zu deuten. Der Sinn der ganzen Zahl τ, welche im Riemann-Roch'schen Satze irgend einem System von m Punkten der Grundcurve C_n zuerteilt wird, ist hiernach der, *dass τ die Anzahl linear-unabhängiger Curven C_{n-3} ist, welche alle zugleich durch jene m Punkte der Grundcurve hindurchgehen.* Wir wollen daraufhin gleich abzählen, wie gross die Zahl τ für den Schnitt der C_n mit $x_3^\nu = 0$, d. i. für das ν-fach gezählte Schnittsystem der C_n mit der Coordinatenaxe $x_3 = 0$ ist. *Für $\nu > n - 3$ haben wir natürlich $\tau = 0$.* Soll aber eine Curve einer Ordnung $< n$ durch die n Schnittpunkte der C_n mit der *Geraden* $x_3 = 0$ gehen, so muss sie diese Gerade vollständig enthalten. Man folgert daraus, dass eine C_{n-3}, welche durch die $n\nu$ Schnittpunkte von C_n und $x_3^\nu = 0$ geht, in die ν-fach zählende Gerade $x_3 = 0$ und eine $C_{n-\nu-3}$ zerfällt. *Daraufhin ergiebt sich als die gesuchte Zahl τ im Falle $\nu \leqq n-3$:*

$$\tau = \frac{(n-\nu-2)(n-\nu-1)}{2}. \tag{6}$$

Wir kehren nun zur allgemeinen Betrachtung unserer ganzen Formen $G^{(\nu)}$ zurück und bestimmen aus dem Riemann-Roch'schen Satze die Anzahl σ_ν der linear-unabhängigen $G^{(\nu)}$ für die einzelne Dimension ν zu $n\nu - p + \tau + 1$. Trägt man für p und τ die berechneten Werte ein, so folgt für $\nu > n - 3$:

$$\sigma_\nu = n\nu - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1,$$

wogegen für $\nu < n - 3$:

$$\sigma_\nu = n\nu - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(n-\nu-1)(n-\nu-2)}{2} + 1$$

ist. Nach kurzer Rechnung setzen sich die so gewonnenen Ausdrücke von σ_ν um in die Gestalten:

*) Wegen der Bildung der Integrale 2ter und 3ter Gattung sehe man Clebsch-Gordan, l. c. p. 1 ff. sowie auch Clebsch-Lindemann, *Vorles. über Geometrie*, Bd. I p. 789 ff.

$$(7) \qquad \sigma_\nu = \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2} - \frac{(\nu-n+1)(\nu-n+2)}{2} \text{ für } \nu > n-3,$$

$$(8) \qquad \sigma_\nu = \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2} \text{ für } \nu \leqq n-3.$$

Für $\nu = n-1$ und $n-2$ liefern beide Formeln (7) und (8) den gleichen Betrag; man kann also auch die Formel (8) auf alle $\nu < n$ beziehen, worauf dann (7) allein noch für $\nu \geqq n$ gilt.

Auf der anderen Seite bilde man bei vorgegebenem ν die Formen $g^{(\nu)}$. Im allgemeinen Ausdruck $g^{(\nu)}$ sind $\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}$ unabhängige Coefficienten enthalten. Aber man bemerke, dass für $\nu \geqq n$ der einzelne Ausdruck $g^{(\nu)}$ auf der C_n stets die nämliche Form liefert wie

$$(9) \qquad g_1^{(\nu)} = g^{(\nu)} + f \cdot g^{(\nu-n)},$$

wobei f die linke Seite der Curvengleichung (1) ist, während $g^{(\nu-n)}$ ein völlig willkürlich bleibender Ausdruck $(\nu-n)^{\text{ter}}$ Dimension ist. Da aber $g^{(\nu-n)}$ noch $\frac{(\nu-n+1)(\nu-n+2)}{2}$ Coefficienten enthält, so können wir ohne Änderung der *Form* $g^{(\nu)}$ im Ausdruck des $g^{(\nu)}$ durch x_i $\frac{(\nu-n+1)(\nu-n+2)}{2}$ Coefficienten mit beliebig zu wählenden Werten identificieren. Indem wir zusammenfassen, folgt, *dass die Gesamtzahl linear-unabhängiger* $g^{(\nu)}$ *bei der einzelnen Dimension* ν *genau die in* (7) *bez.* (8) *angegebene Anzahl* σ_ν *ist,* falls wir nur noch nachweisen können, dass für zwei Ausdrücke $g^{(\nu)}$ und $g_1^{(\nu)}$, welche auf der Grundcurve $f=0$ die gleiche Form darstellen, notwendig die Identität (9) besteht.

Diese letztere Behauptung wird aber selbstverständlich durch Hinweis auf den Umstand, dass die Gleichung $g_1^{(\nu)} - g^{(\nu)} = 0$ entweder identisch erfüllt sein muss oder eine C_ν darstellt, welche die C_ν als Bestandteil enthält. Es ist auf diesem Wege unser obiger Satz, *dass auf der singularitätenfreien Curve* C_n *die* $G^{(\nu)}$ *bereits vollständig durch die* $g^{(\nu)}$ *geliefert werden,* zur Evidenz gebracht.

Wir haben die vorstehende Entwicklung so ausführlich gegeben, weil dieselbe bei den sonst üblichen Darstellungen der Geometer nicht in der hier vorliegenden Gestalt zur Geltung gelangt. Die Geometer beginnen gar nicht, wie wir hier, mit dem Begriff der allgemeinsten algebraischen Function, die zu einem Gebilde gehört, oder des allgemeinsten zugehörigen überall endlichen Integrals; vielmehr beginnen sie mit den rationalen ganzen Verbindungen der x_i, die wir g nannten, und bilden von ihnen aus die Integrale:

$$(10) \qquad \int g^{(n-3)}(x_i) \,.\, d\xi,$$

deren Anzahl sie p nennen. Dann aber haben sie hinterher die In-

varianz der so definierten Zahl p, bez. diejenige der Integrale (10), gegenüber rationaler Transformation noch besonders nachzuweisen. So nehmen überhaupt die sämtlichen Sätze der Theorie bei der Darstellung der Geometer eine ganz andere Anordnung an, und insbesondere ist die Folge, dass einige Sätze, deren Beweise bei ihnen schwer sind, für uns hier leicht werden und umgekehrt.

Um ein Beispiel anzuführen, so wird für unsere C_n der sog. *Restsatz**) äusserst selbstverständlich; wir wollen denselben, wie folgt, formulieren: *Liegen irgend zwei (im Sinne von* I p. 562) *äquivalente Systeme zu je m Punkten der Curve vor, und wird das erste unter ihnen durch weitere μ Punkte der C_n zu dem Nullpunktsystem einer Form $g_1^{(\nu)}(x_i)$ ergänzt, so ergänzen eben jene μ Zusatzpunkte auch das zweite jener beiden äquivalenten Systeme zu dem Nullpunktsystem einer Form $g_2^{(\nu)}(x_i)$ der Dimension ν.* Zum Beweise brauchen wir nur auf die m-wertige algebraische Function w zurückzugehen, deren m Nullpunkte in den m Punkten des zweiten Systems gelegen sind, während die Unstetigkeitspunkte die m Punkte des ersten Systems bilden. Das Product $g_1^{(\nu)} \cdot w$ ist dann sicher eine *ganze* Form ν^{ter} Dimension $G^{(\nu)}$ und, da alle diese Formen bereits durch die rationalen ganzen $g^{(\nu)}$ geliefert werden, so ist auch $g_1^{(\nu)} \cdot w$ eine solche. Diese Form $g_1^{(\nu)} \cdot w$, die wir nun $g_2^{(\nu)}$ nennen, ist es aber gerade, deren Existenz der Restsatz behauptet.

§ 9. Die Primform $P(x, y)$ und ihre Fundamentaleigenschaften.

Nach dem Excurse über die Formentheorie auf ternärer Basis x_1, x_2, x_3 kehren wir zur Fläche F_n und damit zur Formentheorie z_1, z_2 zurück. Es gilt jetzt, die Ableitung des wichtigsten Hülfsmittels unserer künftigen Untersuchungen zu bringen, nämlich der zur Fläche F_n gehörenden Weierstrass'schen Primfunction, die wir jedoch gleich in der von Klein angegebenen Weise zur *Primform* $P(x, y)$ auszugestalten**).

Zu diesem Ende bilden wir das zur F_n gehörende Integral 3ter Gattung mit den Parametern x, y, wobei wir über die Normierung dieses Integrals $Q_{x,y}$ vorab noch gar keine nähere Bestimmung treffen wollen. Das Besondere soll nun sein, dass wir die Grenzen des Inte-

*) Cf. die für die geometrische Grundlegung der fraglichen Sätze fundamentale, in I oft genannte Arbeit von Brill und Nöther, *Über algebraische Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie*, Math. Ann. Bd. 7 (1873).

**) Eine sehr gründliche Untersuchung der Primform im Falle der hyperelliptischen Gebilde hat Hr. Burkhardt in seinen *„Beiträgen zur Theorie der hyperelliptischen Sigmafunctionen"* geliefert, Math. Ann. Bd. 32 (1888).

grals in unmittelbarer Nähe der Punkte y bez. x auf der F_n wählen, so dass es sich um den Ausdruck $Q_{x,y}^{x+dx, y+dy}$ handelt, wo dx und dy sowie die bezüglichen Integrationswege gegen Null convergieren sollen. Von hier aus gehen wir endlich noch zur Exponentialgrösse:

$$(1) \qquad E(x,y) = \left[e^{Q_{x,y}^{x+dx, y+dy}} \right]_{\lim dx=0,\, dy=0}$$

über, und die merkwürdigen Eigenschaften dieser letzteren zu zeigen, ist unsere nächste Aufgabe.

Indem wir vorab z. B. aus (9) p. 496 mühelos die Regel

$$(2) \qquad E(y,x) = E(x,y)$$

entnehmen, bemerken wir vor allem, dass die Eigenschaften von $E(x,y)$ gegenüber eindeutiger Transformation der Riemann'schen Fläche F_n *invariant* sind, wie denn überhaupt die Integrale $Q_{\xi\eta}^{xy}$ unseres Gebildes mit ihren sämtlichen Eigenschaften von der besonderen Fläche F_n, die wir zu Grunde legen mögen, völlig unabhängig sind. Wenn wir demnach bei der Untersuchung von $E(x,y)$ für einzelne Punktepaare x, y annehmen, dass weder x noch y ein Verzweigungspunkt der F_n sei, so hat dies gleichwohl für das entspringende Resultat unserer Überlegung keinerlei Einschränkung im Gefolge.

Um jetzt die Grösse $E(x,y)$ in eine der Untersuchung zugängliche Form zu bringen, gehen wir auf die in p. 483 bewiesene Formel:

$$(3) \qquad \sum_{k=0}^{n-1} Q_{\xi,\eta}^{x^{(k)}, y^{(k)}} = \log \frac{(x^{(0)}-\xi)\,(y^{(0)}-\eta)}{(x^{(0)}-\eta)\,(y^{(0)}-\xi)}$$

zurück, wo einerseits die n Punkte $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(n-1)}$ in der F_n über einander liegen, andrerseits aber auch die n Punkte $y^{(0)}, \ldots, y^{(n-1)}$, während über die Integrationsbahnen die l. c. gegebenen Bestimmungen gelten. In (3) schreibe man nun $\xi = x$, $\eta = y$ und lasse sodann auf F_n die Stellen $x^{(0)}, y^{(0)}$ in unmittelbare Nähe von x bez. y rücken, indem man insbesondere $x^{(0)} = x + dx$, $y^{(0)} = y + dy$ einträgt; die Stellen $x^{(1)}, \ldots, x^{(n-1)}$ sind alsdann die $(n-1)$ über x gelegenen Punkte der F_n, während die $(n-1)$ Punkte $y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}$ über y liegen. Formel (3) liefert daraufhin unmittelbar:

$$(4) \qquad Q_{x,y}^{x+dx, y+dy} + \sum_{k=1}^{n-1} Q_{x,y}^{x^{(k)}, y^{(k)}} = \log \left[\frac{-\,d\zeta_x\, d\zeta_y}{(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2} \right],$$

wobei wir rechter Hand sogleich die homogene Schreibweise eingeführt haben. Weiter aber gewinnen wir für $E(x,y)$ die nachfolgende Darstellung:

$$(5) \qquad E(x,y) = -\frac{d\zeta_x\, d\zeta_y}{(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2} \cdot e^{-\sum\limits_{k=1}^{n-1} Q_{x,y}^{x^{(k)},\, y^{(k)}}},$$

wo wir nun die einzelnen Bestandteile rechter Hand näher zu untersuchen haben.

Erstlich haben wir im Zähler der rechten Seite (5) das Product der beiden Differentiale $d\zeta_x, d\zeta_y$, die für sämtliche in Betracht kommende Punktepaare x, y im obigen Sinne endlich und nicht-verschwindend sind. Hierbei ist nur angenommen, dass die Stellen x und y nicht gerade Verzweigungspunkte der F_n sind; aber, wie wir schon vorhin auseinandersetzten, involviert diese Annahme zufolge der Invarianz der Grösse $E(x,y)$ gegenüber rationaler Transformation keinerlei Beschränkung für die abzuleitenden Resultate. — Der Nenner in (5) und der Exponentialfactor sind stets endlich und von Null verschieden, wenn der Punkt x nicht mit y coincidiert und auch zugleich in der F_n nicht über y gelegen ist. Tritt nun letzterer Fall ein, d. h. liegen die Punkte x und y in verschiedenen Blättern der F_n genau über einander, so fällt einer der Punkte $x^{(k)}$ mit y zusammen und einer der Punkte $y^{(k)}$ mit x. Unter den $(n-1)$ Integralen Q im Exponenten (5) bleiben also $(n-3)$ endlich, während jedes der beiden übrigen zufolge § 1 unendlich wird wie $-\log(x-y)$. Der Exponentialfactor selbst wird daraufhin wie $(x-y)^2$ verschwinden, d. i. genau in demselben Grade wie der Nenner (5), so dass $E(x,y)$ selbst *endlich und von Null verschieden* bleibt. Der Fall der Coincidenz der Stellen x und y auf der F_n ist jetzt allein noch rückständig; tritt derselbe ein, so werden alle Integrale im Exponenten (5) einzeln Null, so dass

$$(6) \qquad E(x,y) = \frac{-d\zeta_x^2}{(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}$$

wird, wo also der Nenner algebraisch von der Ordnung *zwei* verschwindet.

Indem wir die oben für die Differentiale erster Ordnung betreffs ihres Verschwindens und Unendlichwerdens verabredete Sprechweise sofort auch auf Differentiale zweiter Ordnung übertragen können, haben wir das Resultat: *$E(x,y)$ ist ein von zwei Stellen x, y der F_n abhängendes Differential zweiter Ordnung, welches allenthalben von Null verschieden ist; zugleich ist dasselbe stets endlich, ausser im Falle der Coincidenz der beiden Stellen x, y, wo $E(x,y)$ in der Ordnung zwei unendlich wird.* Dass wirklich diese Regel auch für die Verzweigungspunkte der F_n gilt, wird man jetzt hinterher, wenn man will, am Ausdruck (5) leicht direct bestätigen. In der That wird der Exponentialfactor (5) im einzelnen Verzweigungspunkt $(\varkappa - 1)$-fach ∞ und compensiert

solcherweise das $(\varkappa - 1)$-fache Nullwerden von $d\zeta_x$ bez. $d\zeta_y$ gerade vollständig, u. s. w.

Um wieder zu einer endlichen Grösse der Fläche F_n zu gelangen, multiplicieren wir das Product $-d\zeta_x d\zeta_y$ mit dem reciproken Werte von E. Dann aber wollen wir der Einfachheit halber gleich noch das Normalintegral Π dritter Gattung an Stelle des allgemeinen Q gebrauchen*), und bilden somit den Ausdruck:

$$(7) \qquad - d\zeta_x d\zeta_y \, e^{-\Pi_{x,y}^{x+dx,\, y+dy}}, \quad \lim dx = 0,\ dy = 0,$$

Von den Eigenschaften dieses Ausdrucks, die aus denen der drei zusammensetzenden Factoren unmittelbar hervorgehen, betonen wir zunächst nur, dass derselbe bei Coincidenz der beiden Stellen x, y algebraisch von der Ordnung *zwei* verschwindet, dass er *nirgends unstetig* wird, und dass sonstige Nullpunkte nur noch durch die von der einzelnen Stelle x bez. y allein abhängenden Factoren $d\zeta_x, d\zeta_y$ in bekannter Weise geliefert werden. Bei dieser Sachlage entschliessen wir uns, aus dem Ausdruck (7) auch noch die Quadratwurzel zu ziehen und gelangen solcherweise zu derjenigen Form $P(x_1, x_2 \mid y_1, y_2)$ oder kurz $P(x, y)$, welche wir weiterhin als *die zur Fläche F_n gehörende Primform* benennen; die Definition derselben ist somit gegeben durch:

$$(8) \qquad P(x, y) = \sqrt{- d\zeta_x d\zeta_y \cdot e^{-\Pi_{x,y}^{x+dx,\, y+dy}}}, \quad \lim dx = 0,\ dy = 0,$$

und wir mögen aus (5) nebenher auch noch die Darstellung:

$$(9) \qquad P(x, y) = (x_1 y_2 - x_2 y_1)\, e^{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \Pi_{x,y}^{x^{(k)},\, y^{(k)}}}$$

anmerken.

Die Fundamentaleigenschaften der Primform sind aber zufolge der bisherigen Entwicklungen diese:

1) *Sie ist eine von zwei Stellen der F_n abhängende analytische, aber nicht mehr algebraische, Form der Fläche von der Dimension $+1$ in jeder Variabelenreihe.*

2) *Sie ist auf der Fläche allenthalben endlich und stetig.*

3) *Sie verschwindet auf der F_n algebraisch in erster Ordnung falls x und y coincidieren; ausserdem verschwindet sie im Grade $\frac{1}{2}(\varkappa - 1)$ als Function ihres einen Argumentes x oder y im einzelnen Verzweigungs-*

*) In den genannten Arbeiten der Herren Klein und Burkhardt wird von der hierin liegenden Specificierung der Primform kein Gebrauch gemacht. Die in diesen Arbeiten gebräuchliche Bezeichnung $\Omega(x, y)$ stellt demgemäss die allgemeine Primform vor, der gegenüber das im Texte sogleich einzuführende $P(x, y)$ die „transcendent normierten" Primform liefert.

*punkt, ganz unabhängig von der besonderen Lage des anderen Argumentes y bez. x**). *Sonstige Nullpunkte aber treten nicht auf.*

4) *Sind unter den $\varkappa$ auch* **gerade** *Zahlen enthalten, so wird die einzelne Primform $P(x, y)$ an den bezüglichen Verzweigungsstellen auf F_n verzweigt sein. Aber es wird evident, dass sowohl das Product als der Quotient zweier Primformen $P(x, y^{(1)})$ und $P(x, y^{(2)})$, mit specificierten Stellen $y^{(1)}, y^{(2)}$, auf der F_n wieder allenthalben unverzweigt ist.* Um derartige Verbindungen von Primformen wird es sich aber später in erster Linie handeln.

§ 10. Fortsetzung: Periodicitätseigenschaften der Primform. Beziehung derselben zu den ϑ-Functionen.

Um die Periodicitätseigenschaften der Primform $P(x, y)$ festzustellen, denken wir erstlich y auf der Fläche irgendwie specificiert und lassen x die $2p$ elementaren Periodenbahnen a_i, b_i des kanonischen Systems nach einander beschreiben, um in jedem Falle das Verhalten von $P(x, y)$ zu beobachten. Letzteres hängt offenbar wesentlich nur von dem Exponentialfactor:

$$(1) \qquad E(x, y) = e^{\Pi_{x,y}^{x+dx,\, y+dy}}$$

ab, und hier müssen wir nun das „Argument" $x + dx$ sowie den „Parameter" x dicht hinter einander über eine gerade vorgelegte Periodenbahn hinbewegen.

Aber wir werden, wie man aus den Eigenschaften der Integrale dritter Gattung leicht schliesst, zu genau demselben Endresultat gelangen, wenn wir vorab bei unverändertem Parameter x das Argument x über die Periodenbahn hinbewegen und hernach bei festliegendem Argument den Parameter x dieselbe Bahn beschreiben lassen. Diese Massnahme ermöglicht die Anwendung der in §§ 1, 2 entwickelten Formeln, wobei insbesondere der Satz über Vertauschbarkeit von Parameter und Argument folgenreich wird.

Beschreibt das *Argument* x die Bahn a_i, so geht nach (2) p. 479 das im Exponenten (1) stehende Integral Π über in:

$$(2) \qquad \Pi' = \Pi + 2i\pi j_i^{xy},$$

sofern wir bei der Durchlaufung von a_i die Richtung in der richtigen Weise gewählt haben. Statt nun in Π' den *Parameter* x die Bahn a_i beschreiben zu lassen, benutzen wir den Umstand, dass Π' Vertausch-

*) Im letzteren Falle summieren sich natürlich die Ordnungen des Verschwindens, falls x und y zugleich Verzweigungspunkte der Fläche F_n sein sollten.

barkeit von Parameter und Argument erlaubt. Eben deshalb gelangen wir zu dem richtigen Schlusswerte Π'', wenn wir in Π', d. i. in $\Pi + 2i\pi j_i^{xy}$, noch einmal das Argument x über die Bahn a_i führen; aber hierfür stellen uns (2) p. 479 und I p. 530 die nötigen Formeln zur Verfügung, und wir gewinnen offenbar:

$$\Pi'' = \Pi + 4i\pi\left(j_i^{xy} + \frac{\tau_{ii}}{2}\right). \tag{3}$$

Indem man die einzelne Periodenbahn b_i einer analogen Discussion unterzieht, findet man, dass Π bei Durchlaufung derselben am Schluss seinen Anfangswert wiederannimmt. Durch Rückkehr zur Exponentialgrösse (1) ergiebt sich die Formel:

$$E'(x, y) = e^{4i\pi\left(j_i^{xy} + \frac{\tau_{ii}}{2}\right)} \cdot E(x, y), \tag{4}$$

falls der Punkt x den Weg a_i beschreibt, während E direct in sich übergeht, falls x über die Bahn b_i läuft.

Wenn wir von $E(x, y)$ aus zur Primform selbst zurückgehen, so ist die zusätzliche Bestimmung zu treffen, dass nicht nur der Punkt x nach Durchlaufung der Periodenbahn wieder seine Anfangslage annehmen soll, sondern dass auch die homogenen Variabelen x_1, x_2 wieder ihre ursprünglichen Werte annehmen mögen. Dann aber gewinnen wir von (4) aus unter Rücksicht auf (8) § 9 das Resultat: *Durchläuft x die Periodenbahn a_i, so geht $P(x, y)$ über in:*

$$P'(x, y) = \pm e^{-2i\pi\left(j_i^{xy} + \frac{\tau_{ii}}{2}\right)} P(x, y); \tag{5}$$

durchläuft x die Bahn b_i, so reproduciert sich P bis auf einen etwaigen Zeichenwechsel:

$$P'(x, y) = \pm P(x, y). \tag{6}$$

Hiermit ist der Periodencharakter der Primform, soweit wir denselben gebrauchen werden, angegeben.

Den Wert des Vorzeichens der rechten Seite mussten wir in (5) und (6) unentschieden lassen. Aber nach den im vorigen Paragraphen abgeleiteten Eigenschaften der Primform ist das Vorzeichen doch in jedem Einzelfalle eindeutig bestimmt, wenn wir nur neben dem Periodenwege von x noch angeben wollen, welche geschlossene Wertänderung dabei die eine der homogenen Variabelen, etwa x_1, erfahren soll. Dabei merken wir uns vor allem für später, *dass der Wert des fraglichen Vorzeichens offenbar ganz unabhängig von der besonderen Lage des y ist.* Eben deshalb wird dieses Vorzeichen für zwei Primformen $P(x, y^{(1)})$ und $P(x, y^{(2)})$ immer das gleiche sein, wenn nur x (bez. x_1, x_2) in beiden Primformen denselben Weg beschreibt.

Welche Änderung $P(x, y)$ erleidet, falls y bei festem x eine Periodenbahn beschreibt, ist jetzt sofort anzugeben. Es ergiebt sich nämlich aus den Formeln (2) und (9) des vorigen Paragraphen leicht:

$$(7) \qquad P(y, x) = - P(x, y).$$

Durchläuft also y bei stehendem x die Bahn a_i, so folgt aus (5):

$$(8) \qquad P'(x, y) = \pm e^{2i\pi\left(j_i^{xy} - \frac{\tau_{ii}}{2}\right)} P(x, y),$$

während bei Durchlaufung einer Bahn b_i die Form P, von einem etwa eintretenden Zeichenwechsel abgesehen, in sich selbst übergeht. —

Es ist interessant zu überlegen, was aus der Primform in dem Falle wird, *dass das Geschlecht der Riemann'schen Fläche $p = 0$ ist.* Doch wollen wir hier gleich im speciellen z als zugehörige Hauptfunction wählen und gewinnen dann aus Formel (9) p. 505 *als Bedeutung der zugehörigen Primform:*

$$(9) \qquad P(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

ein Ausdruck, an dem die Eigenschaften der Primform ja in der That unmittelbar in Evidenz treten.

Auch im Falle der Gebilde *des Geschlechtes $p = 1$* wollen wir vom allgemeinen Ansatze etwas abweichen. Wir werden nämlich hier an Stelle des in den Verzweigungspunkten verschwindenden Differentials $d\zeta$, lieber das auf der Fläche überall endliche und nicht verschwindende Differential dj, verwenden, wo j das zugehörige Integral erster Gattung ist. Das hat zur Folge, dass wir auf einer Fläche $p = 1$ mit der *Primfunction:*

$$(10) \qquad P(x, y) = \sqrt{- dj_x \, dj_y \, e^{-\Pi_{x,y}^{x+dx, y+dy}}}$$

arbeiten wollen. Setzen wir, um Anschluss an unsere früheren Bezeichnungen für $p = 1$ zu gewinnen, bei stehendem y:

$$j^{xy} = \frac{u}{\omega_2}, \quad \tau = \omega,$$

so liefern die Formeln (5) und (6) das Resultat:

$$P' = \pm e^{-\left(\frac{2u}{\omega_2} + \omega\right)\pi i} P, \quad P' = \pm P,$$

und das sind, bis auf das sich unserer Beurteilung zunächst entziehende Vorzeichen, dieselben Formeln, welche das Verhalten der Function $\vartheta_1\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, r\right)$ gegenüber Periodenwegen charakterisieren (cf. I p. 161). Überdies ist hier, bei $p = 1$, $P(x, y)$ eine *Function* der F_n,

die auf dieser Fläche nur einen einzigen, bei $u = 0$ gelegenen Nullpunkt erster Ordnung aufweist. *Es ergiebt sich daraus die Identität:*

$$P(x, y) = c \cdot \vartheta_1 \left(\frac{\pi u}{\omega_2}, r\right), \tag{11}$$

wo c eine von u unabhängige Zahl ist, die wir unbestimmt lassen.

Der hiermit erkannte Zusammenhang der Primform mit der Function ϑ_1 im Falle $p = 1$ liefert einen interessanten Ansatz auch für $p > 1$. Im Falle $p > 1$ geschieht der Übergang vom Differential $d\zeta$ zum Differential eines Integrals erster Gattung, ebenso wie bei $p = 1$, durch Multiplication von $d\zeta$ mit der bezüglichen Form φ. Aber man bedenke, dass das einzelne φ auf F_n $(2p - 2)$ bewegliche Nullpunkte hat. Falls wir also, dem Ausdruck (8) p. 505 der Primform gemäss, irgend einen Factor $\sqrt{\varphi_x}$ anbringen würden, müsste das Product an gewissen $2p - 2$ Stellen von F_n verzweigt sein. Wir entschliessen uns bei dieser Sachlage, nur solche Formen φ heranzuziehen, *deren* $2p - 2$ *bewegliche Nullpunkte zu Paaren an* $(p - 1)$ *Stellen der Fläche coincidieren.* Aus der Theorie der *Zweiteilung* der zu unserem Gebilde gehörenden Abel'schen Functionen*) folgt, dass es $2^{p-1}(2^p - 1)$ particuläre Formen φ dieser Art giebt. Im Raume R_{p-1} der Normalcurve der φ (cf. I p. 569) würden diese speciellen Formen φ solche Ebenen liefern, welche die Normalcurve überall da, wo sie dieselbe treffen, gleich berühren; für $p = 3$ erhalten wir z. B. die 28 Doppeltangenten der ebenen Curve vierter Ordnung. Eben dieserhalb bezeichnet man jene $2^{p-1}(2^p - 1)$ verschiedenen Formen φ auch wohl als *Berührungsformen* φ der Fläche F_n.

Man wähle jetzt aus den $2^{p-1}(2^p - 1)$ Formen φ, eine einzelne aus und bilde den Ausdruck $\sqrt{\varphi_x \varphi_y} \cdot P(x, y)$. Derselbe ist vor allem von nullter Dimension sowohl in x_1, x_2 wie y_1, y_2; er stellt also eine von zwei Stellen der Fläche abhängende *Function* derselben dar, welche das Periodenverhalten der Primform teilt. In den Verzweigungspunkten bleibt unsere Verbindung $\sqrt{\varphi_x \varphi_y} \cdot P(x, y)$ endlich und nicht-verschwindend, wie dieselbe denn auch auf der ganzen Fläche stetig ist. Aber neben dem Nullpunkte $x = y$ treten bei stehendem einen Argumente x oder y für das variabel gedachte andere Argument noch gewisse $(p - 1)$ auf der F_n festliegende Nullpunkte erster Ordnung ein, eben die Nullpunkte unserer Berührungsform φ, die vorhin ausgewählt wurde. — Und nun ist das Interessante, dass wir in dem Ausdruck nullter Dimension $\sqrt{\varphi_x \varphi_y} \cdot P(x, y)$, bis auf einen von x und y unabhängigen

*) Cf. Clebsch-Gordan, l. c. p. 264.

Factor c (der wieder unbestimmt bleibe), *direct eine jener* $2^{p-1}(2^p-1)$ *Thetafunctionen von ungerader Charakteristik vor uns sehen:*

$$(12) \qquad \vartheta\left(\int_y^x dj_1, \cdots, \int_y^x dj_p\right) = c \cdot \sqrt{\varphi_x \varphi_y} \cdot P(x, y).\text{*)}$$

Wir haben diese Entwicklung nur soweit gegeben, um Anschluss an das sonst gebräuchliche Hülfsmittel der Thetafunctionen zu gewinnen. Bei unseren eigenen weiteren Entwicklungen wollen wir aber immer nur von der Primform selbst Gebrauch machen. Es stellt uns die Primform $P(x, y)$ den Bestandteil vor, welcher den $2^{p-1}(2^p-1)$ ungeraden Thetafunctionen der F_n gemeinsam ist, und dieser allein ist fernerhin wesentlich. In der That sind die $(p-1)$ „festen“ Nullpunkte, welche $\vartheta(\int_y^x)$ als Function von x auf der Fläche aufweist, für alle weiterhin in Betracht kommenden Zwecke der Verwendung der Thetafunctionen durchaus gleichgültig; sie hemmen vielmehr nur gelegentlich die Durchsichtigkeit der Deduction.

§ 11. Darstellung der algebraischen Functionen und Integrale der F_n durch die Primform.

Die centrale Stellung, welche die Weierstrass'sche Primfunction in der Theorie der algebraischen Gebilde einnimmt, ist darin begründet, dass sich vermöge derselben die übrigen Functionen des einzelnen Gebildes in einer besonders übersichtlichen Gestalt darstellen lassen. Indem wir bei dem Bericht über diese Gegenstände sofort wieder formentheoretisch verfahren, bringen wir als eine erste Verwendung der Prim*form* die *Darstellung der algebraischen Functionen* der Fläche durch dieselbe. Sei also w eine m-wertige algebraische Function der F_n, deren Nullpunkte bei $z = x_1, x_2, \ldots, x_m$ und deren Unstetigkeitspunkte bei $z = y_1, y_2, \ldots, y_m$ liegen (wobei natürlich unter x_1, x_2, y_1, y_2

*) Über die Thetafunctionen und ihre Beziehung zu den algebraischen Functionen vergl. man ausser Riemann's Abhandlung über die Theorie der Abel'schen Functionen auch noch diejenige über das Verschwinden der ϑ-Functionen in Crelle's Journal Bd. 65 (1865) oder gesammelte Werke p. 198 ff. Ausserdem kommen hier wieder Clebsch-Gordan, *Abel'sche Functionen,* und im Anschluss daran die bezüglichen Teile von Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie,* in Betracht, sowie für den Fall des Geschlechtes $p = 3$ Weber *„Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlechte $p = 3$“*, Berlin (1876). Als einführendes Buch nennen wir etwa das in Bd. I häufig citierte Werk Neumann's über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale p. 322 ff.

im Augenblick nicht die homogenen Variabelen gemeint sind). Man bilde nun den Primformquotienten:

$$\frac{P(z, x_1)\, P(z, x_2) \cdots P(z, x_m)}{P(z, y_1)\, P(z, y_2) \cdots P(z, y_m)} \tag{1}$$

und untersuche denselben als Function von z auf der F_n. Da im Zähler und Nenner die gleiche Anzahl von Factoren steht, so haben wir vor allem mit einer *Function* der F_n zu thun, welche überdies augenscheinlich gerade in derselben Weise verschwindet und unstetig wird wie w. Bei Durchlaufung der Periodenbahn b_i geht der Quotient (1) in seinen ursprünglichen Wert wieder über; bei Durchlaufung der Bahn a_i aber reproduciert er sich bis auf den Factor:

$$e^{-2i\pi\left(\sum\limits_k j_i^{z, x_k} - \sum\limits_k j_i^{z, y_k}\right)} = e^{2i\pi \sum\limits_k j_i^{x_k y_k}},$$

und dieser Factor ist zufolge des Abel'schen Theorems (5) p. 483 gleichfalls mit 1 identisch. Da mithin der Quotient (1) auf F_n eindeutig ist, so wird derselbe die Function w bis auf einen constanten Factor darstellen. *Eine m-wertige algebraische Function w der F_n mit den Nullpunkten $x_1, \ldots, x_m$ und den Unstetigkeitspunkten $y_1, \ldots, y_m$ lässt sich vermöge der Primform in der Gestalt:*

$$w = c \cdot \frac{P(z, x_1) \cdots P(z, x_m)}{P(z, y_1) \cdots P(z, y_m)} \tag{2}$$

darstellen, wo c eine von z unabhängige Zahl ist.

Zufolge (11) § 10 begreift diese Formel (2) jene Darstellung der doppelt-periodischen Functionen m^{ten} Grades durch die Function $\sigma(u)$ oder $\vartheta_1\left(\frac{\pi u}{\omega_2}\right)$ unter sich, von welcher wir in I p. 157 handelten. Als niedersten Fall aber haben wir nach (9) § 10 in (2) für $p = 0$ die rationale Darstellung irgend einer algebraischen Function einer Fläche $p = 0$ durch eine zugehörige Hauptfunction. Zugleich ist Formel (2) als Verallgemeinerung dieser für die Flächen $p = 0$ und $p = 1$ sehr bekannten Darstellungen auf die Fälle $p > 1$ anzusehen, wie denn auch aus (2) der Grund für die Benennung „Primform" ersichtlich ist*).

Vor allem ist es noch interessant, die nachfolgende *Darstellung des Normalintegrals dritter Gattung durch die Primform:*

$$\Pi_{\xi, \eta}^{x, y} = \log \frac{P(x, \xi)\, P(y, \eta)}{P(x, \eta)\, P(y, \xi)} \tag{3}$$

anzumerken. Der Beweis für die Richtigkeit dieser Formel entspringt

*) Wegen der Darstellung algebraischer *Formen* der Fläche durch die Primform sehe man Klein, Math. Annalen Bd. 36 pag. 14 ff.

aus dem Umstande, dass man an dem auf der rechten Seite (3) stehenden Ausdruck sofort alle charakteristischen Eigenschaften des Integrals $\Pi_{\xi,\eta}^{x,y}$ nachweisen kann, wie man leicht ins einzelne zeigt. Die Formel (3) ist deshalb wichtig, *weil man die Definitionsgleichung* (8) *p.* 505 *der Primform gewissermassen als Umkehrung von* (3) *ansehen kann.* Nimmt man nämlich ξ und η in unmittelbarer Nähe von x bez. y an, so wird $\xi = x + dx, \eta = y + dy$ und daraufhin $P(x, \xi) = d\zeta_x, P(y, \eta) = d\zeta_y$. Mit Rücksicht auf (7) p. 508 ergiebt sich also aus (3):

$$\Pi_{x,y}^{x+dx,\, y+dy} = \log \left[\frac{-d\zeta_x d\zeta_y}{P^2(x, y)}\right],$$

von wo aus die Definitionsgleichung der Primform sofort aufs neue entspringt.

Aus (3) kann man auch noch für das Normalintegral *zweiter* Gattung die Darstellung gewinnen:

$$(4) \qquad Z_t^{x,y} = \frac{d}{dt} \log \frac{P(x,t)}{P(y,t)};$$

doch verweilen wir hierbei nicht mehr länger*).

§ 12. Vom Umkehrproblem und seiner Auflösung.

Eine zweite Verwendung der Primform haben wir bei der Besprechung des *Umkehrproblems* zu machen, auf dessen Discussion wir hier soweit eingehen wollen, dass seine allgemeine Auflösbarkeit hervortritt**). Dieses Problem, welches im Falle des Geschlechtes $p = 1$ in bekannter Weise zur Einführung der doppeltperiodischen Functionen führt, formulieren wir für unsere beliebige Riemann'sche Fläche F, vom Geschlechte p vermöge der p Gleichungen:

$$(1) \qquad \int_{c_1}^{x_1} dj_i + \int_{c_2}^{x_2} dj_i + \cdots + \int_{c_m}^{x_m} dj_i = C_i, \quad i = 1, 2, \cdots, p.$$

Dabei sollen die $j_1, \ldots, j_p$ ein System unabhängiger Integrale erster

*) Endlich lassen sich auch noch die Integrale *erster* Gattung auf die Primform beziehen, indem man die Periodeneigenschaften der letzteren nach dieser Richtung hin ausbeutet. Die Primform erscheint so als gemeinsame Quelle aller auf der Riemann'schen Fläche gewöhnlich betrachteten Functionen; wir gehen aber auf diese Auffassung, die Weierstrass verschiedentlich in seinen Vorlesungen entwickelt hat, nicht weiter ein.

**) Man vgl. betreffs des Umkehrproblems die Jacobi'sche Originalschrift in Bd. 13 von Crelle's Journ. (1835), sodann weiter die schon p. 510 bei Gelegenheit der Thetafunctionen genannten Werke von Clebsch-Gordan, Clebsch-Lindemann, Weber und Neumann. Auf die bezüglichen Entwicklungen von Weierstrass (in seinen Vorlesungen, sowie in Crelle's Journ. Bd. 47 (1854)) kommen wir im Texte zurück.

Gattung, also etwa unsere Normalintegrale bilden; es sollen $c_1, \ldots, c_m$ gewisse m auf der Fläche F_n willkürlich ausgewählte Punkte sein, und endlich verstehe man unter $C_1, \ldots, C_p$ irgendwie gewählte p endliche Grössen. Unser Problem sei dann, *aus den p Gleichungen* (1) *ein System von m Punkten $x_1, \ldots, x_m$ auf der Fläche F_n zu bestimmen, so dass den Gleichungen* (1) *dadurch Genüge geschieht.*

Nehmen wir zuvörderst die Existenz einer Lösung $x_1, \ldots, x_m$ an, so ist sogleich evident, *dass jedes mit $x_1, \ldots, x_m$ äquivalente Punktsystem $x_1', \ldots, x_m'$ der F_n gleichfalls eine Lösung von* (1) *liefert.* In der That folgt ja aus dem Abel'schen Theorem:

$$(2) \qquad \int_{x_1}^{x_1'} dj_i + \int_{x_2}^{x_2'} dj_i + \cdots + \int_{x_m}^{x_m'} dj_i = 0,$$

so dass die p Gleichungen (1) für das System $x_1', \ldots, x_m'$ erfüllt sind, falls sie für $x_1, \ldots, x_m$ gelten.

Der gewonnene Satz ist aber auch umkehrbar: *Haben wir in $x_1, \ldots, x_m$ und $x_1', \ldots, x_m'$ zwei Lösungen von* (1), *so sind diese beiden Punktsysteme der F_n äquivalent.* Dies zeigt man nun mit der Primform durch die sogenannte Umkehrung des Abel'schen Theorems (2). Es ergeben sich nämlich durch Subtraction der auf die beiden vorgelegten Lösungen bezogenen Gleichungen (1) für unsere beiden Punktsysteme die p Gleichungen (2) des Abel'schen Theorems, und eben dieserhalb ist

$$(3) \qquad \frac{P(z, x_1) \cdots P(z, x_m)}{P(z, x_1') \cdots P(z, x_m')}$$

auf der F_n eindeutig, insofern bei Periodenwegen des z Zähler und Nenner in (3) zufolge der bestehenden Gleichungen (2) jeweils den gleichen Exponentialfactor annehmen. In (3) haben wir somit (da wesentlich singuläre Punkte nicht vorkommen) eine m-wertige algebraische Function mit den Nullpunkten $x_1, \ldots, x_m$ und den Unstetigkeitspunkten $x_1', \ldots, x_m'$ vor uns, so dass diese beiden Punktsysteme thatsächlich äquivalent sind.

Bei dieser Sachlage giebt uns, sofern überhaupt *eine* Lösung von (1) existiert, der Riemann-Roch'sche Satz sogleich die Gesamtheit aller Lösungen an: *sie wird einfach von den $\infty^{m-p+\tau}$ Punktsystemen geliefert, die mit jenem ersten System äquivalent sind.*

Unsere weitere Besprechung bezieht sich sonach auf die Frage, ob überhaupt *eine* Lösung von (1) existiert. Hier aber ist zu bemerken, dass für $m < p$ zwischen den C_i jedenfalls Bedingungen bestehen müssen, falls eine Lösung existieren soll. Wie die Verhältnisse in diesem Betracht liegen mögen, entzieht sich indessen unserer augen-

blicklichen Betrachtung, und wir nehmen dieserhalb $m \geq p$ an. *Für $m = p$ werden wir sogleich die Existenz einer Lösung des Umkehrproblems nachweisen können. Damit ist aber zugleich für alle Fälle $m > p$ die Lösbarkeit bewiesen;* denn wir brauchen für $m > p$ nur etwa

$$x_{p+1} = c_{p+1}, \cdots, x_m = c_m$$

zu nehmen und die $x_1, \ldots, x_p$ nach den Regeln des Falles $m = p$ zu bestimmen.

Die Existenz einer Lösung $x_1, \ldots, x_m$ des Umkehrproblems (1) für $m = p$ werden wir jetzt vermöge eines von Weierstrass herrührenden Gedankenganges beweisen, den wir sogleich im Anschluss an die unter (4) zu gebende Potenzentwicklung darlegen. Bei dieser Deduction werden wir die Vorraussetzung machen müssen, dass die p Punkte $c_1, \ldots, c_p$ der F_n kein Specialpunktsystem im Sinne von I p. 552 bilden, d. h. dass keine Form φ in diesen p Punkten zugleich verschwindet. Sollte dies aber zufällig bei den in (1) vorgelegten Stellen $c_1, \ldots, c_p$ zutreffen, so ersetze man sie durch ein System $c_1', \ldots, c_p'$, welches kein Specialpunktsystem vorstellt und schreibe dementsprechend:

$$C_i' = C_i + \int_{c_1'}^{c_1} dj_i + \cdots + \int_{c_p'}^{c_p} dj_i \cdot$$

Jede Lösung des damit formulierten Umkehrproblems:

$$\sum_{k=1}^{p} \int_{c_k'}^{x_k} dj_i = C_i', \quad i = 1, 2, \cdots, p$$

wird dann ohne weiteres auch eine Lösung des Problems (1) liefern. Dass aber überhaupt Systeme zu p Punkten c existieren, die keine Specialpunktsysteme sind, sieht man sofort von der Normalcurve der φ im Raume R_{p-1} aus: eine „Ebene" dieses Raumes ist nämlich durch $(p-1)$ Punkte bestimmbar, und p Punkte der Curve liegen im allgemeinen nicht in einer Ebene, weil sonst die Normalcurve der φ nicht „eigentlich" im R_{p-1} gelegen sein würde.

Man denke nunmehr um die p Stellen $c_1, \ldots, c_p$ der Fläche F *endliche* Bereiche abgegrenzt und benenne auf dem k^{ten} unter ihnen durch ξ_k einen veränderlichen Punkt. Das Integral $j_i^{\xi_k, c_k}$ gestattet in der Umgebung von c_k die Potenzentwicklung:

$$(4) \qquad j_i^{\xi_k, c_k} = a_1^{(i,k)}(\xi_k - c_k) + a_2^{(i,k)}(\xi_k - c_k)^2 + \cdots,$$

und wir können jenen *endlichen* Bereich so klein wählen, dass innerhalb desselben die p für $i = 1, 2, \cdots, p$ eintretenden Potenzentwick-

lungen (4) allenthalben convergieren*). Hier ist nun — und das ist ein wesentlicher Punkt unserer Deduction — die p-gliedrige Determinante $|a_1^{(i,k)}|$ von Null verschieden; eben diesen Umstand danken wir unserer Verabredung, dass die $c_1, \ldots, c_p$ kein Specialpunktsystem bilden sollen, wie man solches leicht ins einzelne überlegen wird.

Bilden wir jetzt die p Integralsummen (1) für $m = p$ und $x_k = \xi_k$, so werden jedenfalls die Werte dieser Summen gewisse endliche Beträge, dem absoluten Werte nach, nicht überschreiten können. Von diesem Umstande geleitet, formulieren wir die Gleichungen:

$$(5) \qquad \int_{c_1}^{\xi_1} dj_i + \cdots + \int_{c_p}^{\xi_p} dj_i = D_i\,, \quad i = 1, 2, \cdots, p$$

mit der Bedeutung:

$$(6) \qquad D_i = -\frac{C_i}{m}\,,$$

wo m eine hinreichend gross zu wählende ganze positive Zahl sein soll; solchergestalt kann man für jedes D_i einen absoluten Betrag erreichen, der innerhalb des gerade bezeichneten Wertbereichs für unsere auf die ξ_k bezogenen Integralsummen liegt.

Um jetzt zunächst das besondere Umkehrproblem (5) zu lösen, tragen wir die Entwicklungen (4) ein und erhalten die p Gleichungen:

$$(7) \qquad \sum_{k=1}^{p} [a_1^{(i,k)}(\xi_k - c_k) + a_2^{(i,k)}(\xi_k - c_k)^2 + \cdots] = D_i$$

für $i = 1, 2, \ldots, p$. Da die Determinante $|a_1^{(i,k)}| \gtrless 0$ ist, so können wir nach Sätzen der Reihentheorie durch Inversion dieses Gleichungssystems die p Grössen $(\xi_k - c_k)$ in Potenzreihen:

$$(8) \qquad \xi_k - c_k = \mathfrak{P}_k(D_1, D_2, \cdots, D_p)$$

entwickeln, von denen sich zeigen lässt, dass sie convergieren, *falls die Beträge von $D_1, D_2, \ldots, D_p$ gewisse p endliche von 0 verschiedene Zahlen nicht übersteigen.* Ungeachtet der besonderen Werte, die für die C_i gegeben sein mögen, haben wir so, falls nur m als ganze positive endliche Zahl hinreichend gross gewählt wurde, in

$$(9) \qquad \xi_k = c_k + \mathfrak{P}_k(D_1, D_2, \cdots, D_p)$$

hatsächlich ein *Lösungssystem des besonderen Umkehrproblems* (5) gewonnen.

Nach Gewinnung dieses Resultates gelingt der Abschluss unserer Untersuchung vermöge einer auch sonst mehrfach gebrauchten Über-

*) Betreffs der Bedeutung der Entwicklungsgrössen $(\xi - c)$ müssen wir an der Bestimmung von I p. 497 u. f. festhalten.

legung*), die auf der Construction einer algebraischen Function mit fest gegebenen Unstetigkeitspunkten und mit teilweise fixierten Nullpunkten beruht. Um für die hier gemeinte Function die in I p. 540 abgeleitete Darstellung durch Integrale 2[ter] Gattung zu benutzen, verstehen wir unter $d_1, d_2, \ldots, d_{p(m+1)}$ irgend ein Punktsystem, welches mit dem $(m+1)$-fach gezählten System der Punkte $c_1, \ldots, c_p$ äquivalent ist; und zwar mögen von den Punkten d keine zwei coincidieren. Die allgemeinste $p(m+1)$-wertige algebraische Function w der F_n, welche an den Stellen d der Fläche je einfach unendlich wird, ist alsdann nach I l. c. in der Gestalt:

$$(10) \qquad w = \alpha_0 + \alpha_1 Z_{d_1} + \alpha_2 Z_{d_2} + \cdots + \alpha_{p(m+1)} Z_{d_{p(m+1)}}$$

darstellbar, und hier bestehen zufolge des Riemann-Roch'schen Satzes für die Coefficienten α gerade p lineare Bedingungen, so dass noch $(mp+1)$ Coefficienten unbestimmt bleiben. Schreiben wir jetzt vor, dass mp Nullpunkte von w auf F_n particuläre Lagen haben sollen, so hat dies mp weitere lineare Bedingungen für die α im Gefolge. Dabei ist es gleichgültig, ob diese Nullpunkte durchgehends getrennt liegen oder in irgend welchen Anzahlen coincidieren mögen; nur hat man leicht ersichtlicher Weise im letzteren Falle von den Reihenentwicklungen der Z neben den Absolutgliedern auch noch höhere Potenzen bei der Rechnung mit in Betracht zu ziehen.

Die vorzuschreibenden mp Nullpunkte identificieren wir nun mit dem m-fach genommenen System der in (9) berechneten Punkte ξ_k. Es kann sein, dass die Verhältnisse der Coefficienten α dadurch gerade eindeutig bestimmt sind; es kann aber auch sein, dass die mp linearen Bedingungen nicht von einander unabhängig sind, und in diesem Falle wähle man w unter den verschiedenen Möglichkeiten particulär aus. Die so gewonnene Function w wird dann aber noch weitere p Nullpunkte auf F_n besitzen, und diese Punkte nennen wir $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Alsdann haben wir nach dem *Abel'schen Theorem* die p Gleichungen:

$$(11) \qquad \sum_{k=1}^{p} m \int_{c_k}^{\xi_k} dj_i + \sum_{k=1}^{p} \int_{c_k}^{x_k} dj_i = 0.$$

Denn in der That bilden zufolge der Existenz jener Function w die $p(m+1)$ oberen Grenzen in (11) ein mit dem $(m+1)$-fach gezählten System $c_1, \ldots, c_p$ äquivalentes Punktsystem. Hierbei haben wir in (11) sogleich von einer sehr speciellen Zuordnung der Punkte beider Systeme Gebrauch gemacht; aber man bemerke, dass eine Abänderung

*) Siehe z. B. Clebsch-Gordan, l. c. pag. 187.

dieser Zuordnung die p Integralsummen (11) nur um ein System simultaner Perioden modificiert, welches man durch geeignete Ausgestaltung etwa des Integrationsweges von c_1 nach x_1 wieder zum Wegfall bringen kann.

Letzten Endes trage man in (11) für die an erster Stelle stehende Summe ihren Wert aus (5) und (6) ein und findet:

$$\sum_{k=1}^{p} \int_{c_k}^{x_k} dj_i = C_i, \quad i = 1, 2, \cdots, p, \tag{12}$$

so dass thatsächlich im System der Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_p$ *die gesuchte Lösung des Umkehrproblems* (1) *für* $m = p$ *gewonnen ist.* Damit ist also das in Rede stehende Problem in dem oben in Aussicht genommenen Umfange wirklich gelöst.

Eine Frage, die sich für uns jetzt an die mannigfachen Gesichtspunkte des vorliegenden Kapitels unmittelbar anschliesst, ist die, wie sich dieselben im Gebiete der Theorie der Modulformen anwenden und ausgestalten mögen. Wir können indessen auf die hiermit gegebene Problemstellung, wie wir schon gelegentlich andeuteten, erst im übernächsten Kapitel eingehen, da wir vorab unsere allgemeinen functionentheoretischen Entwicklungen erst noch nach einer anderen Richtung auszubauen haben.

Zweites Kapitel.

Allgemeine Theorie der algebraischen Correspondenzen und des Correspondenzprincips.

Um späterhin innerhalb der Modullehre die besonderen Correspondenzen der Transformationstheorie mit Erfolg behandeln zu können, gehen wir hier zunächst auf die allgemeine Theorie der algebraischen Correspondenzen näher ein, wie sich dieselbe zumal in neuerer Zeit herausgebildet hat.

Die Theorie der Correspondenzen untersucht das auf Grund analytischer Gesetze geregelte Entsprechen von Punkten auf algebraischen Curven, wie wir es in unseren schon früher (p. 156) besprochenen speciellen Beispielen von Modularcorrespondenzen zu betrachten hatten. Es verdankt die Theorie der Correspondenzen ihre Entstehung den Gedankenentwicklungen der Geometer; in der That ist es Chasles*) gewesen, welcher um 1864 zuerst besondere Untersuchungen über derartige Correspondenzen auf algebraischen Curven anstellte, und welcher für den in unserem Sinne sehr beschränkten Bereich seiner Betrachtung dasjenige Theorem formulierte, welches wir weiterhin als „Correspondenzprincip“ kennen lernen werden. Die Beschränkung der Chasles'schen Untersuchung aber bestand darin, dass das Geschlecht p der Grundcurve, auf welcher Correspondenzen betrachtet werden, gleich Null ist. Die Erweiterung des fraglichen Correspondenzprincips auf Curven eines höheren Geschlechtes wurde dann von Hrn. Cayley**) ohne Beweis gegeben und späterhin durch Hrn. Brill***) zum Nachweis gebracht.

---

*) Siehe die Comptes rendus der Pariser Akademie vom 27. Juni 1864.

**) *On the correspondence of two points on a curve,* Proceedings of the London mathematical society (1866); *Second memoir on the curves, which satisfy given conditions,* Philosophical transactions (1868).

***) *Über Entsprechen von Punktsystemen auf einer Curve,* Math. Ann. Bd. 6 (1873); *Über die Correspondenzformel*, Math. Ann. Bd. 7 (1874). Hr. Brill ist späterhin in zwei Arbeiten Math. Ann. Bd. 31 (1887) und Bd. 36 (1890) auf die Correspondenztheorie zurückgekommen. Vergl. auch die neuerdings erschienene

Indessen war bei dem hiermit erreichten Entwicklungsstadium der Correspondenztheorie*) eine specielle Classe von algebraischen Correspondenzen auf besonderen algebraischen Curven dem Verständnis noch unzugänglich geblieben, und hier war es erst den Riemann'schen Methoden vorbehalten, die für das Gesamtgebiet der algebraischen Correspondenzen erschöpfende Aufklärung zu geben. Diesen entscheidenden Schritt in der Correspondenztheorie gethan zu haben, ist das Verdienst des Hrn. Hurwitz**). Durch Verwertung der zur Grundcurve gehörenden *Integrale erster Gattung*, welche in Hurwitz' Hand bereits vorher bei den Modularcorrespondenzen zu überraschenden Erfolgen geführt hatten, gelang es ihm, für die allgemeine Correspondenztheorie immer gültige Grundlagen zu gewinnen. Insbesondere wurden dabei jene bis dahin unzugänglich gebliebenen Correspondenzen ihrem Wesen nach völlig aufgeklärt; wir werden dieselben weiterhin als *singuläre* Correspondenzen kennen lernen.

Für uns kommt es ganz wesentlich nur auf die Hurwitz'sche Theorie an. Diese allein soll also weiterhin entwickelt werden; freilich werden wir uns dabei mehrfache Abweichungen von der ursprünglichen Hurwitz'schen Darstellung erlauben, die aber nur methodische sind. Vor allem mag sogleich hervorgehoben sein, dass wir an Stelle der von Hrn. Hurwitz verwendeten ϑ-Function allenthalben die Primform gebrauchen werden, was nach den bezüglichen Bemerkungen im vorigen Kapitel unmittelbar gerechtfertigt erscheint. Ehe wir übrigens Hurwitz' allgemeinen Ansatz formulieren (in § 2) und dann weiter entwickeln, sollen in § 1 einige vorbereitende und einleitende Betrachtungen gegeben werden.

§ 1. Von den Correspondenzen und dem Correspondenzprincip der Geometer.

Die Fragestellung der Geometrie, welche zum Ausgangspunkt der Correspondenztheorie wurde, können wir in der folgenden Art angeben: Auf einer ebenen Grundcurve C_n der n^{ten} Ordnung seien x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 die Coordinaten irgend zweier Punkte. Dieselben sollen an die Bedingung:

Arbeit von Zeuthen in Bd. 40 der Mathem. Annalen (1892), wo man mannigfache sonstige Citate findet.

*) Von welchem insonderheit die oft genannten Vorlesungen über Geometrie von Clebsch-Lindemann ein vielseitiges Bild entwickeln.

**) *Über algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip*, Berichte der Kgl. Sächs. Gesell. d. W. vom 11. Januar 1886, wieder abgedruckt in den Mathem. Ann. Bd. 28 p. 561 ff.

$$g(x_1, x_2, x_3 \mid y_1, y_2, y_3) = 0 \tag{1}$$

gebunden sein, wo $g(x \mid y)$ eine ganze rationale Function der x_i und y_i ist, die Homogeneität in jeder der beiden Variabelenreihen zeigt. Für stehenden Punkt x wird alsdann (1), in den laufenden Coordinaten y gedeutet, eine neue Curve darstellen, und die Schnittpunkte y dieser letzteren mit der Grundcurve C_n sind es, welche dem Punkte x correspondieren sollen. Die so begründete Correspondenz auf der C_n lässt sich sofort auch invertieren, eben dadurch, dass wir den Punkt y als stehend annehmen und die Schnittpunkte der in den x gedeuteten Curve (1) mit der Grundcurve aufsuchen.

Zur Erläuterung betrachten wir ein einfaches Beispiel aus der Theorie der Curven dritter Ordnung, das uns zugleich mit einer in der Theorie der Correspondenzen sehr früh bemerkten wichtigen Erscheinung vertraut machen soll: Durch $f = 0$ sei eine ebene Curve dritter Ordnung C_3 des Geschlechtes $p = 1$ dargestellt. In einem beliebigen Punkte x_i derselben ziehen wir die Tangente, welche noch einen weiteren Punkt, nämlich y_i, auf der C_3 ausschneidet. Für die hiermit begründete Correspondenz lautet die Gleichung (1):

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0. \tag{2}$$

Betrachtet man nun die linke Seite von (2) als Form auf der C_3, so wird bei stehendem x diese Form offenbar drei Nullpunkte haben, *von denen aber stets zwei mit dem gewählten Punkte x coincidieren.* Aber wir wollen doch, wie schon angedeutet, nur jenen dritten, von x_i verschiedenen, Schnittpunkt der Tangente (2) mit der C_3 dem Punkte x_i correspondieren lassen.

Wir lernten an diesem Beispiel die bereits erwähnte, auch schon der älteren Correspondenztheorie sehr bekannte Erscheinung kennen. In diesem Sinne werden wir unter Rückgang zur Gleichung (1) jetzt gleich annehmen, *dass bei stehendem x unter den einfachen Nullpunkten der in y gedeuteten Form $g(x \mid y)$ stets eine gewisse Anzahl — sagen wir w — mit x coincidieren; nur die übrigen Nullpunkte, deren Zahl α sei, setzen wir als dem x correspondierend.* Diese Zahl w aber, die, wie wir noch sehen werden, einen wesentlichen Charakter der gerade betrachteten Correspondenz angiebt, bezeichnen wir mit Hrn. Brill als *Wertigkeit* derselben. Indem wir gleich auch die inverse Correspondenz betrachten, bei welcher der Punkt y gegeben ist, wird offenbar $g(x \mid y)$ als Form der Stelle x im Punkte y auch einen w-fachen Nullpunkt haben; *aber wieder nur die übrig bleibenden β Nullpunkte seien diejenigen, welche wir der Stelle y correspondieren lassen.* So oft es nicht gerade erforderlich ist, die Inversion der Correspondenz zu betonen, mögen wir auch beide

eben betrachtete Correspondenzen in eins fassen und erhalten dann, was wir hinfort als *eine α-β-deutige algebraische Correspondenz der Wertigkeit w* auf F_n bezeichnen.

In keiner Weise ist ausgeschlossen, dass für *specielle* Lagen x auch unter den α correspondierenden Punkten y einer oder mehrere mit x coincidieren; es wird vielmehr für uns weiterhin geradezu das wesentlichste Problem sein, diese speciellen Stellen x anzugeben, was man durch vollständige Discussion der Gleichung $g(x \mid x) = 0$ wird thun wollen. Ohne diese Frage schon hier näher zu verfolgen, benennen wir durch ν die Anzahl derjenigen Punkte x, für welche in der bezeichneten Art wenigstens einer der correspondierenden Punkte y mit x coincidiert. Das bereits in der Einleitung erwähnte *Correspondenzprincip* von Cayley und Brill sagt dann aus, *dass die Anzahl ν der Coincidenzen unserer α-β-deutigen Correspondenz der Wertigkeit w gegeben sei durch:*

$$\nu = \alpha + \beta + 2pw, \tag{3}$$

wo p das Geschlecht der F_n ist; wir werden diese Formel weiter unten zu beweisen haben.

Den hiermit entwickelten Ansatz wollen wir nun allgemeiner einkleiden. An Stelle der Grundcurve C_n setzen wir vor allem eine Riemann'sche Fläche F_n, wo dann zwecks Darstellung der auf der F_n zu betrachtenden Correspondenzen an Stelle der rationalen ternären Formentheorie x_1, x_2, x_3 irgend eine andere treten darf, z. B. die im vorigen Kapitel begründete algebraische binäre Formentheorie z_1, z_2. Wir legen dann den allgemeinen Begriff einer *ganzen algebraischen Form zweier Flächenpunkte* vor, die wir nach Analogie des früheren Brauches im Gegensatz zu den rationalen Verbindungen g durch $G(x, y)$ bezeichnen. Es soll $G(x, y)$ eine solche Grösse sein, die für stehenden Wert des einen Argumentes, in Abhängigkeit vom anderen gedeutet, eine ganze algebraische Form im früheren Sinne bildet, wofür man ein specielles Beispiel in der linken Seite der Gleichung (1) vor Augen hat. Es kann zwar in keiner Weise unsere Absicht sein, für die Darstellung solcher Formen $G(x, y)$ schon jetzt die von dem vorigen Kapitel zu diesem Zwecke gelieferten Hülfsmittel wirklich in Anwendung zu bringen; das wird eine Aufgabe sein, die wir weiterhin auf verschiedene Weisen zu behandeln haben. Hier aber soll uns der Begriff der von zwei Punkten x, y der F_n abhängenden Form nur erst dazu dienen, um vermittelst desselben die eben entwickelten Grundzüge der Correspondenztheorie einer ersten Verallgemeinerung zu unterziehen.

Vorab bemerke man noch, dass die Form $G(x, y)$ sehr leicht zu einer *Function* der F_n ausgestaltet werden kann, welche algebraisch

von zwei Punkten der Fläche abhängt. Seien nämlich ξ und η zwei particuläre Lagen von x und y, so bilde man folgenden Quotienten:

$$F(x, y \mid \xi, \eta) = \frac{G(x, y)\, G(\xi, \eta)}{G(x, \eta)\, G(\xi, y)}; \tag{4}$$

derselbe stellt, wie man sieht, eine Function der gewünschten Art dar; wir werden Quotienten von der Gestalt (4) in der Folge oft wiederholt zu betrachten haben. Um aber die Function (4) in derselben Weise für die Definition einer algebraischen Correspondenz auf F_n gebrauchen zu können, wie die Form $G(x, y)$, muss man natürlich derartige particuläre Punktepaare ξ, η meiden, für welche $G(\xi, \eta)$ mit Null identisch ist. Wenn man will, kann man übrigens (4) auch als eine von *vier* Punkten der F_n algebraisch abhängende Function auffassen, indem man auch ξ und η als beweglich ansieht; dabei wird dann die Identität bestehen:

$$F(\xi, \eta \mid x, y) = F(x, y \mid \xi, \eta). \tag{5}$$

Die Einführung der Correspondenz zwischen Punkten x, y der Fläche F_n vermöge der Gleichung $F(x, y \mid \xi, \eta) = 0$ oder $G(x, y) = 0$ geschieht nun genau mit denselben Worten wie vorhin im Anschluss an die specielle Gleichung (1). Auch die Wertigkeit w unserer Correspondenz werden wir genau wie oben definieren, nämlich etwa als Anzahl der Nullpunkte x von F oder G, welche sich bei stehendem y immer eben an dieser Stelle y vereint finden. Endlich kommt wieder das Problem der Bestimmung der Coincidenzenanzahl in Betracht, und wir werden zeigen können, dass für alle jetzt in Rede stehenden Correspondenzen das Princip (3) seine Gültigkeit bewahrt.

Nun aber müssen wir auf den auch jetzt noch sehr beschränkten Charakter unseres bisherigen Ansatzes hinweisen. Zunächst ist ja, wie wir eben die Function $F(x, y)$ bildeten, nur erst angenommen, dass F bei stehendem y an der Stelle $x = y$ endlich bleiben oder in gewisser Ordnung *verschwinden* sollte. Wenn wir aber mit den Functionen $F(x, y)$ arbeiten wollen, so hindert doch nichts, auch solche $F(x, y)$ zu bilden, die etwa für stehendes y in x gedeutet, an der Stelle $x = y$ immer in gewisser Ordnung *unendlich* werden. Ist w die Ordnung dieses Unendlichwerdens, so wird man sofort gutheissen, wenn wir der durch Nullsetzen eines solchen $F(x, y)$ zu definierenden Correspondenz die *negative* Wertigkeit $-w$ zuerteilen. Mit den *ganzen* Formen $G(x, y)$ der F_n beherrschen wir freilich, wie selbstverständlich, nur erst die null- und positiv-wertigen Correspondenzen; die Aufnahme der Functionen oder aber, wenn man so will, die Aufnahme der Formen von *gebrochener* Ordnung ermöglicht indes den Fortschritt zu den negativ-

wertigen Correspondenzen, welch' letztere übrigens auch bereits von Cayley und Brill in zahlreichen Beispielen betrachtet wurden. Auch auf diese negativ-wertigen Correspondenzen bezieht sich dann das durch Formel (3) zum Ausdruck gebrachte Cayley-Brill'sche Correspondenzprincip.

Aber auch die so umgrenzten Wertigkeitscorrespondenzen bilden nur erst *eine* Classe aller denkbaren algebraischen Correspondenzen; ihnen reiht sich nun die andere schon in der Einleitung erwähnte Classe der *singulären* Correspondenzen an, denen gegenüber wir jene auch wohl kurz als die *gewöhnlichen* Correspondenzen bezeichnen. Indem wir aber eine singuläre Correspondenz nicht mehr, wie eben, durch Nullsetzen einer algebraischen Function $F(x, y)$ zweier Flächenpunkte darstellen bez. definieren können, werden wir uns bei ihrer Einführung von sehr viel allgemeineren und abstracteren Gesichtspunkten leiten lassen müssen. Letzteres ist um so mehr geboten, als die später zu betrachtenden Modularcorrespondenzen in der Mehrzahl der Fälle singuläre Correspondenzen sind, wobei überdies die seinerzeit zu gebende Einführung der Modularcorrespondenzen vermöge des ω in eine transcendente Gestalt gekleidet ist. Wir werden demnach jetzt mit Hrn. Hurwitz die Voraussetzungen unserer weiteren Besprechung gleich so formulieren, dass davon alle denkbaren algebraischen Correspondenzen, die gewöhnlichen und die singulären, gleichmässig umfasst sind. Dies wird dadurch ermöglicht, dass Hr. Hurwitz unter vorläufiger Beiseitelassung irgend welcher Ausdrucksformen $F(x, y)$ oder $G(x, y)$ die principielle Frage nach der *allgemeinsten* algebraischen Abhängigkeit aufwirft, die zwischen zwei Punkten x, y einer Fläche F_n bestehen mag. —

§ 2. Der allgemeine Ansatz. Die fundamentalen Relationen zwischen den Integralen j, sowie zwischen den Perioden τ_{ik}.

Von der Riemann'schen Fläche F_n über der z-Ebene nehmen wir des weiteren an, dass sie ein Geschlecht $p > 0$ aufweise. Den Fall $p = 0$ wird man übrigens zwischendurch leicht mit erledigen können; im Gebiete der Modularcorrespondenzen würden wir für $p = 0$ nur wieder auf die im vierten Abschnitt bereits behandelten Modulargleichungen zurückkommen. — Einzelne Punkte auf der Fläche F_n sollen nach wie vor in dem bisher üblichen Sinne durch x und y bezeichnet werden. Wir formulieren dann folgende allgemeine Annahmen:

Zwischen zwei Stellen der F_n, x und y, soll eine analytische Abhängigkeit bestehen, derzufolge jedem Punkte x der F_n bestimmte α Punkte

*y, die wir $y_1, y_2, \ldots, y_\alpha$ nennen, correspondieren; die α Punkte y_r**) *sollen im allgemeinen von x verschieden sein und sollen sich mit x sämtlich stetig auf der F_n bewegen***). Durch diese Festsetzungen ist das Auftreten wesentlich singulärer Punkte x für die analytischen Functionen y_r von x bereits ausgeschlossen. Indem wir also sagen, es sei auf der F_n durch die geschehenen Bestimmungen *eine α-deutige Correspondenz* definiert, werden wir dieselbe gleich auch als eine *algebraische* zu bezeichnen haben.

Wir invertieren die vorgelegte Correspondenz, indem wir die einzelne Stelle der F_n als Punkt y fixieren und alle Punkte x suchen, denen im Sinne der ersten Correspondenz jener Punkt y entspricht. Die somit vollzogene Inversion der analytischen Gesetzmässigkeit $y(x)$ kann für einen einzelnen Punkt y nur zu einer *endlichen* Zahl β von Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_\beta$ führen; fänden sich nämlich unendlich viele Punkte x, so müssten sich dieselben wenigstens an einer Stelle der F_n häufen und hier wäre, der Annahme zuwider, eine wesentlich singuläre Stelle für die $y(x)$. Fanden wir aber einmal einem y insgesamt β Punkte x zugeordnet, so zeigt nun die analytische Fortsetzung der $x(y)$, *dass jedem y genau β und nur β Punkte x correspondieren.*

Indem wir so den Bereich unserer Untersuchung eingrenzen, sollen nun weitere Beschränkungen für die gewonnene *α-β-deutige Correspondenz* in keiner Weise eingeführt werden. Insbesondere bleibt ganz unentschieden, ob die Correspondenz im bekannten functionentheoretischen Sinne eine reducibele oder irreducibele ist, eine Unterscheidung, auf die wir nur erst späterhin bei Specialuntersuchungen wieder zurückkommen.

Unsere Hauptaufgaben aber sind, *für die vorgelegte Correspondenz analytische Darstellungen zu erbringen, sowie für die Abzählung ihrer Coincidenzen Regeln zu entwickeln.* Bei der Lösung dieser Aufgaben werden wir nicht nur klaren Einblick in das Wesen der bereits im vorigen Paragraphen vorläufig getroffenen Fallunterscheidung in gewöhnliche und singuläre Correspondenzen gewinnen, sondern wir werden zumal auch die gesamten im vorigen Paragraphen nur erst historisch gemachten Angaben beweisen können.

Um diese Ziele zu erreichen, ziehen wir mit Hrn. Hurwitz die Integrale erster Gattung der Fläche F_n heran, und zwar der Einfach-

*) Wir brauchen im vorliegenden Kapitel r stets als Summationsbuchstaben im hier gemeinten Sinne $r = 1, 2, \cdots, \alpha$.

**) Wir denken uns die F_n selbstverständlich als Riemann'sche Kugelfläche, damit die Stellen $x = \infty$, $y = \infty$ für den Wortlaut dieses Satzes keine Ausnahme nötig machen.

heit halber die zu einem ausgewählten kanonischen Querschnittsystem gehörenden Normalintegrale $j_1, j_2, \ldots, j_p$. Bei der nächstfolgenden Untersuchung spielen die unteren Grenzen der Integrale eine völlig nebensächliche Rolle; mögen wir dieserhalb nur die oberen Grenzen explicite in die Bezeichnung aufnehmen, indem wir z. B. unter $j_i(z)$ das Integral j_i, geführt von einer beliebig zu wählenden Stelle der F_n auf irgend einem Wege bis zur Stelle z, verstehen.

Indem wir zur vorgelegten Correspondenz zurückgehen, bilden wir uns die p Integralsummen:

$$j_i(y_1) + j_i(y_2) + \cdots + j_i(y_\alpha) \tag{1}$$

und wollen dieselben als Functionen der Stelle x interpretieren. Offenbar werden wir da p *auf der ganzen Fläche endliche* Functionen der Stelle x haben. Um dieselben aber näher zu untersuchen, lassen wir x irgend einen geschlossenen Weg auf der F_n durchlaufen. Am Schlusse des Weges werden auch die α Stellen y_r insgesamt ihre Anfangslage wieder angenommen haben, nur dass ihre Reihenfolge im allgemeinen eine andere geworden ist. Wenn man aber die dergestalt vollzogene Permutation der y_r in ihre Cyclen auflöst, so wird man leicht gewahr, dass beim geschlossenen Wege des x die einzelne Summe (1) in sich selbst vermehrt um eine Periode von j_i übergegangen ist. Die dieser letzteren Periode zu Grunde liegende Bahn, welche sich aus einzelnen, den Cyclen der fraglichen Permutation entsprechenden, Zügen zusammensetzt, ist offenbar von dem Index i der besonderen Summe (1) ganz unabhängig. Demgemäss haben wir als Resultat: *Die p Integralsummen* (1), *betrachtet als Functionen der Stelle x, vermehren sich bei einem geschlossenen Wege des x um ein „System simultaner Perioden" der $j_1, \ldots, j_p$.*

Die fraglichen p Integralsummen werden hiernach, in Abhängigkeit von x, p Integrale erster Gattung der F_n vorstellen; denn wir haben mit überall endlichen Functionen zu thun, die bei Periodenwegen des Argumentes x additive Constante annehmen. Stellen wir die gewonnenen p Integrale durch $j_1(x), \ldots, j_p(x)$ explicite dar, *so ergeben sich damit die p für die vorgelegte Correspondenz charakteristischen Integralrelationen:*

$$\sum_{r=1}^{\alpha} j_i(y_r) = \sum_{k=1}^{p} \pi_{ik} j_k(x) + \pi_i. \tag{2}$$

Die π_{ik} sind hierbei p^2 constante Grössen, welche als die massgebenden Bestandteile innerhalb der Relation (2) anzusehen sind. Demgegenüber sind die p Zahlen π_i ganz unwesentlich; sie hängen einzig

von den unteren Grenzen der j ab, welche wir uns übrigens für jedes einzelne in (2) enthaltene Integral particulär ausgewählt denken können.

Um nähere Angaben über die Constanten π_{ik} abzuleiten, gehen wir auf das kanonische Querschnittsystem der F_n zurück und lassen x erstlich den Schnitt b_l in geeigneter Richtung*) durchlaufen. Das Integral $j_l(x)$ wächst dabei um den Betrag 1 (cf. I p. 530), während die $p-1$ anderen Integrale $j_k(x)$ unverändert bleiben. Die linken Seiten der p Gleichungen (2) erhalten (wie wir im vorletzten Absatze bewiesen) p simultane Perioden als Zuwüchse, und die letzteren haben die Gestalt:

$$h_{il} + \sum_{m=1}^{p} g_{ml}\,\tau_{im}, \tag{3}$$

wo die h und g ganze Zahlen sind, von denen die letzteren, g, von i unabhängig sind. Indem wir die Änderung der rechten Seite von (2) mit derjenigen der linken Seite identisch setzen, *entspringen für die p^2 Coefficienten π_{il} der Relationen* (2) *die Darstellungen:*

$$\pi_{il} = h_{il} + \sum_{m=1}^{p} g_{ml}\,\tau_{im}, \quad (i, l = 1, 2, \cdots, p), \tag{4}$$

in denen die g, h, um es zu wiederholen, gewisse $2p^2$ ganze Zahlen sind.

Ein zweites System von p^2 ähnlich gebauten Relationen verschaffen wir uns dadurch, dass wir in (2) den Punkt x nunmehr die Periodenbahn a_l des kanonischen Schnittsystems im bestimmten Sinne durchlaufen lassen. Rechter Hand tritt bei der i^{ten} Relation (2) der Betrag $\sum_{k=1}^{p} \pi_{ik}\tau_{kl}$ hinzu, während in den linken Seiten dieser Relationen wieder ein System simultaner Perioden additiv hinzukommt. *Sind also H_{il} und G_{kl} gewisse $2p^2$ neue ganze Zahlen, so haben wir den Gleichungen* (4) *die weiteren p^2 Relationen anzureihen:*

$$\sum_{k=1}^{p} \pi_{ik}\tau_{kl} = H_{il} + \sum_{k=1}^{p} G_{kl}\,\tau_{ik}, \quad (i, l = 1, 2, \cdots, p). \tag{5}$$

Endlich bietet sich die Möglichkeit, die Grössen π_{ik} aus den Relationen (4) und (5) dadurch gänzlich zu eliminieren, dass man die aus (4) entspringenden Werte von π_{ik} in (5) einträgt. *Diese Rechnung führt auf die p^2 Gleichungen:*

---

*) Es ist stets diejenige Richtung zu nehmen, welche vom linken zum rechten Ufer des conjugierten Schnittes führt.

$$\sum_{k=1}^{p} h_{ik}\tau_{kl} + \sum_{k=1}^{p}\sum_{m=1}^{p} g_{mk}\tau_{im}\tau_{kl} = H_{il} + \sum_{k=1}^{p} G_{kl}\tau_{ik}, \tag{6}$$
$$(i, l = 1, 2, \cdots, p);$$

dieselben stellen p^2, unserer Correspondenz eigentümliche, ganzzahlige Identitäten zweiten Grades zwischen den Perioden τ der von uns ausgewählten Normalintegrale erster Gattung j vor.

Die Gleichungssysteme (2), (4) und (6) bilden das wesentliche Fundament der weiteren Untersuchung. Dabei muss man freilich nicht annehmen, dass allein durch die letzten Gleichungssysteme (4) bis (6), in denen die y_α nicht mehr vorkommen, die vorgelegte Correspondenz bereits eindeutig definiert sei. Wir werden vielmehr späterhin sehen, dass zu dem gleichen Coefficientensystem π_{ik} immer unendlich viele verschiedene Correspondenzen gehören.

§ 3. Von der Gesamtheit der algebraischen Gebilde des Geschlechtes p.

Um die Verwendung der Gleichungssysteme des vorigen Paragraphen für eine allgemeine Theorie der algebraischen Correspondenzen durchzuführen, müssen wir vorher einen neuen Excurs einschieben, der zum Ziele hat, die Gesamtmannigfaltigkeit aller algebraischen Gebilde eines einzelnen Geschlechtes p zu überblicken und insbesondere die Rolle aufzuweisen, welche für $p > 0$ die $\frac{p(p+1)}{2}$ Grössen τ_{ik} hierbei spielen.

Für $p = 0$ und $p = 1$ kommen wir auf sehr bekannte Verhältnisse zurück. Je zwei Flächen des Geschlechtes $p = 0$ sind rational in einander transformierbar; aber bei $p = 1$ ist zu diesem Zwecke notwendig und hinreichend, dass beiden Flächen der gleiche Wert der absoluten Invariante J zukommt. *Während wir also überhaupt nur ein einziges Gebilde $p = 0$ haben, existieren gerade ∞^1 Gebilde $p = 1$,* allen unterschiedenen Werten des *einen* Parameters J entsprechend. Man drückt dies nach Riemann in der Regel dahin aus, *dass die Gebilde $p = 1$* e i n e n *„Modul" haben.*

Es ist uns nun sehr geläufig, dass man als Modul der Gebilde $p = 1$ nicht nur die *rationale* Invariante J gebrauchen kann. In der That können wir an Stelle von J auch eine *irrationale* Invariante setzen, wie z. B. λ oder μ im ersten Kapitel des ersten Abschnittes; aber namentlich sei hier noch besonders betont, dass wir endlich auch eine *transcendente* Invariante, nämlich den Periodenquotienten ω gebrauchen können. Da kommen dann betreffs der für das einzelne Ge-

bilde charakteristischen Werte des ω die uns seit lange bekannten Verhältnisse der Modulteilung zur Geltung, insofern alle äquivalenten ω nun das gleiche Gebilde geben. Man beachte übrigens sogleich, dass ω nur eine andere Bezeichnung für die eine bei $p = 1$ eintretende Periode τ_{11} ist.

Merken wir uns aber vor allem noch, *dass die Gesamtheit der Gebilde $p = 1$ eine durchaus continuierliche Mannigfaltigkeit bildet, die wir ein-dimensional nennen wollen*, insofern die einzelne Stelle dieser Mannigfaltigkeit durch den Wert der einen Variabelen J bez. ω fixiert werden kann.

Der Fall des Geschlechtes $p = 1$ wird als Prototyp dienen müssen für die Gebilde eines beliebigen Geschlechtes $p > 1$. Den Übergang zwischen den verschiedenen Gebilden p vermittelt man hier wohl am zweckmässigsten dadurch, dass man bei einer ersten Fläche F_n des Geschlechtes p stetige Lagenänderungen der Verzweigungspunkte vornimmt. Die hierbei eintretende Überlegung, der wir nicht ins einzelne nachgehen können, sehe man in der in I häufig genannten Schrift Kleins, *Über Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale*, (p. 64 ff.) nach. Es wird dortselbst unter Benutzung der bezeichneten Massnahme der bereits von Riemann aufgestellte Satz entwickelt, *dass alle algebraischen Gebilde eines bestimmten Geschlechtes $p > 1$ eine einzige zusammenhängende Mannigfaltigkeit von $(3p - 3)$ Dimensionen bilden.* Der hiermit formulierte Satz gehört zu den wichtigsten Fundamenten der ganzen Theorie der algebraischen Functionen. Übrigens ist die Thatsache, dass auch bei einem Geschlechte $p > 1$ alle zugehörigen Gebilde nur eine *einzige zusammenhängende* Mannigfaltigkeit bilden, von Riemann selbst nie ausdrücklich betont. Dieser Umstand wurde vielmehr erst von Klein a. a. O. auf Grund vorangehender geometrischer Entwicklungen von Lüroth*) und Clebsch**) hervorgehoben.

Zufolge der Dimensionenzahl $(3p - 3)$ der Gesamtmannigfaltigkeit algebraischer Gebilde des Geschlechtes p postulierte Riemann (in Artikel 12 seiner *Theorie der „Abel'schen Functionen"*) die Existenz gewisser $(3p - 3)$ unabhängiger Parameter, vermöge deren man das einzelne Gebilde p zu definieren vermag. Die so gemeinten $(3p - 3)$ Grössen, die *„Moduln"* einer Riemann'schen Fläche, werden dann bei beliebiger eindeutiger Transformation derselben, ähnlich wie das

---

*) *Note über Verzweigungsschnitte und Querschnitte in einer Riemann'schen Fläche*, Mathem. Ann. Bd. 3 (1871).

**) *Zur Theorie der Riemann'schen Flächen*, Mathem. Ann. Bd. 6 (1873).

J oder das ω des elliptischen Falles, den Charakter der Invarianz darbieten.

Eine directe Definition der $(3p-3)$ Moduln kann man dadurch geben, dass man in ihnen *die absoluten Invarianten der Normalcurve der Formen* φ erblickt, den Begriff der Invarianten dabei im bekannten Sinne der linearen Invariantentheorie gefasst. Für niedere Geschlechter $p = 2, 3$ kann man den hiermit gegebenen Ansatz noch leicht durchbilden; man kann dabei neben rationalen Invarianten, wie bei $p = 1$, natürlich auch irrationale gebrauchen*). Und nun ist es für uns ganz besonders wichtig, *dass wir, dem ω des Falles $p = 1$ entsprechend, auch die Perioden τ_{ik} der Integrale erster Gattung als transcendente Invarianten zu Moduln der Gebilde des Geschlechtes p heranziehen können;* dieser Ansatz kann dann gleich ganz allgemein für beliebiges p verwendet werden**).

Es findet der fragliche Ansatz aber seine unmittelbarste Verwendung in der Massnahme, dass man insbesondere die algebraischen Grössen des einzelnen Gebildes vermöge einer zugehörigen ϑ-Function darstellt; in den Reihenentwicklungen der ϑ, vermöge deren man diese Functionen in der Regel einführt, sind nämlich die τ_{ik} gerade allein die ausschlaggebenden Bestandteile.

Im näheren Verfolg der letzten Überlegung treffen wir nun auf ein sehr merkwürdiges Sachverhältnis. Die Anzahl unterschiedener

*) Über $p = 3$ insbesondere vergl. man neben der p. 510 genannten Monographie von Weber auch noch den zweiten Abschnitt in der gleichfalls häufig genannten Abhandlung von Klein „*Zur Theorie der Abel'schen Functionen*" Math. Ann. Bd. 36. Wegen sonstiger algebraischer Definitionsweisen der Moduln vergl. man Brill-Noether in Bd. 7 der Mathem. Ann. p. 300—307 (1873); eine neue transcendente Definition der Moduln giebt Klein in der Theorie der automorphen Functionen; vergl. Math. Ann., Bd. 19 p. 566 u. f. und Bd. 21 p. 216 u. f. (1882).

**) Doch bemerke man, dass speciell die *hyperelliptischen* Gebilde eines beliebigen Geschlechtes p auch von *algebraischer* Seite besonders leicht zugänglich sind. Das einzelne unter ihnen wird man auf eine zweiblättrige Fläche mit $(2p+2)$ Verzweigungspunkten beziehen, und die Moduln sind dann die absoluten Invarianten jener binären Form $(2p+2)^{\text{ten}}$ Grades, durch deren Nullsetzen die Verzweigungspunkte gegeben sind. Indem man durch lineare Transformation *drei* Verzweigungspunkte stets an vorgeschriebene Lage bringen kann, bleiben die $(2p-1)$ übrigen willkürlich beweglich; es giebt also noch $2p-1$ „Moduln". Man kann auch sagen, die $(3p-3)$ Moduln der hyperelliptischen Gebilde seien bis auf $(2p-1)$ unter ihnen specificiert, oder endlich, die hyperelliptischen Gebilde des Geschlechtes p bilden innerhalb der $(3p-3)$-fach ausgedehnten Gesamtmannigfaltigkeit der Gebilde vom Geschlechte p ein Continuum von $(2p-1)$ Dimensionen.

τ_{ik} ist nach I p. 530 durch $\frac{p(p+1)}{2}$ gegeben; hierbei müssen, damit die ϑ-Reihen convergieren, die imaginären Bestandteile der τ_{ik}, welche wir $i\sigma_{ik}$ nennen, der Bedingung genügen, dass

$$(1)\qquad \Psi(\sigma_{ik}) = \sigma_{11}x_1^2 + \sigma_{22}x_2^2 + \cdots + 2\sigma_{12}x_1x_2 + \cdots + 2\sigma_{p-1,p}x_{p-1}x_p$$

eine *definite,* und zwar *positive* quadratische Form abgiebt (was im Falle $p = 1$ einfach auf die Forderung eines der *positiven* Halbebene angehörenden ω hinausläuft). Aber die Einschränkung $\Psi > 0$ lässt dem System der τ_{ik} noch seine $\frac{p(p+1)}{2}$-fache Beweglichkeit und diese Zahl stimmt doch nur für $p = 2$ und $p = 3$ mit der Anzahl $(3p - 3)$ der Moduln der Gebilde p. *Wir postulieren somit bei* $p > 3$ *für die* τ_{ik} *neben der Forderung* $\Psi > 0$ *noch weitere* $\frac{(p-2)(p-3)}{2}$ *unabhängige Bedingungen:*

$$(2)\qquad \Phi_1(\tau_{ik}) = 0\,,\ \cdots,\ \Phi_{\frac{(p-2)(p-3)}{2}}(\tau_{ik}) = 0,$$

welche erfüllt sein müssen, damit die τ_{ik} *vermöge ihrer dann noch bleibenden* $(3p-3)$*-fachen Variabilität als Moduln für das Geschlecht* p *fungieren können.*

Was diese Bedingungen (2) angeht, so hat man nur erst den niedersten Fall $p = 4$ erledigen können, wo *eine* Relation zwischen den zehn τ_{ik} in Betracht kommt. Es ist in der That Hrn. Schottky*) gelungen, eine erste Gestalt für diese Relation wirklich anzugeben; und zwar handelt es sich dabei um eine Gleichung zwischen den Nullwerten der geraden ϑ-Functionen, die für die τ_{ik} einer Fläche $p = 4$ stets erfüllt ist. Im übrigen aber ist die Frage nach der Eigenart der Relationen (2) zur Zeit noch durchaus eine offene.

§ 4. Von den singulären Riemann'schen Flächen. Einteilung der Correspondenzen in singuläre und gewöhnliche.

Wir mussten die allgemeine Besprechung des vorigen Paragraphen einschalten, um die Bedeutung der Perioden τ_{ik} für die algebraischen Gebilde des Geschlechtes p in ihrem vollen Umfange zu ermessen: denn die Grössen τ_{ik} sind nach den Formeln von § 2 für die Correspondenztheorie insbesondere von grundlegender Bedeutung. Um dies einzusehen, gehen wir wieder einen inductiven Weg und speciali-

---

*) Siehe die Abhandlung *„Zur Theorie der Abel'schen Functionen von vier Variabelen"*, Crelle's Journal Bd. 102 (1888).

sieren die p^2 Gleichungen (6) § 2 für den niedersten Fall $p = 1$. Wir erhalten da, indem wir $\tau_{11} = \omega$ setzen, die *eine* Gleichung:

$$g\omega^2 + (h - G)\omega - H = 0 \tag{1}$$

und sind mit ihr zu genau demselben Ansatze zurückgeführt, den wir im vierten Abschnitt (Kap. 5) der Einführung jener *singulären Moduln* ω zu Grunde legen konnten, für welche complexe Multiplication stattfindet.

So haben wir auch hier wieder die damalige grundlegende Fallunterscheidung:

Erstlich kann die Gleichung (1) *identisch erfüllt sein, und dies tritt stets und nur dann ein, wenn die vier ganzen Zahlen g, h, G, H die drei Bedingungen:*

$$g = 0, H = 0, \quad h = G \tag{2}$$

erfüllen. Für den Modul ω oder J des Gebildes $p = 1$ liegt dann keinerlei besondere Beschränkung vor.

Wenn aber *zweitens* die ganzen Zahlen $g, h, \cdot\cdot$ der Bedingung (2) nicht genügen, so müssen sie, wenn anders wir in (2) einen für uns brauchbaren Ansatz haben sollen, in $(g, h - G, -H)$ eine quadratische Form negativer Determinante bilden. Das Gebilde $p = 1$, welches wir nun als ein *singuläres* zu bezeichnen haben, ist durch die Formclasse $(g, h - G, -H)$ eindeutig bestimmt, und umgekehrt gehört zu jeder Formclasse negativer Determinante *ein* bestimmtes singuläres Gebilde des Geschlechtes $p = 1$. Aus den früheren Sätzen aber ergiebt sich unmittelbar: *Innerhalb der continuierlichen Gesamtmannigfaltigkeit aller Gebilde $p = 1$ liefern die singulären Gebilde dieses Geschlechtes eine überall dichte, aber durchaus discrete Mannigfaltigkeit.*

Für $p > 1$ treffen wir nun analoge, aber weit compliciertere Verhältnisse an.

Als einfachsten Fall haben wir wieder den voranzustellen, *dass die p^2 Relationen* (6) § 2 *unabhängig von den Werten der τ_{ik} erfüllt sind.* Es ist eine leichte Betrachtung, welche zu dem Resultate führt, *dass dieser Fall stets und nur dann eintritt, wenn die $2p$ ganzen Zahlen h_{ii}, G_{ii} einander gleich sind:*

$$h_{11} = h_{22} = \cdots = h_{pp} = G_{11} = G_{22} = \cdots = G_{pp}, \tag{3}$$

während alle $p(p-2)$ übrigen ganzen Zahlen $g, h, \cdot\cdot$ verschwinden. Das Gebilde ist hier wieder in keiner Weise specificiert, d. i. die τ_{ik} haben nur erst den immer bestehenden Bedingungen:

$$\Psi > 0, \quad \Phi_1 = 0, \cdots, \quad \Phi_{\frac{(p-2)(p-3)}{2}} = 0 \tag{4}$$

zu genügen.

Aber indem wir jetzt auch bei allgemeinem p jede Fläche F_n und damit jedes Gebilde p als ein *singuläres* bezeichnen, dessen Moduln τ_{ik} eine *nicht* identisch verschwindende ganzzahlige quadratische Relation (6) § 2 oder mehrere solche befriedigen, haben wir offenbar für diese singulären Gebilde des Geschlechtes p eine grössere Reihe möglicher Fälle zu unterscheiden.

Es kann sein, dass die Relationen (6) § 2 im Verein mit den eben angegebenen Relationen (4) eine Reihe sich nicht widersprechender Bedingungen vorstellen, denen man nur durch eine *endliche* Zahl unterschiedener Systeme von Werten τ_{ik} genügen kann. Die so gemeinten Zahlsysteme τ_{ik} werden alsdann, insofern sie Lösungen des *ganzzahligen* Gleichungssystems (6) § 2 sind, einen leicht zu umgrenzenden arithmetischen Charakter haben, während wir freilich bei $p \geq 4$ infolge der Gleichungen (4) den numerischen Charakter dieser speciellen Systeme τ_{ik} nicht erschöpfend anzugeben vermögen, da sich eben die Gleichungen (4) in diesem Betracht zur Zeit jeder Vermutung entziehen.

Aber das ist wieder nur ein Grenzfall, der dem unter (3) gemeinten Falle genau gegenüberliegt. Dazwischen liegt (wenn $p > 1$ ist) eine Reihe neuer Möglichkeiten: In der That mag ja ein einzelnes vorgelegtes Gleichungssystem (6) § 2 im Verein mit (4) die Beweglichkeit der τ_{ik} auf eine $(3p-3-\varrho)$-fache einschränken, wo jetzt ϱ irgend eine ganze Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, 3p-2$ ist. Die Gleichungen (6) § 2 repräsentieren in diesem Falle ϱ unabhängige Bedingungen, so dass sich die τ_{ik} in $\frac{p(p+1)}{2} - \varrho$ zunächst willkürlich bleibenden Grössen mit Hülfe von Coefficienten darstellen, die einem numerisch wohlbestimmten Gebiete angehören. Mit den Bedingungen (4) aber treten dann wieder weitere Einschränkungen für die τ_{ik} hinzu, deren genauer Charakter uns nicht weiter bekannt ist.

Die durch ein einzelnes System nicht durchgängig identisch verschwindender Gleichungen (6) § 2 definierten singulären Gebilde werden bei dieser Sachlage, allgemein zu reden, eine Mannigfaltigkeit bilden, die aus einem oder aus mehreren Continuen besteht; nur im äussersten Falle $(\varrho = 3p-3)$ schrumpfen diese Continua auf einzelne Gebilde zusammen. Wir müssen dieserhalb von einer ganzen *Classe singulärer Gebilde des Geschlechtes p* sprechen, in welche alle aus der Gesamtmannigfaltigkeit p durch ein einzelnes Gleichungssystem (6) § 2 ausgeschiedenen Gebilde zusammengefasst sind. Im Gegensatz zu den übersichtlichen Verhältnissen des Falles $p = 1$ muss man sich dabei vorstellen, *dass sich die verschiedenen Classen singulärer Gebilde in der Gesamtmannigfaltigkeit der Gebilde p aufs vielfältigste durchdringen.*

Wir werden späterhin geradezu die Frage aufzuwerfen haben, wieviel verschiedene Classen singulärer Gebilde sich in einem particulär gewählten Gebilde überkreuzen mögen.

Die Theorie der singulären Riemann'schen Flächen steht in enger Beziehung zu älteren Untersuchungen Kroneckers*) über Transformation der ϑ-Reihen, ein Gegenstand, der späterhin ausführlicher von den Herren H. Weber**) und Frobenius***) durchgeführt worden ist. Der Ausgangspunkt dieser Untersuchungen ist, wie bereits eben angedeutet wurde, die Transformation beliebiger Ordnungen einer einzelnen ϑ-Reihe von p Variabelen, und man fragt, um es durch eine uns geläufige Benennung auszudrücken, nach den Fixpunkten der dabei auftretenden linearen Substitutionen der Perioden. Das ist also genau die Verallgemeinerung jener Fragestellung, wie wir für $p = 1$ oben pag. 176 (in den ersten Zeilen) formulierten. Die Fortbildung dieser zunächst rein analytischen Ansätze muss, sofern man auch noch die Relationen (4) in die Untersuchung einführt, auf singuläre algebraische Gebilde unserer Art hinführen. Inzwischen ist eine weitergehende functionentheoretische Durchforschung unseres Gegenstandes nur erst für $p = 2$ in Angriff genommen, und zwar durch Hrn. Wiltheiss†); aber man kann nicht zweifeln, dass auch in den weiter folgenden niederen Fällen $p = 3, 4, \cdots$ in dieser Richtung noch interessante Resultate zu finden sind, die dann zumal auch geometrische Bedeutung für die zugehörigen Normalcurven gewinnen.

Die Anwendung der entwickelten Principien auf die Correspondenztheorie ist jetzt leicht gegeben. In § 2 ordneten wir jeder Correspondenz auf einer Fläche F_n des Geschlechtes p ein System von $4p^2$ ganzen Zahlen g_{ik}, h_{ik}, G_{ik}, H_{ik} eindeutig zu. Es kann erstlich sein, dass diese ganzen Zahlen gerade den unter (3) gemeinten Bedingungen genügen, welche identisches Bestehen aller Gleichungen (6) § 2 nach sich ziehen. Den gemeinsamen Wert der $2p$ möglicherweise noch von Null verschiedenen Zahlen h_{ii}, G_{ii} nennen wir $-w$. Diese ganze Zahl w, deren besonderer Wert irgend welcher sein mag, heisse als-

---

*) In den Berliner Monatberichten vom 15. October 1866, abgedruckt in Crelle's Journal Bd. 68.

**) *Über die Transformationstheorie der ϑ-Functionen, insbesondere derer von drei Veränderlichen,* Annali di Matematica, 2te Reihe Bd. 9 (1878).

***) *Über die principalen Transformationen der ϑ-Functionen mehrerer Variabelen,* Crelle's Journ. Bd. 95 (1883).

†) *Bestimmung Abel'scher Functionen mit zwei Argumenten, bei denen complexe Multiplicationen stattfinden,* Habilitationsschrift (Halle 1881), abgedruckt in Bd. 26 der Mathem. Annalen.

dann *Wertigkeit* der vorgelegten Correspondenz; letztere selbst aber soll, indem wir die Benennungen des § 1 nun im vollen Umfange wieder aufnehmen, als eine *gewöhnliche* oder auch als eine *Wertigkeitscorrespondenz* bezeichnet werden. *Die grundlegenden Gleichungen* (2), (4), (5) § 2 *einer solchergestalt definierten Wertigkeitscorrespondenz haben für die Moduln der zu Grunde liegenden Fläche F_n keinerlei Beschränkung im Gefolge.* Es wird uns aber gleich im folgenden Paragraphen obliegen, zu zeigen, dass die hiermit aufs neue gegebene Definition der gewöhnlichen oder Wertigkeitscorrespondenzen genau mit dem bereits in § 1 eingeführten Sprachgebrauch in Übereinstimmung ist.

Genügen jetzt zweitens die $4p^2$ ganzen Zahlen g, h, G, H den eben gemeinten Bedingungen nicht, so haben wir ein System nicht durchgängig identisch erfüllter Gleichungen (6) § 2. Alle Correspondenzen, welche auf eben dieses Gleichungssystem führen, mögen wir dann (und zwar wieder in Übereinstimmung mit dem Sprachgebrauch des ersten Paragraphen) in *eine Classe singulärer Correspondenzen* vereinigen. *Die Correspondenzen der einzelnen solchen Classe werden dann nur auf jenen singulären Flächen vorkommen können, welche eben der zugehörigen Classe singulärer algebraischer Gebilde p angehören.*

Es wird Gegenstand einer weiterhin anzustellenden Untersuchung sein müssen, inwieweit innerhalb der hiermit gegebenen Grenzen die verschiedenartigen Correspondenzen auch wirklich vorkommen. Geben wir nur vorläufig an, *dass auf einer singulären Fläche neben gewöhnlichen Correspondenzen in der That stets auch singuläre Correspondenzen der gerade in Betracht kommenden Classen sich finden.*

Durch Vorstehendes ist nun gezeigt, worin im Grunde der Fortschritt der Hurwitz'schen Correspondenztheorie gegenüber den früheren Betrachtungen der Geometer besteht. Eben erst dadurch, dass neben den Eigenschaften, die *allen* Gebilden des Geschlechtes p gemeinsam sind, vermöge der schärferen Begriffsbestimmungen der *Arithmetik* die *singulären* Gebilde volle Würdigung und Aufklärung fanden, konnte die Correspondenztheorie ihren principiellen Abschluss gewinnen.

§ 5. Darstellung der Wertigkeitscorrespondenzen durch die Primform. Ableitung der Cayley-Brill'schen Correspondenzformel.

Als erstes Ergebnis der Hurwitz'schen Betrachtungen entwickeln wir eine besonders einfache Theorie der *Wertigkeitscorrespondenzen*, die wir der allgemeinen Theorie vorweg nehmen wollen, um solchergestalt alle in § 1 betreffs der gewöhnlichen Correspondenzen aufgestellten Behauptungen einzulösen. Sei also auf der zu Grunde liegenden Fläche

F_n irgend ein analytisches Gesetz von der in § 2 angegebenen Art vorgelegt, nach welchem jedem Punkte x der F_n α mit x stetig sich ändernde Punkte $y_1, \ldots, y_\alpha$ eindeutig zugeordnet sind, und mögen die Integralrelationen (2) § 2 dieser α-deutigen Correspondenz solche Coefficienten π_{ik} besitzen, dass die Gleichungen (6) § 2 sämtlich unabhängig von den Werten der τ_{ik} erfüllt sind. Nach den voraufgehenden Entwicklungen ist alsdann $G_{ii} = h_{ii} = -w$, während alle übrigen g, h, G, H verschwinden. Indem wir aus (4) § 2 die zugehörigen π_{ik} berechnen, kommt das Resultat: *Die Integralrelationen unserer gewöhnlichen Correspondenz der Wertigkeit w lauten:*

$$\sum_{r=1}^{\alpha} j_i(y_r) + w j_i(x) = \pi_i. \tag{1}$$

Wir gehen nun zu dem in § 2 formulierten Plane, unsere Correspondenz in irgend einer Weise analytisch darzustellen. Die ganzen algebraischen Formen $G(x, y)$ des § 1 müssen uns hierbei zur Richtschnur dienen; wir stellen in diesem Sinne die beiden Stellen x, y der Fläche zunächst als von einander unabhängig neben einander und suchen nach einer von den beiden Stellen x, y abhängenden Function oder Form $f(x, y)$ der F_n, welche bei stehendem x eine α-wertige Function oder Form der Stelle y wird, die gerade in den α Punkten $y = y_1, \cdots, y_\alpha$ je einfach verschwindet. Natürlich werden wir bei den allgemeinen jetzt vorliegenden Voraussetzungen von vornherein nicht verlangen dürfen, dass $f(x, y)$ eine algebraische Form der F_n ist; in der That können wir nur erst unter Gebrauch *der zur F_n gehörenden Primform* der gestellten Anforderung genügen. Es geschieht dies in einfachster Weise durch das Product:

$$f(x, y) = P(y, y_1)\, P(y, y_2) \cdots P(y, y_\alpha), \tag{2}$$

wobei freilich die Abhängigkeit des $f(x, y)$ von x sich in das in (2) nicht in Evidenz tretende analytische Grundgesetz unserer Correspondenz birgt.

Die Gleichung $f(x, y) = 0$ stellt nun unsere α-deutige Correspondenz rein dar, insofern sie nämlich bei stehendem x nur durch die α Stellen $y_1, \cdots y_\alpha$ befriedigt wird*). Aber es ist sehr zu betonen, *dass auch die inverse Correspondenz, welche β-deutig sei, durch $f = 0$ rein dargestellt wird.* Soll nämlich $f(x, y)$ bei stehendem Punkte y für die

*) Hierbei sind freilich die festen Nullpunkte der Primform in den Verzweigungspunkten nicht mitgerechnet. Dieselben lassen sich, wenn man will, nach p. 494 immer dadurch eliminieren, dass man von einer kanonischen Fläche F_n ausgeht und bei der Construction der Primform mit dem auf dieser F_n existierenden überall endlichen und nicht-verschwindenden Differential $d\zeta$ operiert.

Stelle $x = x_0$ verschwinden, so muss wenigstens einer der Primfactoren (2), etwa der r^{te}, verschwinden. Dieser Factor verhält sich dann in der Umgebung der Stelle x_0 wie $(y - y_r)$, und es gilt dortselbst zufolge unserer Voraussetzungen (Anfang von § 2) eine Darstellung:

$$y_r - y = c_\nu(x - x_0)^\nu + c_{\nu+1}(x - x_0)^{\nu+1} + \cdots,$$

wo ν eine ganze Zahl > 0 und $c_\nu \gtrless 0$ ist*). Durch Inversion dieser Entwicklung wird in der That evident, dass von den β jener Stelle y correspondierenden Punkten $x_1, \ldots, x_\beta$ im ganzen ν bei x_0 coincidieren, falls $f(x, y)$ bei x_0 im Grade ν verschwindet. — Hierbei ist freilich, damit die Entwicklung von $(y_r - y)$ die eben gebrauchte Gestalt hat, vorausgesetzt, dass y_r bei x_0 nicht auf der F_n verzweigt sei; aber wir brauchen den hiermit ausgeschlossenen Fall gar nicht besonders zu untersuchen, da er nur in vereinzelten Punkten x der F_n auftreten kann (cf. § 2).

Leistet hiernach für die *reine* Darstellung unserer „α-β-deutigen" Correspondenz die Form $f(x, y)$ alles Wünschenswerte, so kann es doch für manche Betrachtungen unzweckmässig sein, dass $f(x, y)$ auf der Fläche F_n zwar unverzweigt, aber *nicht eindeutig* ist. Dieserhalb wollen wir $f(x, y)$ in der folgenden Art zu einer *eindeutigen Function* der F_n ausgestalten: Wie in § 1 seien ξ und η zwei particuläre Lagen der unabhängig veränderlichen Stellen x, y, und es mögen der Stelle ξ die α Punkte $\eta_1, \ldots \eta_\alpha$ correspondieren; die Anordnung sei so getroffen, dass η weder mit ξ noch mit einer der Stellen η_r coincidiere. Vermöge der Primform bilden wir uns dann unter Beibehaltung der Bezeichnung (2) den nachfolgenden Ausdruck:

$$(3) \qquad F(x, y \mid \xi, \eta) = \left[\frac{P(x, y)\, P(\xi, \eta)}{P(x, \eta)\, P(\xi, y)}\right]^w \cdot \frac{f(x, y)\, f(\xi, \eta)}{f(x, \eta)\, f(\xi, y)},$$

wo der ganzzahlige Exponent w die Wertigkeit unserer α-deutigen Correspondenz ist. Wir behaupten zunächst: *Der Ausdruck $F(x, y \mid \xi, \eta)$ stellt eine von den vier unabhängig veränderlichen Punkten x, y, ξ, η abhängende Function der F_n vor, welche auf dieser Fläche durchaus eindeutig ist.*

Dass erstlich F in den homogenen Variabelen jeder der vier Stellen von nullter Dimension ist, zeigt der Ausdruck (3) ohne weiteres. Man untersuche also gleich weiter F als Function von y für stehende Werte der x, ξ, η; damit hierbei aber nicht identisches Verschwinden oder Unendlichwerden von F eintritt, möge wie bisher η weder mit ξ

---

*) Betreffs der Bedeutung von $(x - x_0)$ für $x_0 = \infty$ oder für Verzweigungspunkte sehe man I p. 497.

noch mit einer der Stellen η_r coincidieren, desgleichen aber soll η auch von x und den Stellen y_r verschieden sein. Das Periodenverhalten der Primform ist aus vorigem Kapitel bekannt: durchläuft y eine Periodenbahn b_i, so geht F wieder in seinen Anfangswert über; leiten wir aber y über die Bahn a_i, so geht F in sich selbst, multipliciert mit:

$$e^{2i\pi\left\{\sum_r j_i^{y_r, \eta_r} + w j_i^{x, \xi}\right\}} \tag{4}$$

über. Aber wenn man x in ξ überführt, so gehen die Stellen y_r nach η_r, und also ist zufolge (1) der Exponent des Ausdrucks (4) mit Null identisch. Auf der anderen Seite bemerke man, dass unsere Function F von y auf der ganzen Fläche wesentliche Singularitäten überall nicht aufweisen kann: *Es ist demnach F eine eindeutige und zugleich eine algebraische Function der Stelle y der Fläche.*

Man betrachte jetzt $F(x, y \mid \xi, \eta)$ als Function der Stelle x. Dabei wird die schon in § 2 ausführlich betrachtete Art, wie bei Periodenwegen des x die α Punkte y_r in ihre Anfangslage zurückkehren, von Bedeutung. Ohne hier noch einmal die Überlegung ausführlich zu wiederholen, sagen wir gleich, dass F bei einem Periodenwege des x in sich selbst, multipliciert mit einem Factor:

$$e^{\sum_{i=1}^{p} C_i j_i^{y, \eta}}, \tag{5}$$

übergehen wird. Dabei sind die C constante, nur vom Periodenwege abhängende Zahlen; aber dieselben müssen sämtlich verschwinden, weil anderenfalls F nach Durchlaufung der Periodenbahn des x augenscheinlich nicht mehr eine *algebraische* Function von y vorstellen könnte: *also auch vom Punkte x ist F eindeutig und damit algebraisch abhängig.*

Endlich ist die eindeutige, und natürlich wiederum algebraische Abhängigkeit des F von ξ und η eine einfache Folge der Identität:

$$F(\xi, \eta \mid x, y) = F(x, y \mid \xi, \eta).$$

Vermöge der Gleichung:

$$F(x, y \mid \xi, \eta) = 0 \tag{6}$$

ist nun zufolge der erhaltenen Resultate die *algebraische Darstellung unserer α-β-deutigen Correspondenz der Wertigkeit w zwischen Punkten x, y der F_n* in einer ersten Gestalt geleistet. Aber diese Darstellung ist im Gegensatz zu der durch Nullsetzen des Productes (2) entspringenden in allen Fällen einer nicht verschwindenden Wertigkeit nicht eine reine. *Vielmehr wird bei stehendem Punkte x (bez. y) neben den α*

(bez. β) correspondierenden Punkten y (bez. x) durch $F = 0$ immer noch der Punkt x (bez. y) selbst, w-fach gezählt, mitgeliefert. Hier also sind wir zur Brill'schen Fassung des Begriffs der Wertigkeit einer Correspondenz unmittelbar zurückgeführt (cf. § 1), wie denn vor allen Dingen aus der Darstellung (6) evident geworden ist, dass die im vorigen Paragraphen gegebene Definition der Wertigkeitscorrespondenzen sich mit derjenigen des § 1 im Wesen deckt. In der That braucht man hierbei nur etwa noch zu bemerken, dass umgekehrt auch *jede* durch Nullsetzen einer algebraischen Function zweier Flächenpunkte im Sinne des § 1 zu definierende Correspondenz vermöge des Abel'schen Theorems auf die für die Wertigkeitscorrespondenzen charakteristischen Integralrelationen führt.

Es würde sich hieran die Discussion schliessen müssen, wie man die Function $F(x, y \mid \xi, \eta)$, vielleicht für particulär gewählte ξ, η, vermöge einer bi-ternären Form $G(x_1, x_2, x_3 \mid y_1, y_2, y_3)$ nach Art von (1) p. 520 darzustellen vermag, wenn man nicht etwa für eine derartige explicite Darstellung eine andere Formentheorie der Fläche gebrauchen will. Solchergestalt würde zumal das analytische Grundgesetz der Correspondenz, welches in dem Ausdrucke (3) von F doch nur implicite enthalten ist, äusserlich in algebraischer Gestalt unmittelbar evident werden. Inzwischen müssen wir die hiermit gemeinte Untersuchung bis später (Kap. 6) verschieben und leiten vorab nur noch aus der Gleichung (3) das Cayley-Brill'sche Correspondenzprincip ab, welches wir gleichfalls schon im § 1 vorläufig namhaft machten.

Es sei v im Sinne von p. 521 die Anzahl der Coincidenzen, welche unsere α-β-deutige Correspondenz auf der Fläche F_n aufweist. Zur Berechnung dieser Anzahl v werden wir die beiden Punkte x und y zur Coincidenz bringen, worauf zufolge unserer obigen Bemerkungen über $f(x, y)$ die Zahl v gleich der Anzahl einfacher Nullpunkte der Form $f(x, x)$ auf der F_n wird, falls wir von den in den Verzweigungspunkten festliegenden Nullpunkten dieses Primform-Productes absehen. Zur Berechnung der Anzahl der so gemeinten Nullpunkte von $f(x, x)$ haben wir nun mehrere Wege, und es schliesst sich an die voraufgehende Entwicklung am engsten die nachfolgende *algebraische* Deduction an:

Setzen wir in der algebraischen Function $F(x, y \mid \xi, \eta)$ nach geeigneter particulärer Auswahl von ξ, η die beiden Stellen x und y identisch, so tritt zufolge der rechten Seite von (3) in F der identisch verschwindende Factor $P(x, x)$ auf. Aber die Primform $P(x, y)$ wird bei unendlich nahe liegenden Stellen x, y bekanntlich *algebraisch*, in-

dem sie in das Differential $d\zeta_x$ übergehrt; nach Auslösung dieses störenden Factors bleibt uns demnach in:

$$(7) \qquad \Phi(x_1, x_2) = \left[\frac{P(\xi, \eta)}{P(x, \eta)\, P(\xi, x)}\right]^w \cdot \frac{f(x, x)\, f(\xi, \eta)}{f(x, \eta)\, f(\xi, x)}$$

eine gleichfalls *algebraische* Form der F_n, welche nur noch von der Stelle x abhängt und in den homogenen Variabelen *die Dimension* $-2w$ aufweist.

Auf $\Phi(x_1, x_2)$ wende man nun den p. 487 entwickelten Wertigkeitssatz für algebraische Formen der F_n an, und hierbei ist es eine besondere Erleichterung, dass die in Verzweigungspunkten festliegenden Nullstellen für den *zweiten* Bruch auf der rechten Seite von (7) gar nicht zu berücksichtigen sind. Diese Nullpunkte rühren ja von den Differentialen $d\zeta_x$, $d\zeta_y$ in der Definitionsgleichung der Primform her, wobei offenbar die zum zweiten Argument in $f(x, x)$ gehörenden Differentiale $d\zeta_x$ sich gerade gegen die Differentiale $d\zeta_x$ des im Nenner (7) stehenden Factors $f(\xi, x)$ fortheben, während in gleicher Weise die vom ersten Argument x in $f(x, x)$ herrührenden Differentiale $d\zeta_{y_r}$ gegen die gleichen Differentialfactoren in $f(x, \eta)$ sich heben. Bei dieser Sachlage ist die Anzahl einfacher Nullpunkte von Φ direct mit der Coincidenzenzahl ν identisch, und indem wir jetzt die Anzahl einfacher Unstetigkeitspunkte μ nennen, wird nach der bezüglichen Regel p. 487:

$$(8) \qquad \nu - \mu = -2nw$$

sein. Die Bestimmung von μ ist aus den Nullpunkten des Nenners (7) leicht geleistet: $f(\xi, x)$ liefert deren noch α einfache, $f(x, \eta)$ aber β; jede der Primformen $P(x, \eta)$, $P(\xi, x)$ aber verschwindet einfach an einer gewissen Stelle der F_n (nämlich η bez. ξ) und je $\frac{\varkappa - 1}{2}$-fach in einem Verzweigungspunkte mit $\varkappa$ Blättern. Somit ist:

$$\mu = \alpha + \beta + w\,[2 + \Sigma(\varkappa - 1)],$$

wo sich die Summe auf die gesamten Verzweigungspunkte von F_n bezieht. Mit Hülfe der Formel (2) in I p. 340 setzt sich der gewonnene Ausdruck μ in:

$$\mu = \alpha + \beta + 2w(p + n)$$

um, und also folgt durch Einsetzen in (8) für ν der Wert:

$$(9) \qquad \nu = \alpha + \beta + 2wp,$$

womit die Cayley-Brill'sche Correspondenzformel thatsächlich gewonnen ist.

Hiermit sind nunmehr alle in § 1 betreffs der gewöhnlichen aufgestellten Behauptungen eingelöst.

§ 6. Die arithmetische Grundlegung der allgemeinen Correspondenztheorie.

Um später nicht unterbrechen zu müssen, senden wir einen Hülfssatz über die Perioden τ_{ik} der Normalintegrale erster Gattung voraus: *Sollen wir durch $2p$ ganze Zahlen A_i, B_k die p Gleichungen:*

$$(1) \qquad A_i + \sum_{k=1}^{p} B_k \tau_{ik} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, p)$$

befriedigen, so kann das für ein Wertsystem τ_{ik} einer beliebig herausgegriffenen Riemann'schen Fläche des Geschlechtes p nur dadurch geschehen, dass wir alle $2p$ Zahlen A, B mit Null identisch nehmen. Man bilde nämlich das Integral erster Gattung:

$$(2) \qquad j = B_1 j_1 + B_2 j_2 + \cdots + B_p j_p;$$

dasselbe hat unter Voraussetzung von (1) lauter *reelle* Periodicitätsmoduln, indem längs des Schnittes a_i die Wertdifferenz B_i, längs b_i aber zufolge (1) die Differenz $- A_i$ eintritt. Schreibt man hiernach $j = u + iv$, so ist v ein auf der F_n überall endliches und eindeutiges Potential. Also ist v nach den bezüglichen in I p. 523 ff. entwickelten Sätzen auf der ganzen Fläche constant und damit ist dann auch j mit einer Constanten identisch. Da nun die $j_1, \ldots, j_p$ linear-unabhängig sind, so folgt $B_1 = 0, \ldots, B_p = 0$ und damit aus (1) $A_i = 0$.

Wir wollen nunmehr die Fragen der Theorie der algebraischen Correspondenzen auf der F_n in voller Allgemeinheit behandeln, indem wir von unserer Fläche F_n nichts weiter annehmen, *als dass sie* $(3p-3)$ *specificierte Moduln haben;* denn in der That wird die Correspondenztheorie der F_n, als eine *arithmetische* Theorie, nicht invariant bei Abänderung der Moduln sein können. Wir müssen nun die allgemeinen Entwicklungen des § 4 über singuläre Flächen heranziehen und erinnern zunächt daran, dass sich die damals besprochenen Classen singulärer Gebilde des Geschlechtes p in der Gesamtmannigfaltigkeit algebraischer Gebilde dieses Geschlechtes in der vielfältigsten Weise durchdringen. Die damaligen Entwicklungen haben wir gegenwärtig noch weiter fortzusetzen, indem wir geradezu fragen: *Wieviel Classen singulärer Gebilde schneiden einander in unserem vorgelegten Gebilde F_n, und wie vermögen wir uns über alle jene Classen den Überblick zu verschaffen?*

Wir kleiden diese Aufgabe des näheren so ein, *dass wir bei gegebenen τ_{ik} die p^2 Gleichungen:*

$$(3)\qquad \sum_{k=1}^{p} h_{ik}\tau_{kl} + \sum_{k=1}^{p}\sum_{m=1}^{p} g_{mk}\tau_{km}\tau_{kl} = H_{il} + \sum_{k=1}^{p} G_{kl}\tau_{ik}$$

auf alle Weisen durch $4p^2$ ganze Zahlen g, h, G, H lösen sollen. Dabei ist freilich noch keineswegs gesagt, dass zwei unterschiedene Lösungen (g, h, G, H) stets auch zwei verschiedene Classen singulärer Gebilde liefern; es mag vielmehr das System der p^2 definierenden Gleichungen der einzelnen Classe sehr verschiedener Gestalten fähig sein. Aber wir werden doch solchergestalt durch Aufzählung aller Lösungen von (3) alle Classen, an denen F_n Teil hat, sicher je einmal gewinnen.

Man bemerke nun gleich, dass das einzelne Lösungssystem von (3) bereits durch seine $2p^2$ Zahlen g, h eindeutig bestimmt ist. Haben wir nämlich zwei Lösungen, die in den g, h übereinstimmen, so gelten nach (3) bei jedem stehenden Wert l die p Gleichungen:

$$(H'_{il} - H_{il}) + \sum_{k=1}^{p} (G'_{kl} - G_{kl})\tau_{ik} = 0$$

mit $i = 1, 2, \cdots, p$; nach dem Hülfssatze (1) sind also auch die Zahlen G, H beider Systeme bez. einander gleich. Bei dieser Sachlage ist jedem Lösungssysteme von (3) *eindeutig* ein System von p^2 Zahlen π_{ik} durch:

$$(4)\qquad \pi_{ik} = h_{ik} + \sum_{m=1}^{p} g_{mk}\tau_{im}, \quad (i, k = 1, 2, \cdots, p)$$

zugeordnet, und wir beweisen wiederum vermöge des Hülfsatzes (1) den Satz, *dass das einzelne Lösungssystem* (3) *durch seine p^2 Zahlwerte π_{ik} (die natürlich im allgemeinen nicht ganzzahlig sind) bereits eindeutig bestimmt ist.* Es wird demgemäss erlaubt sein, auch von den Lösungen (g, h) oder den Lösungen (π) unseres Problems (3) zu sprechen.

Zum Fundament unserer ferneren Überlegung wird nun das folgende Sachverhältnis: Haben wir t Lösungen des Problems (3) gefunden, so mögen wir sie durch obere Indices unterscheiden:

$$(5)\qquad (g^{(\varepsilon)}, h^{(\varepsilon)}, G^{(\varepsilon)}, H^{(\varepsilon)}) \text{ für } \varepsilon = 1, 2, \cdots, t.$$

Sind dann $x_1, x_2, \ldots, x_t$ irgend welche t ganze positive oder negative Zahlen und definieren wir die $4p^2$ ganzen Zahlen g, h, G, H durch:

$$(6)\qquad \begin{cases} g_{ik} = x_1\, g_{ik}^{(1)} + x_2\, g_{ik}^{(2)} + \cdots + x_t\, g_{ik}^{(t)}, \\ h_{ik} = x_1\, h_{ik}^{(1)} + x_2\, h_{ik}^{(2)} + \cdots + x_t\, h_{ik}^{(t)}, \\ G_{ik} = x_1\, G_{ik}^{(1)} + x_2\, G_{ik}^{(2)} + \cdots + x_t\, G_{ik}^{(t)}, \\ H_{ik} = x_1\, H_{ik}^{(1)} + x_2 H_{ik}^{(2)} + \cdots + x_t H_{ik}^{(t)}, \end{cases}$$

mit $i, k = 1, 2, \cdots, p$, *so haben wir bei der Natur unseres Problems*

(3) *offenbar auch in* (g, h, G, H) *eine Lösung desselben gewonnen.* Diese $4p^2$ Gleichungen (6) sind aber, wie aus den vorangegangenen Überlegungen unmittelbar folgt, völlig äquivalent mit den p^2 Gleichungen:

$$\pi_{ik} = \varkappa_1 \pi_{ik}^{(1)} + \varkappa_2 \pi_{ik}^{(2)} + \cdots + \varkappa_t \pi_{ik}^{(t)}, \tag{7}$$

welch' letztere wir gebrauchen werden, wenn wir lieber mit den Lösungen (π) unseres Problems (3) arbeiten.

Einem gewohnten Brauche folgend, nennen wir die t Lösungssysteme $(g^{(\iota)}, h^{(\iota)}, G^{(\iota)}, H^{(\iota)})$ oder $(\pi^{(\iota)})$ von einander *linear-abhängig* oder kurz *abhängig*, wenn man t nicht durchgehends verschwindende ganze Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_t$ finden kann, welche den p^2 Gleichungen:

$$\varkappa_1 \pi_{ik}^{(1)} + \varkappa_2 \pi_{ik}^{(2)} + \cdots + \varkappa_t \pi_{ik}^{(t)} = 0 \tag{8}$$

genügen; giebt es aber ein solches System ganzer Zahlen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_t$ nicht, so heissen die t Lösungen (5) *linear-unabhängig* oder schlechthin *unabhängig*.

Dann gilt als erstes Resultat: *Wie wir auch t Lösungen unseres Problems aussuchen mögen, dieselben sind stets linear abhängig, falls $t > 2p^2$ ist.* Es lassen sich nämlich die p^2 Gleichungen (8) durch die $2p^2$ Gleichungen:

$$\begin{cases} \varkappa_1 g_{ik}^{(1)} + \varkappa_2 g_{ik}^{(2)} + \cdots + \varkappa_t g_{ik}^{(t)} = 0, \\ \varkappa_1 h_{ik}^{(1)} + \varkappa_2 h_{ik}^{(2)} + \cdots + \varkappa_t h_{ik}^{(t)} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

vollständig ersetzen, welche wir als $2p^2$ lineare Gleichungen für die t Unbekannten $\varkappa$ mit *ganzzahligen* Coefficienten g, h anzusehen haben. Sobald hier die Anzahl t der Unbekannten $\varkappa$ die Zahl $2p^2$ der Gleichungen übersteigt, können wir nach den Elementen der Determinantentheorie — zufolge der ganzzahligen g, h — Systeme *ganzer, nicht durchgängig verschwindender* Zahlen $\varkappa$ aus (9) wirklich berechnen, die dann die p^2 Gleichungen (8) befriedigen.

Mögen wir jetzt insbesondere t Lösungen $(\pi^{(\iota)})$ gefunden haben, die zwar selbst *unabhängig* von einander sind, die aber mit jedem neuen System (π) eine Reihe von $(t+1)$ *abhängigen* Lösungssystemen von (3) abgeben. Es besteht dann also für jede fernere Lösung das System der p^2 Gleichungen:

$$\varkappa \pi_{ik} + \varkappa_1 \pi_{ik}^{(1)} + \cdots + \varkappa_t \pi_{ik}^{(t)} = 0 \tag{10}$$

mit $(t+1)$ *ganzen* Zahlen $\varkappa, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_t$, die nicht sämtlich verschwinden; insbesondere wird $\varkappa \gtrless 0$ sein, weil anderenfalls die t ausgewählten Systeme $(\pi^{(\iota)})$ abhängig wären*). Natürlich können wir an Stelle der

*) Die t Zahlen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_t$ können aber sehr wohl alle verschwinden, wodurch eine Wertigkeitscorrespondenz von der besonderen Wertigkeit $w = 0$ angezeigt ist.

$(\pi^{(1)}), \ldots, (\pi^{(t)})$ auch irgend eine andere Reihe linear-unabhängiger Lösungssysteme des Problems (3) zu Grunde legen. Aber aus den Gleichungen (10) entnimmt man vermöge einer sehr gebräuchlichen Schlussweise der Arithmetik*), *dass man auf jedem neuen Wege immer wieder gerade zu t, und nicht mehr oder weniger, linear-unabhängigen Lösungssystemen von* (3) *gelangt.*

Die ganze Zahl t giebt in Ansehung der am Anfang des Paragraphen aufgeworfenen Fragestellung ein äusserst wichtiges Charakteristikum für unser vorgelegtes algebraisches Gebilde F_n an. Wir dürfen als sofort verständlich ansehen, was wir unter einer Reihe linear-abhängiger bez. unabhängiger Classen singulärer Gebilde, die einander im Gebilde F_n durchdringen, zu verstehen haben; dann aber ist ohne weiteres evident, *dass sich in unserem vorgelegten Gebilde F_n gerade $(t-1)$ unabhängige Classen singulärer Gebilde durchdringen, wo $t \geqq 1$ aber $\leqq 2p^2$ ist.*

Der Fall $t = 1$ zeigt eine nicht-singuläre Fläche an; hier kommt als linear-unabhängig nur das *eine* Lösungssystem (3) § 4 in Betracht, wobei wir den gemeinsamen Wert der Zahlen h_{ii}, G_{ii} irgendwie von Null verschieden zu wählen haben und also in einfachster Weise mit 1 identificieren mögen. Das hiermit gemeinte Lösungssystem kann natürlich auch in allen Fällen $t > 1$ als *eines* in der Reihe der t unabhängigen Systeme $(\pi^{(\nu)})$ fungieren. Wir merken aber gleich an, dass wir bei der Auswahl einer solchen Reihe bei $t > 1$ jene zu den Wertigkeitscorrespondenzen führende Lösung offenbar auch leicht meiden können.

Ob wirklich bei einem einzelnen $p > 1$ Gebilde vorkommen, welche die Maximalzahl $t = 2p^2$ aufweisen, ob alle die Zwischenstufen, von $t = 1$ an gerechnet, vertreten sein mögen, und welches in allen diesen Fällen die Werte der Moduln der Fläche sind, das alles sind wichtige Fragen, denen wir aber an vorliegender Stelle in keiner Weise näher nachgehen können.

§ 7. Bildung einer Minimalbasis für alle Lösungssysteme (π) der Fläche F_n.

Wir haben die Beantwortung der Frage nach den gesamten Lösungssystemen (π) des Problems (3) § 6 noch nicht bis zu ihrer denkbar einfachsten Gestalt entwickelt. Um die letztere zu erreichen, müssen wir unsere Überlegung in der folgenden Art fortsetzen:

Vor allem führen wir für die ausgewählten t unabhängigen Lö-

*) Siehe z. B. Dirichlet-Dedekind, *Zahlentheorie* p. 489 der 3. Aufl.

sungssysteme $(g^{(\varepsilon)}, h^{(\varepsilon)})$ die auch im vorigen Kapitel bei analoger Gelegenheit (p. 490) gebrauchte Benennung einer „*Basis*" ein und bezeichnen dieselbe symbolisch durch:

$$(1) \qquad [(\pi^{(1)}), (\pi^{(2)}), \ldots, (\pi^{(t)})].$$

Sind $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_t$ irgend welche ganze Zahlen, so haben wir in:

$$(2) \qquad \pi_{ik} = \varkappa_1 \pi_{ik}^{(1)} + \varkappa_2 \pi_{ik}^{(2)} + \cdots + \varkappa_t \pi_{ik}^{(t)}$$

sicher wieder ein Lösungssystem (π); umgekehrt aber lässt sich irgend ein Lösungssystem (π) in der Basis (1), allgemein zu reden, nur erst in der Gestalt:

$$(3) \qquad \pi_{ik} = \frac{\varkappa_1 \pi_{ik}^{(1)} + \varkappa_2 \pi_{ik}^{(2)} + \cdots + \varkappa_t \pi_{ik}^{(t)}}{\varkappa}$$

darstellen, wo $\varkappa, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_t$ ganze Zahlen sind, deren erste von Null verschieden ist. Der Zielpunkt unserer neuen Überlegung aber soll der Existenzbeweis einer *Minimalbasis* (im Sinne des vorigen Kapitels, p. 491) sein; wir wollen also zeigen, *dass man die Basis* (1) *im besonderen so wählen kann, dass bereits alle Lösungssysteme* (π) *in der Gestalt* (2) *mit Hülfe ganzer Zahlen* $\varkappa$ *darstellbar sind.*

Zu diesem Ende gehen wir auf die t Systeme zu je $2p^2$ ganzen Zahlen g, h zurück, die zu der zunächst ausgewählten Basis (1) gehören. Ist dann (g, h) irgend ein neues Lösungssystem, so gelten $2p^2$ Gleichungen:

$$(4) \qquad \begin{cases} -\varkappa g_{ik} + \varkappa_1 g_{ik}^{(1)} + \varkappa_2 g_{ik}^{(2)} + \cdots + \varkappa_t g_{ik}^{(t)} = 0, \\ -\varkappa h_{ik} + \varkappa_1 h_{ik}^{(1)} + \varkappa_2 h_{ik}^{(2)} + \cdots + \varkappa_t h_{ik}^{(t)} = 0, \end{cases}$$

wo $\varkappa, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ ganze Zahlen sind, deren erste von Null verschieden ist. Unter diesen $2p^2$ Gleichungen für die $(t+1)$ *homogen* vorkommenden unbekannten ganzen Zahlen $\varkappa$ sind genau t linear-unabhängige. Wir wählen uns t solche Gleichungen (4) aus und schreiben sie der grösseren Gleichmässigkeit wegen in der Gestalt:

$$(5) \qquad -\varkappa l_\vartheta + \varkappa_1 l_\vartheta^{(1)} + \varkappa_2 l_\vartheta^{(2)} + \cdots + \varkappa_t l_\vartheta^{(t)} = 0,$$

wobei sich also der Index ϑ (gerade wie auch ε) auf das Intervall $\vartheta = 1, 2, \cdots, t$ beziehen soll. Indem aber diese t Reihen ganzer Zahlen l nichts anderes vorstellen sollen, als gewisse t Reihen ganzzahliger Coefficienten (4), wird für die Auswahl der fraglichen t Reihen (4) nur dies erforderlich sein müssen, *dass die Determinante*:

$$(6) \qquad D(l_\vartheta^{(\varepsilon)}) = \begin{vmatrix} l_1^{(1)}, & l_1^{(2)}, & \cdots, & l_1^{(t)} \\ l_2^{(1)}, & l_2^{(2)}, & \cdots, & l_2^{(t)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_t^{(1)}, & l_t^{(2)}, & \cdots, & l_t^{(t)} \end{vmatrix}$$

einen von Null verschiedenen Wert hat; andrenfalls sind nämlich zufolge $\varkappa \gtrless 0$ die ausgewählten t Gleichungen (5) nicht linear-unabhängig. Man merke insbesondere an, dass diese Bedingung $D(l_\vartheta^{(\epsilon)}) \gtrless 0$ mit der vorliegenden $(t+1)^{\text{ten}}$ Lösung (g, h) nichts zu thun hat.

Der Rückgang von den Gleichungen (5) zum Systeme (4) gestaltet sich nun so, dass wir offenbar die Darstellungen haben:

$$(7) \qquad g_{ik}^{(\epsilon)} = \sum_{\vartheta=1}^{t} \alpha_\vartheta^{(i,k)} l_\vartheta^{(\epsilon)} \quad , \quad h_{ik}^{(\epsilon)} = \sum_{\vartheta=1}^{t} \beta_\vartheta^{(i,k)} l_\vartheta^{(\epsilon)},$$

wo die α, β bestimmte, ganz allein von der in (5) *getroffenen Auswahl von Gleichungen* (4) *abhängende Coefficienten sind.* Insbesondere sind die α, β von ϵ unabhängig, und wir finden für die in (5) gegebenen ganzen Zahlen $l_1, \ldots, l_t$ der $(t+1)^{\text{ten}}$ Lösung (g, h) die Darstellungen:

$$(8) \qquad g_{ik} = \sum_{\vartheta=1}^{t} \alpha_\vartheta^{(i,k)} l_\vartheta \quad , \quad h_{ik} = \sum_{\vartheta=1}^{t} \beta_\vartheta^{(i,k)} l_\vartheta .$$

Durch Vorstehendes ist das Fundament unserer Überlegung wesentlich geglättet: *Wir haben jeder Lösung (g, h) ein System ganzer Zahlen $l_1, l_2, \ldots, l_t$ zugeordnet, welches durch die einmal getroffene Auswahl* (5), *an der wir festhalten, eindeutig bestimmt ist.* Wir können dieserhalb von einem Lösungssystem (l_ϑ) unseres Problems (3) § 6 reden, und es werden sich umgekehrt die g, h aus dem System (l_ϑ) vermöge (8) *eindeutig* ergeben. Unsere Basis (1) geht jetzt in die Basis:

$$(9) \qquad [(l_\vartheta^{(1)}), (l_\vartheta^{(2)}), \ldots, (l_\vartheta^{(t)})]$$

über, und wir bezeichnen die in (6) gegebene Determinante $D(l_\vartheta^{(\epsilon)})$ als *Discriminante der Basis* (9); *diese Discriminante hat einen von Null verschiedenen ganzzahligen Wert.* Sind $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_t$ irgend welche t *ganze* Zahlen, so stellen auch die t ganzen Zahlen:

$$(10) \qquad l_\vartheta = \varkappa_1 l_\vartheta^{(1)} + \varkappa_2 l_\vartheta^{(2)} + \cdots + \varkappa_t l_\vartheta^{(t)},$$

gebildet für $\vartheta = 1, \ldots, t$, ein Lösungssystem unseres Problems vor; aber ein beliebiges dieser Lösungssysteme (l_ϑ) lässt sich vermöge der Basis (9), allgemein zu reden, erst in der Gestalt:

$$(11) \qquad l_\vartheta = \frac{\varkappa_1 l_\vartheta^{(1)} + \varkappa_2 l_\vartheta^{(2)} + \cdots + \varkappa_t l_\vartheta^{(t)}}{\varkappa}$$

darstellen, wo die $\varkappa, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ ganze Zahlen sind, deren erste, $\varkappa$, von Null verschieden ist.

Nun aber ist alles bereit gestellt, um ohne weiteres jene Deduction wieder zu ermöglichen, welche uns auch oben (p. 492) bei der Besprechung der ganzen Formen einer Fläche F_n von der Existenz einer

Minimalbasis überzeugte. Giebt es eine Lösung (11), die sich noch nicht auf die Gestalt (10) bringen lässt, so giebt es auch eine solche Lösung (11), bei welcher $\varkappa$ eine Primzahl ist, die alsdann nicht in allen Zahlen $\varkappa_1, \ldots \varkappa_t$ zugleich aufgeht. Ist etwa $\varkappa_\zeta$ prim gegen $\varkappa$, so seien α und β ganze, der Gleichung $\alpha \varkappa_\zeta + \beta \varkappa = 1$ genügende, Zahlen. Wir werden alsdann auch in:

$$(12) \qquad \bar{l}_\vartheta^{(\zeta)} = \alpha l_\vartheta + \beta l_\vartheta^{(\zeta)}$$

ein Lösungssystem haben; dasselbe wird sich wieder in der Gestalt (11) darstellen, nur dass die ganzzahligen Coefficienten des Zählers geändert sind und $\varkappa_\zeta$ insbesondere durch 1 ersetzt erscheint. Ändern wir jetzt die Basis (9) insofern ab, dass wir das System der t ganzen Zahlen $l_1^{(\zeta)}, \ldots, l_t^{(\zeta)}$ durch die t in (12) gegebenen Zahlen $\bar{l}_1^{(\zeta)}, \ldots, \bar{l}_t^{(\zeta)}$ ersetzen, so entspringt wiederum eine Basis; denn die zugehörige Discriminante D' ist, wie man vermöge der voraufgegangenen Entwicklung aus Formel (6) schliesst, gleich $\frac{D}{\varkappa}$ und also $\gtrless 0$. Da aber D' als Determinante gewisser p^2 Zahlen selbst eine ganze Zahl ist, so war $\varkappa$ Teiler von D. Hier sieht man nun wieder, dass sich der somit eingeleitete Reductionsprocess nur eine *endliche* Anzahl von Malen vollziehen lässt; die Existenz der gewünschten Minimalbasis ist damit evident.

Übrigens wird man sich vermöge einer sehr bekannten Überlegung nun auch noch überzeugen, dass nach einmal ausgewählter Minimalbasis die t ganzen Zahlen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_t$, welche bei der Darstellung irgend einer Lösung (g, h) unseres Problems eintreten, stets auch *eindeutig* bestimmt sind. Im entgegengesetzten Falle könnten in der That die t Lösungen der Minimalbasis nicht unabhängig sein.

Indem wir nun fortan unter (1) stets eine Minimalbasis verstehen, lässt sich natürlich auch diese in der mannigfachsten Art auswählen. In der That werden wir in

$$[(\bar{\pi}^{(1)}), (\bar{\pi}^{(2)}), \ldots (\bar{\pi}^{(t)})]$$

stets wieder eine solche haben, wenn wir

$$\bar{\pi}_{ik}^{(\zeta)} = \varkappa_1^{(\zeta)} \pi_{ik}^{(1)} + \varkappa_2^{(\zeta)} \pi_{ik}^{(2)} + \cdots + \varkappa_t^{(\zeta)} \pi_{ik}^{(t)}$$

schreiben und nur Sorge tragen, dass die Determinante $|\varkappa_\iota^{(\zeta)}|$ der t^2 ganzen Zahlen $\varkappa$ der Einheit gleich ist. Eine besondere Auswahl hier von vornherein zu treffen, ist aber für unsere ferneren Zwecke nicht erforderlich. Bemerken wir nur, dass wir offenbar irgend eine specielle Lösung bei der Auswahl der Minimalbasis immer leicht umgehen können, sobald uns dies wünschenswert ist.

§ 8. Wirkliche Existenz sämtlicher arithmetisch möglicher Correspondenzen. Auswahl einer Minimalbasis $[K_\iota]$ von t Correspondenzen der F_n.

Für irgend eine gegebene Correspondenz der F_n von der in § 2 umgrenzten Art stellten wir l. c. die p Integralrelationen auf:

$$\sum_{r=1}^{\alpha} j_i(y_r) = \sum_{k=1}^{p} \pi_{ik} j_k(x) + \pi_i, \tag{1}$$

und wir betonen jetzt nochmals, *dass die p^2 Coefficienten π_{ik} durch die vorgelegte Correspondenz auch eindeutig bestimmt sind.* Die gegenteilige Annahme würde nämlich sofort lineare Identitäten zwischen den p Integralen $j_1(x), \ldots, j_p(x)$ zur Folge haben, die doch nicht bestehen können. Die π_{ik} der Relationen (1) werden sich jetzt in der Minimalbasis des vorigen Paragraphen in einer eindeutig bestimmten Art darstellen, und damit ist für die eben gemeinte Correspondenz der Anschluss an die allgemeinen Betrachtungen des vorigen Paragraphen vermittelt, den wir im nächsten Paragraphen weiter verfolgen.

Jetzt aber ist die Fragestellung geradezu umzukehren: *Wird auch jedem Lösungssystem (π), welches wir in § 7 auf der F_n gewannen, eine Correspondenz zugehören?* Und hier ist die Antwort zu geben, *dass jeder einzelnen Lösung (π) nicht nur eine, sondern sogar unbegrenzt viele Correspondenzen zugehören.* Die Mannigfaltigkeit der, einer einzelnen Lösung (π) zugehörenden, Correspondenzen völlig zu umgrenzen, kann freilich an dieser Stelle nicht unsere Absicht sein. Hierzu fehlen uns gegenwärtig noch die Mittel; denn während bei gegebener Correspondenz die Integralrelationen (1) eindeutig bestimmt sind, ist durch blosse Angabe dieser Relationen, d. i. bei Festsetzung der Werte π_{ik}, π_i und der Gliederanzahl α auf der linken Seite (1), die Correspondenz im allgemeinen noch in keiner Weise eindeutig bestimmt. In der That kennen wir (aus dem Umkehrproblem (p. 512 ff.)) nur einen einzigen Fall, bei dem vermöge der Relationen (1) sich die α Stellen y_r aus der Stelle x *eindeutig* bestimmen: *dies tritt ein, wenn wir $\alpha = p$ nehmen und betreffs der Constanten π_i eine gleich zu bezeichnende Voraussetzung machen.* Bei $\alpha > p$ ist es die Regel, dass eine mehrfach unendliche Mannigfaltigkeit von Lösungssystemen y_r des Umkehrproblems (1) eintritt, und wie sich aus dieser Mannigfaltigkeit die zugehörigen Correspondenzen ausschalten, ist zunächst nicht sichtbar. Das Gleiche kann für $\alpha \leq p$ bei besonderen Werten der π_i der Fall sein.

Bei dieser Sachlage schreiben wir nunmehr für irgend ein vor-

gelegtes Lösungssystem (π) unter der Annahme von $\alpha = p$ an Stelle von (1) die Relationen:

$$(2) \qquad \sum_{r=1}^{p} j_i(y_r) = \sum_{k=1}^{p} \pi_{ik} j_k(x) + \pi_i,$$

indem wir uns dabei die Constanten π_i in irgend einer Weise gewählt denken. Bei gegebenem x lässt sich, nach dem allgemeinen Umkehrtheorem, *ein* Punktsystem y_r in Übereinstimmung mit (2) stets angeben, wie wir p. 514 u. f. bewiesen haben. Sollen aber noch weitere Lösungssysteme vorkommen, so müssen dieselben mit dem System der schon gefundenen Punkte y_r „äquivalent" sein. Da indes eine p-wertige algebraische Function stets eine Specialfunction ist (I p. 554), so hätten wir für diesen Fall in $y_1, \ldots, y_p$ ein Specialpunktsystem, d. i. die p Punkte y_r würden auf der Normalcurve C_{2p-2} der Formen φ in *einer* Ebene liegen. Dem hiermit gemeinten Ausnahmefalle, den man in der Theorie der Abel'schen Functionen als den Fall der Unbestimmtheit des Umkehrproblems bezeichnet, kann man aber, wie man leicht zeigt, durch Abänderung der unteren Grenzen der in (2) linker Hand enthaltenen Integrale oder (was auf dasselbe hinauskommt) durch Änderung der Werte π_i stets aus dem Wege gehen. Bei einem ersten gewählten Punkte x giebt es daraufhin nach zweckmässiger Auswahl der π_i nur ein eindeutig bestimmtes Punktsystem $y_1, \ldots, y_p$, welches die Gleichungen (2) befriedigt. Dass dann aber für alle übrigen Punkte x der Fläche F_n das Gleiche gilt, wird man vermöge analytischer Fortsetzung von jenem ersten Punkte x aus leicht wahrnehmen.

Man bemerkt sofort, *dass wir solchergestalt eine p-deutige Correspondenz gewonnen haben, für welche alle Voraussetzungen des* § 2 *erfüllt sind.* Aber selbst innerhalb dieses beschränkten Bereiches $\alpha = p$ haben wir, eben allen passenden Wertsystemen π_i entsprechend, unbegrenzt viele, der *einen* Lösung (g, h) zugehörige Correspondenzen als existierend nachgewiesen.

Sei jetzt irgend eine α-β-deutige Correspondenz der F_n vorgelegt, die wir etwa kurz K nennen mögen. Um alsdann eine analytische Darstellung dieser Correspondenz K zu ermöglichen, benutzen wir denselben Ansatz, wie oben (p. 535) bei den gewöhnlichen Correspondenzen im speciellen, d. h. wir bilden uns das Primproduct:

$$(3) \qquad f(x, y) = P(y, y_1)\, P(y, y_2) \cdots P(y, y_\alpha).$$

Die Gleichung $f(x, y) = 0$ stellt alsdann in dem schon p. 535 erläuterten Sinne unsere Correspondenz K rein dar. Um aber die Form

$f(x, y)$ zu einer freilich transcendenten *Function**) der Fläche F_n auszugestalten, schreiben wir unter Aufnahme zweier neuen Punkte ξ, η gerade wie auch schon in (4) p. 522

$$\Omega(x, y \mid \xi, \eta) = \frac{f(x, y)\, f(\xi, \eta)}{f(x, \eta)\, f(\xi, y)}. \tag{4}$$

Bei zweckmässig particularisierten ξ, η *wird alsdann die Gleichung* $\Omega(x, y \mid \xi, \eta) = 0$ *mit den allein noch veränderlichen* x, y *nicht nur unsere* α*-deutige Correspondenz* K, *sondern auch deren inverse Correspondenz rein darstellen.* Aber wie wir schon andeuteten, ist Ω hier im allgemeinen nur erst eine solche transcendente Function von vier Flächenpunkten, die sich um eine multiplicative Exponentialgrösse ändert, falls einer der vier Punkte x, y, ξ, η eine Periodenbahn beschreibt.

Endlich gehe man jetzt auf die im vorigen Paragraphen ausgewählte Minimalbasis von t Lösungssystemen $(\pi^{(s)})$ zurück. Für jedes derselben sind wir, wie oben nachgewiesen, jedenfalls der Existenz von p-deutigen Correspondenzen sicher, und wir mögen uns nun beim einzelnen Lösungssystem $(\pi^{(s)})$ jeweils eine Correspondenz auswählen. Die dem System $(\pi^{(s)})$ zugehörige Correspondenz heisse etwa K_s, und alle t Correspondenzen $K_1, \ldots, K_t$ mögen das bilden, was wir nun als eine *Minimalbasis von Correspondenzen der Fläche* F_n benennen wollen. Für jede Correspondenz K_s verschaffe man sich schliesslich genau nach Vorschrift von (3) und (4) die von den vier Punkten x, y, ξ, η der Fläche F_n abhängende analytische Function**):

---

*) Nur im Falle einer *null*wertigen Correspondenz wird die in Formel (4) zu gebende Function algebraisch.

**) Nebenher merken wir an, dass sich die Form $f(x, y)$ auch noch in der folgenden Weise zu einer *Function* der Fläche ausgestalten lässt:

$$\psi(x, y) = \prod_{r=1}^{p} \sqrt{\varphi_y\, \varphi_{y_r}}\, P(y, y_r), \tag{5}$$

wobei φ irgend eine Berührungsform erster Gattung der F_n ist, ein Ausdruck, der sich natürlich sofort auch bei jeder anderen α-deutigen Correspondenz bilden lässt.

Wir knüpfen an diesen Ausdruck eine Regel zur Bestimmung der Zahl β unserer p-β-deutigen Correspondenz. Vermöge der rechten Seite von (5) zählt man nämlich leicht ab, dass bei stehendem Punkt $y = y_0$ die Function $\psi(x, y_0)$ von x auf F_n gerade $p \cdot \beta$ einfache Nullpunkte aufweist, falls sich K in eine β-deutige Correspondenz invertiert. Da $\psi(x, y_0)$ eine *Function* der Fläche ist, die überdies an keiner Stelle der F_n unstetig wird, so hat man nach einer bekannten Regel (cf. Neumann, *Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*, p. 43 der 2. Aufl.) für β die Formel:

$$\beta = \frac{1}{2 i \pi p} \int d \log \psi(x, y_0), \tag{6}$$

$$\Omega_\varepsilon(x, y \mid \xi, \eta) = \frac{f_\varepsilon(x, y)\, f_\varepsilon(\xi, \eta)}{f_\varepsilon(x, \eta)\, f_\varepsilon(\xi, y)}. \tag{8}$$

Vermöge dieser t zur Minimalbasis $[K_1, K_2, \ldots, K_t]$ gehörenden Functionen $\Omega_1, \ldots, \Omega_t$ werden wir jetzt gleich eine eigenartige algebraische Darstellung der Function (4) irgend einer weiteren Correspondenz K der F_n durchführen können.

§ 9. Darstellung aller Correspondenzen der F_n vermöge der Minimalbasis $[K_\varepsilon]$. Die allgemeine Correspondenzformel.

Wenn wir die Correspondenzen der Minimalbasis $[K_1, \ldots, K_t]$ bez. ihre Functionen Ω_ε festgegeben denken, so können wir (immer der Entwicklung der Hurwitz'schen Theorie folgend) vermöge jener Functionen Ω_ε und übrigens nur algebraischer Functionen die Darstellung jeder weiteren Correspondenz K der Fläche in der folgenden Weise leisten:

Wir stellen zuvörderst die π_{ik} der Correspondenz K in der Gestalt (2) p. 544 durch die $\pi_{ik}^{(\varepsilon)}$ der Minimalbasis dar. Die dabei als Coefficienten fungierenden, eindeutig bestimmten, ganzen Zahlen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_t$ sollen als die „*Charaktere*" der Correspondenz K in Bezug auf die Minimalbasis $[K_\varepsilon]$ bezeichnet werden. Wie schon angedeutet, nehmen wir hierbei an, dass K keine Correspondenz aus der Reihe K_ε sei; im gegenteiligen Falle würde zwar die nachfolgende Betrachtung bestehen bleiben, aber doch ihre wesentliche Bedeutung verlieren.

Demnächst bilde man aus der Function $\Omega(x, y \mid \xi, \eta)$ von K und den Functionen Ω_ε der K_ε den nachfolgenden Quotienten:

$$F(x, y \mid \xi, \eta) = \frac{\Omega(x, y \mid \xi, \eta)}{\prod\limits_{\varepsilon=1}^{t} [\Omega_\varepsilon(x, y \mid \xi, \eta)]^{\varkappa_\varepsilon}}, \tag{1}$$

unter $\varkappa_\varepsilon$ die Charaktere von K verstanden. Es gilt dann wieder der Satz: *$F(x, y \mid \xi, \eta)$ ist eine von vier Punkten x, y, ξ, η abhängende Grösse, welche als Function jedes dieser Punkte auf der Fläche F_n algebraisch ist.*

---

integriert über den geschlossenen Rand der durch die Schnitte a_i, b_i, c_i in einen einfach zusammenhängenden Bereich verwandelten Fläche F_n. Hr. Hurwitz hat diese Integration wirklich ausgeführt (cf. Math. Ann. Bd. 28 p. 579), wobei unsere früheren Formeln (4), (5) p. 526 zur Verwendung kommen; es ergab sich dabei für β der symmetrische Ausdruck:

$$\beta = \sum_{i,k} (G_{ik} h_{ik} - g_{ik} H_{ik}), \tag{7}$$

den hier anzugeben wir doch nicht unterlassen wollten.

Der Beweis gelingt durch dieselbe Überlegung, wie wir sie bereits in § 5 bei den Wertigkeitscorrespondenzen im besonderen gaben: Man sehe F erstlich bei stehenden x, ξ, η als Function von y an. Beschreibt y den Weg b_i, so geht jedes einzelne Ω sicher in sich selbst über; beschreibt aber y den Weg a_i, so nimmt das einzelne Ω den Factor:

$$e^{2i\pi\sum\limits_r j_i^{y_r,\eta_r}} = e^{2i\pi\sum\limits_{k=1}^{p}\pi_{ik}[j_k(x)-j_k(\xi)]}$$

an. Da aber ist es eine einfache Folge der Gleichung (2) p. 544, dass der Quotient F selbst unverändert bleibt; derselbe hängt demnach von y sicher eindeutig und also (da wesentlich singuläre Stellen nicht auftreten) algebraisch ab. Man lasse weiter bei stehendem y, ξ, η den Punkt x eine Periodenbahn beschreiben; wie oben folgt, dass F in sich selbst, multipliciert mit einem Exponentialfactor der Gestalt:

$$e^{\sum\limits_{k=1}^{p} C_k j_k^{y,\eta}}$$

übergeht. Aber hier müssen wieder alle Constanten C verschwinden, weil sonst F nach beschriebener Bahn x nicht mehr algebraisch von y abhängen würde: somit ist F auch in x eindeutig und also algebraisch. Die Punkte ξ, η erledigen sich endlich durch die Bemerkung, dass offenbar:

$$F(\xi, \eta \mid x, y) = F(x, y \mid \xi, \eta) \tag{2}$$

zutrifft.

Indem wir die Gleichung (1) nach Ω auflösen, entspringt der nachfolgende Hauptsatz: *Die Function $\Omega(x, y \mid \xi, \eta)$, durch deren Nullsetzen wir die beliebig, aber von K_s verschieden*), gewählte Correspondenz K der F_n rein darstellen können, gestattet vermöge der Minimalbasis $[K_s]$ die Darstellung:*

$$\Omega(x, y \mid \xi, \eta) = F(x, y \mid \xi, \eta)\prod_{s=1}^{t}[\Omega_s(x, y \mid \xi, \eta)]^{\varkappa_s}, \tag{3}$$

wo $\varkappa_s$ die Charaktere von K sind, während F eine, K eindeutig zugeordnete, algebraische Function der vier Flächenpunkte x, y, ξ, η ist.

Es ist interessant, zu beachten, wie sich die in § 5 gegebene Behandlung der Wertigkeitscorrespondenzen in das jetzige allgemein gültige Schema einordnet. Denken wir etwa gleich F_n als eine nicht-singuläre Fläche, so haben wir $t = 1$, und eine Minimalbasis

*) Für $K = K_s$ giebt die Formel (3) einfach die Identität $\Omega_s = \Omega_s$, indem dabei F constant, nämlich $= 1$, wird.

wird in einfachster Weise von jener ein-ein-deutigen Correspondenz gebildet, bei welcher jeder Flächenpunkt sich selbst entspricht*). Die Wertigkeit dieser Correspondenz ist -1, und offenbar wird Ω_1 hier im speciellen:

$$\Omega_1(x, y \mid \xi, \eta) = \frac{P(x, y)\, P(\xi, \eta)}{P(x, \eta)\, P(\xi, y)}. \tag{4}$$

Indem dann weiter $-w$ der Charakter einer w-wertigen Correspondenz der F_n wird, geht ersichtlich die Formel (1) in die in § 5 unter (3) aufgeschriebene Gleichung über.

Aber auf der anderen Seite haben wir jetzt den vollen Überblick über die *Gesamtheit algebraischer Correspondenzen auf unserer Fläche* F_n thatsächlich gewonnen. Denn wir mögen in (3) für $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_t$ irgend ein System ganzer positiver oder negativer Zahlen wählen, für F aber irgend eine der Bedingung (2) genügende algebraische Function der vier Flächenpunkte x, y, ξ, η, so werden wir durch Nullsetzen des so gewonnenen Ausdrucks (3) auch *stets* eine unserer Correspondenzen definieren, wie man sich leicht überzeugen wird. Indem aber bei einmal gewählter Minimalbasis jede Correspondenz der F_n nur zu *einem* Ausdruck (3) führt, überblicken wir zugleich die Gesamtheit der Correspondenzen von gleichen Charakteren, d. i. vom gleichen Lösungssysteme $(\varkappa)$; hier bleibt eben nur noch die algebraische Function F der willkürlichen Wahl überlassen.

Als eine für unsere späteren Zwecke besonders wichtige Anwendung der eben gewonnenen Resultate soll endlich noch eine Formel entwickelt werden, welche die Anzahl v der Coincidenzen einer beliebigen Correspondenz in einer eigenartigen Weise ausdrückt. Bei den Wertigkeitscorrespondenzen war der Berechnung der Coincidenzenanzahl v der Umstand einigermassen hinderlich, dass die zur Minimalbasis gewählte Correspondenz, welche durch Nullsetzen der Function (4) entspringt, für die Coincidenz der Stellen x, y identisch verschwindet. Nun könnte es ja auch bei den im vorigen Paragraphen für beliebiges t ausgewählten Correspondenzen $K_1, \ldots, K_t$ eintreten, dass mit dem Punkte x regelmässig eine gewisse Anzahl der correspondierenden Punkte $y_1, \ldots, y_p$ coincidieren. Dann aber werden wir nur die Constanten π_i in den definierenden Gleichungen (2) p. 548 abzuändern brauchen, um die betreffende Correspondenz K_i durch eine andere zu ersetzen, bei der die p correspondierenden Punkte y_r mit x im allgemeinen nicht zusammenfallen.

Sei jetzt K eine beliebige α-β-deutige Correspondenz der F_n, so

*) Wir können dieselbe als die „identische" Correspondenz bezeichnen.

nehme man auch von dieser an, dass die α zugeordneten Punkte y_r im allgemeinen nicht mit x zusammenfallen*). Schreiben wir dann im zugehörigen $\Omega(x, y \mid \xi, \eta)$ unter geeigneter Auswahl ξ, η sogleich $x = y$, so entspringt in:

$$\Psi(x) = \Omega(x, x \mid \xi, \eta) = \frac{f(x,x)\, f(\xi,\eta)}{f(x,\eta)\, f(\xi,x)} \tag{5}$$

eine (transcendente) Function, deren Nullstellen auf F_n die Coincidenzstellen unserer α-β-deutigen Correspondenz sind. Nennen wir also die Coincidenzenanzahl, wie bisher, ν, so wird zufolge (5) die Differenz $(\nu - \alpha - \beta)$ den Überschuss der Anzahl der Nullpunkte von $\Psi(x)$ auf F_n über die Anzahl der Unstetigkeitspunkte bedeuten**).

Man bilde nunmehr diesen Überschuss $(\nu - \alpha - \beta)$ insbesondere für die t Correspondenzen K_s der Minimalbasis und benenne denselben für die Correspondenz K_s durch e_s. Es sind dann $e_1, e_2, \ldots, e_t$ gewisse t *ganze* Zahlen, *die mit der Auswahl der Minimalbasis eindeutig gegeben sind****). Um für die Correspondenz K die Anzahl ν zu berechnen, gehe man auf die Darstellung (3) des zugehörigen $\Omega(x, y \mid \xi, \eta)$ zurück. Zufolge ihrer Definition (1) kann auch die algebraische Function F für $x = y$ nicht identisch verschwinden oder unendlich werden. Für die bei K eintretende Differenz $(\nu - \alpha - \beta)$ ergiebt sich daraufhin aus dem rechtsseitigen Ausdruck (3) der Betrag:

$$\varkappa_1 e_1 + \varkappa_2 e_2 + \cdots + \varkappa_t e_t.$$

Wir kommen damit zu dem nachfolgenden Gesetz: *Die Coincidenzenanzahl ν irgend einer beliebigen α-β-deutigen algebraischen Correspondenz K auf der Fläche F_n ist durch die Formel:*

---

*) Sollte dies nämlich vorkommen, so enthält K die identische Correspondenz in gewisser Multiplicität. Man entferne diese und beziehe die nachfolgende Überlegung auf die übrigbleibende Correspondenz.

**) Hierauf gründet sich eine ganz directe Berechnung der Anzahl ν, nämlich durch die Formel

$$\nu - \alpha - \beta = \frac{1}{2i\pi}\int d\log\Psi(x),$$

wieder in positivem Sinne über den gesamten Rand der zerschnittenen F_n integriert. Hr. Hurwitz findet (l. c. p. 576) durch Ausführung dieser Integration für ν die Formel:

$$\nu = \alpha + \beta - (h_{11} + h_{22} + \cdots + h_{pp} + G_{11} + G_{22} + \cdots + G_{pp}), \tag{6}$$

welche indessen im Texte nicht weiter zur Verwendung kommt. Man beachte insbesondere, wie sich unter diese ganz allgemeine Formel das Cayley-Brill'sche Correspondenzprincip (9) p. 539 subsumiert.

***) Zufolge der Formel (6) haben wir ganz einfach:

$$-e = h_{11} + h_{22} + \cdots + h_{pp} + G_{11} + G_{22} + \cdots + G_{pp}. \tag{7}$$

$$(8) \qquad \nu = \alpha + \beta + \varkappa_1 e_1 + \varkappa_2 e_2 + \cdots + \varkappa_t e_t$$

gegeben, wo $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_t$ *die Charaktere von* K *in Bezug auf die Minimalbasis* $[K_t]$ *sind, während* $e_1, \ldots, e_t$ *gewisse* t *mit dieser Basis eindeutig bestimmte ganze Zahlen sind.* Wir haben die Gleichung (8), die wir hinfort als die *Hurwitz'sche Correspondenzformel* citieren wollen, um so lieber abgeleitet, als wir späterhin bei den Classenzahlrelationen höherer Stufen immer wieder mit ihr zu thun haben werden: *Es werden geradezu die rechten Seiten der Classenzahlrelationen die speciellen Erscheinungsformen des allgemeinen Ausdrucks* (8) *im Gebiete der Modularcorrespondenzen vorstellen.*

Endlich bemerke man noch, wie sich die Formel (8) bei Übergang zu irgend einer anderen Minimalbasis $[K_t]$ verhält (cf. p. 546). Dabei erfahren die $e_1, \ldots, e_t$ eine gewisse ganzzahlige lineare homogene Substitution der Determinante 1: die Zahlen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_t$ aber erfahren gerade genau die *contragrediente* Substitution. Eben deshalb bleibt der Wert von ν unverändert derselbe, wie es sein muss. Dass übrigens die Formel (8) auf Grund der früheren Ergebnisse eine Folge der unter dem Texte mitgeteilten Formeln (6) und (7) ist, wird man leicht überblicken.

§ 10. Bemerkungen über Riemann'sche Flächen mit eindeutigen Transformationen in sich.

Aus der Theorie der Modulfunctionen kennen wir zahlreiche Beispiele von Riemann'schen Flächen, welche eindeutige (rationale) Transformation in sich zulassen. Es ist sehr interessant, dass sich die Theorie solcher Flächen unter die allgemeine jetzt entworfene Correspondenztheorie subsumieren lässt: *in der That ist ja die einzelne derartige Transformation einer Fläche in sich offenbar nichts anderes, als eine auf dieser* F_n *definierte* 1-1-*deutige algebraische Correspondenz.* Einige auf diese Auffassung bezügliche Bemerkungen sollen hier noch angefügt werden*).

Für den Fall, dass die Fläche F_n *das Geschlecht* $p = 1$ hat, wurden bereits früher (p. 240) alle ihre eindeutigen Transformationen in sich selbst angegeben. War nicht gerade der Periodenquotient

*) Übrigens verweisen wir wegen dieser besonderen Riemann'schen Flächen auf die inhaltreiche Arbeit von Hrn. Hurwitz, *Über diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen*, Göttinger Nachrichten vom 5. Febr. 1887 (abgedruckt in Bd. 32 der Math. Ann.), eine Abhandlung, in welcher auch für die allgemeine Correspondenztheorie neue wertvolle Ergebnisse gewonnen sind.

$\omega = i$ oder $\omega = \varrho$, so stellte sich vermöge des Integrals u eine beliebige eindeutige Transformation der F_n in der Gestalt $u' = \pm u + c$ dar; für $\omega = i$ aber kamen noch die Transformationen $u' = \pm iu + c$ hinzu, für $\omega = \varrho$ aber $u' = \varrho^{\pm 1} u + c$. Liegt somit weder der harmonische noch der äquianharmonische Fall (d. i. $\omega = i$ bez. ϱ) vor, so stellt eine Transformation der F_n in sich offenbar eine 1-1-deutige Wertigkeitscorrespondenz mit der besonderen Wertigkeit $w = -1$ bez. $w = +1$ vor; die Cayley-Brill'sche Correspondenzformel liefert dann für die Anzahl der Fixpunkte $v = 0$ bez. $v = 4$, in Übereinstimmung mit früher bereits erhaltenen Resultaten. Sollen wir eine *singuläre* 1-1-deutige Correspondenz haben, so kann dies nur für $\omega = \varrho$ oder $\omega = i$ der Fall sein; dass die hierher gehörenden Flächen im Sinne unserer früheren Untersuchungen (cf. p. 177 ff.) als *singuläre* Gebilde zu den Determinanten $D = -3$ und $D = -4$ gehören, ist uns seit lange bekannt*).

Für beliebiges p verweilen wir einen Augenblick bei den p Integralrelationen (2) p. 525, welche wir der einzelnen Correspondenz, also hier der einzelnen Transformation der F_n in sich zugeordnet fanden. Das Besondere ist, dass sich jetzt die linksseitigen Summen je nur auf ein einzelnes Glied reducieren. Gehen wir noch durch Differentiation zu den Formen φ unseres Gebildes F_n über, so liefern die Integralrelationen:

$$\varphi_i' = \pi_{i1}\varphi_1 + \pi_{i2}\varphi_2 + \cdots + \pi_{ip}\varphi_p, \; (i = 1, 2, \cdots, p). \tag{1}$$

Wir sind also genau zu dem schon in Bd. I p. 604 formulierten Ansatze zurückgekommen.

Eine erste Angabe über das Auftreten von Gebilden mit eindeutigen Transformationen in sich gewinnen wir durch nachfolgende Überlegung: Sei $p > 2$ und lasse die Fläche F_n wenigstens eine von der Identität verschiedene Transformation in sich zu. Man nehme hierbei an, dass F_n *nicht* eine singuläre Fläche sei; die fragliche Transformation liefert dann also eine 1-1-deutige Wertigkeitscorrespondenz. Die Formeln (1) liefern jetzt zufolge (1) p. 535 im speciellen $\varphi_i' = -w\varphi_i$, und da auch die inverse Correspondenz die Wertigkeit w aufweist, so ist $w = +1$ oder $w = -1$. Man untersuche nun die zugehörige algebraische Function (3) p. 536 etwa in Abhängigkeit von y; in beiden Fällen $w = \pm 1$ erweist sie sich sofort als eine *zweiwertige* algebraische Function der Fläche. Daher das gleichfalls von Hurwitz aufgefundene

*) Wir haben hier mit dem niedersten Specialfall ($p = 1$) eines von Hrn. Hurwitz für beliebiges p aufgestellten Satzes zu thun; siehe die Schlussresultate in Artikel 4 der eben genannten Hurwitz'schen Abhandlung.

Resultat: *Ein Gebilde F_n, welches eine von der Identität verschiedene eindeutige Transformation in sich zulässt, ist entweder hyperelliptisch oder (im Sinne der oben verabredeten Terminologie) singulär.*

Von den regulären Flächen F_n der Modultheorie waren nur zwei hyperelliptisch, und nur diejenigen der sechsten Classe, d. i. die von der Verzweigung (2, 3, 6) lieferten Gebilde $p = 1$, während $p = 0$ nur in den niederen Fällen $n = 2, 3, 4, 5$ eintrat. In der übrigbleibenden unbegrenzten Mannigfaltigkeit unserer früheren regulären Flächen F_n, die stets eine grosse Reihe eindeutiger Transformationen in sich zuliessen, haben wir somit lauter Beispiele singulärer Gebilde vor uns — diese Benennung genau in dem Sinne verstanden, welchen wir p. 532 dafür verabredeten.

Drittes Kapitel.

Theorie der Integrale erster Gattung bei den Congruenzgruppen von Primzahlstufe.

Die allgemeine Hurwitz'sche Correspondenztheorie gründete sich in erster Linie auf den Gebrauch der Integrale erster Gattung. Indem wir also diese Theorie ins einzelne für die Flächen F_μ der Congruenzgruppen und die auf ihnen existierenden Modularcorrespondenzen durchführen wollen, werden wir hier vorab *den zu den Congruenzgruppen gehörenden Integralen erster Gattung* ein besonderes Kapitel widmen müssen. Dabei ist unser wesentlichster Zielpunkt, möglichst übersichtliche *Reihenentwicklungen nach Potenzen von* r für diese Integrale zu gewinnen. Unsere Betrachtungen sollen auf Primzahlstufen eingeschränkt bleiben, abgesehen freilich von den allerniedersten zusammengesetzten Stufenzahlen 6, 8, 9, 10. Wir benutzen übrigens zu Beginn des Kapitels die Gelegenheit zu einigen allgemeineren Betrachtungen darüber, wie sich die Theorie der Modulformen in das allgemeine formentheoretische Schema des vorletzten Kapitels einordnet. Hierbei wird vor allen Dingen eine *Basis des Teilungspolygons* aufzustellen sein, von welcher wir späterhin einen wichtigen Gebrauch zu machen haben.

Bereits in I p. 583 haben wir die Integrale erster Gattung j einer Fläche F_μ in das ursprüngliche Polygon F_μ übertragen; wir erhielten da *eindeutige* Functionen $j(\omega)$ von ω, die wir „transcendente" Modulfunctionen nannten. Auch führten wir a. a. O. (unter dem Texte) bereits an, dass Hurwitz und Poincaré ungefähr gleichzeitig die Untersuchung der Functionen $j(\omega)$ unternommen hatten; aber während Poincaré's bezügliche Betrachtungen sogleich die Wendung auf die allgemeinen automorphen Functionen genommen haben, gebührt das Verdienst, eine sehr weit durchgebildete Theorie der Integrale erster Gattung für die Congruenzgruppen geschaffen zu haben, durchaus Hrn. Hurwitz allein. Wir werden weiter unter die einzelnen hier in Betracht kommenden Abhandlungen namhaft machen; indessen muss sogleich noch angeführt werden, dass der Herausgeber ausser diesen

Abhandlungen Hrn. Hurwitz noch eine ausführliche briefliche Darlegung verdankt, welche einige Eigenschaften der Integrale $j(\omega)$ von Primzahlstufe q betrifft. Die dieser Quelle entstammenden Entwicklungen sollen im folgenden noch genauer als solche gekennzeichnet werden. Die ausführliche Durchbildung der Hurwitz'schen Gedanken in der Form, wie sie das vorliegende Kapitel darstellt, rührt vom Herausgeber her.

§ 1. Die Formentheorie einer Fläche F_μ auf Grundlage der ω_1, ω_2.

Im vorletzten Kapitel brachten wir schon gelegentlich (p. 484) für die speciellen Flächen F_μ unserer früheren Untersuchungen diejenige Formentheorie in Vorschlag, welche sich auf ω_1, ω_2 als unabhängige Variabelen gründet. Der wesentliche Unterschied der hiermit gemeinten Formentheorie gegen die im vorletzten Kapitel auf z_1, z_2 basierte ist der, dass ω_1, ω_2 bei geschlossenen Wegen auf F_μ, allgemein zu reden, nicht in ihre Anfangswerte übergehen, sondern vielmehr in Werte ω_1', ω_2', die aus ω_1, ω_2 vermöge einer homogenen Modulsubstitution hervorgehen; die ω_1, ω_2 sind also *vieldeutige* Formen auf der Riemann'schen Fläche F_μ*).

Wenn wir vorhin, für den Zweck der Formentheorie z_1, z_2, das algebraische Gebilde auf eine über die Ebene von $z = z_1 : z_2$ gelagerte Riemann'sche Fläche bezogen, so würde der letzteren hier die zugehörige Riemann'sche Fläche über der Ebene der Variabelen $\omega = \omega_1 : \omega_2$ entsprechen. Man bemerke, *dass wir die so gemeinte Riemann'sche Fläche direct im ursprünglichen Polygon F_μ der ω-Halbebene vor Augen haben.* Inzwischen ist es doch weiterhin für die Ausdrucksweise zumeist bequemer, an die im Raume geschlossene Fläche F_μ mit ihrer Einteilung in 2μ Dreiecke zu knüpfen.

Die auf ω_1, ω_2 gegründete Formentheorie der F_μ ist nun bereits in einer Reihe zerstreuter Entwicklungen der früheren Kapitel enthalten, und wir brauchen hier kaum mehr als zu recapitulieren, um den vollen Zusammenschluss mit den allgemeinen Gesichtspunkten des vorletzten Kapitels zu gewinnen.

Um etwa mit dem in Bd. I häufig verwendeten *Differentiationsprocess* zu beginnen, so haben wir in:

$$(1) \qquad d\varpi = \omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1$$

*) Es steht gar nichts im Wege, gerade so gut wie z oder ω jede andere Function der Fläche in der Art des Textes zur Grundlage einer Formentheorie zu wählen; nur wird man im allgemeinen nicht so einfache Verhältnisse antreffen, wie bei z oder ω.

ein Differential der Fläche F_μ, welches an Stelle des in der allgemeinen Theorie (p. 493) gebrauchten Differentials $d\zeta$ tritt; $d\varpi$ bleibt, wie man sofort bestätigt, gegenüber den homogenen Modulsubstitutionen unverändert, *so dass wir es hier mit einem auf der Fläche eindeutigen Differential zu thun haben.* Dieses Differential $d\varpi$ ist zufolge seiner Gestalt $-\omega_2^2 d\omega$ auf der F_μ, abgesehen vielleicht von den Punkten a, b, c, allenthalben endlich und von Null verschieden (in dem p. 493 erläuterten Sinne). Das gleiche Verhalten zeigt $d\varpi$ in solchen Punkten a, b, die von vier bez. sechs Dreiecken umlagert sind; dagegen wird $d\varpi$ in Ausnahmepunkten a und b im Grade $\frac{1}{2}$ bez. $\frac{2}{3}$ unendlich. Um schliesslich $d\varpi$ in einem Punkte c zu untersuchen, so beziehen wir F_μ derart auf die ω-Halbebene, dass der betreffende Punkt c die Spitze $\omega = i\infty$ liefert. Man hat alsdann:

$$(2) \qquad d\varpi = \frac{i\omega_2^2}{2\pi} \cdot \frac{dr}{r},$$

während die Umgebung der fraglichen Stelle c von F_μ vermöge $r^{\frac{1}{n}}$ auf ein *einfach* bedecktes Stück der Ebene von $r^{\frac{1}{n}}$ abgebildet wird. Nach den früheren Sätzen ergiebt sich daraus das besonders wichtige Resultat, *dass $d\varpi$ in jedem Punkte c von F_μ einfach unendlich wird;* doch ist bei dieser Aussage in dem schon in I p. 694 angegebenen Sinne von jenem Nullpunkt abgesehen, der durch das Verschwinden von ω_2 an der fraglichen Stelle von F_μ involviert ist*).

An das Differential $d\varpi$ knüpfen wir sogleich die Betrachtung der zur F_μ (resp. zu ω_1, ω_2) gehörenden *Primform, als einer von zwei Stellen, ω und ω', abhängenden transcendenten eindeutigen Modulform jeweils erster Dimension in beiden Variabelenreihen.* Der Übergang von der unter (8) p. 505 gegebenen Gestalt zu der hiermit gemeinten Primform ist leicht zu bewerkstelligen; es erscheint ganz einfach das damalige Differential $d\zeta$ durch $d\varpi$ ersetzt, und wir schreiben des genaueren:

$$(4) \quad P(\omega, \omega') = \sqrt{-\,d\varpi \cdot d\varpi' \cdot e^{-\Pi_{\omega,\omega'}^{\omega+d\omega,\,\omega'+d\omega'}}}, \text{ lim. } d\omega = 0,\ d\omega' = 0.$$

*) Nebenher gedenken wir jener besonderen Flächen F_μ, die keine Ausnahmepunkte a, b aufweisen, und bei denen in allen Punkten c die gleiche Anzahl von, sagen wir, $2n$ Dreiecken zusammenhängen. Auf einer solchen F_μ ist $\sqrt[n]{\Delta}$ eine *ganze* Form, die auf F_μ gerade genau in derselben Weise verschwindet, wie $d\varpi$ unendlich wird. Man hat demnach in:

$$(3) \qquad d\varpi = (\omega_1\, d\omega_2 - \omega_2\, d\omega_1)\sqrt[n]{\Delta}$$

ein Differential der F_μ, freilich von der gebrochenen Ordnung $\frac{2n-12}{n}$, das auf der ganzen Fläche endlich und von Null verschieden ist.

Ohne weiteres aber folgen die Ergebnisse: Die Form $P(\omega, \omega')$ verschwindet auf F_μ einfach, falls die beiden Stellen ω, ω' auf der Fläche coincidieren; sie wird auf F_μ unendlich in den Ordnungen $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{l}$ in den Punkten c bez. den Ausnahmepunkten b und a. Das Periodenverhalten von $P(\omega, \omega')$ ist aber dasselbe geblieben, wie für die ursprüngliche Gestalt $P(x, y)$ der Primform.

Was wir unter den *algebraischen Formen* der F_μ zu verstehen haben, und insbesondere unter den *ganzen* algebraischen Formen, brauchen wir hier nicht nochmals zu erörtern; speciell über die letzteren vergl. man die Betrachtungen p. 362 ff. Für die Congruenzgruppen insbesondere kennen wir eine grosse Menge ganzer Formen vom vorigen Abschnitt her; die Teilwerte $\wp_{\lambda\mu}$, $\wp'_{\lambda\mu}$, sowie die Moduln A, B, z_α, y_α gehören hierher. Bei der allgemeinen Untersuchung p. 362 u. f. hatten wir übrigens neben *absolut* zur F_μ gehörenden Modulformen auch solche in Betracht zu ziehen, welche bei geschlossenen Wegen constante Factoren (Einheitswurzeln) annehmen; wir wollen gleich festsetzen, dass sich unsere zunächst folgenden Betrachtungen ganz allein mit solchen Formen befassen sollen, welche im absoluten Sinne zur F_μ gehören.

Diejenigen Gedankenentwicklungen, welche auf die Gewinnung einer *Basis* für die ganzen Modulformen einer Γ_μ abzielen, haben wir bei unseren früheren Untersuchungen niemals verfolgt. Wir müssten dabei, zumal wenn es sich um eine Minimalbasis handeln soll, μ ganze Modulformen $G_1(\omega_1, \omega_2)$, $G_2(\omega_1, \omega_2)$, ... der Γ_μ ausfindig machen, in denen sich jede ganze Modulform der Γ_μ in der Gestalt:

$$g_1 G_1 + g_2 G_2 + \cdots + g_\mu G_\mu$$

mit Hülfe ganzer Formen *erster* Stufe $g_1, g_2 \ldots$ darstellen lässt. Aber es sollen hier nur für eine specielle Gattung von Flächen F_μ zugehörige Basen construiert werden, wobei wir übrigens gar keinen Nachdruck darauf legen, auch wirklich Minimalbasen zu erhalten. Wir wollen nämlich eine *Basis des Teilungspolygons* $F_{\frac{1}{2}\varphi\psi}$ bilden, und zwar der Einfachheit halber gleich für den Fall einer *Primzahlstufe* q. Wenn wir uns hierbei noch auf die Darstellung ganzer Modulformen von *gerader* Dimension beschränken wollen, so haben wir die specielle Teilungsgleichung der $\wp$-Function:

$$(5) \qquad \wp^{\frac{q^2-1}{2}} + a g_2 \wp^{\frac{q^2-5}{2}} + b g_3 \wp^{\frac{q^2-7}{2}} + c g_2^2 \wp^{\frac{q^2-9}{2}} + \cdots = 0$$

zum unmittelbaren Gebrauch zur Hand. Unter den Wurzeln von (5) gehören aber im ganzen die $\frac{q-1}{2}$ Teilwerte $\wp_{0,1}, \wp_{0,2}, \wp_{0,3}, \ldots$ zum

Teilungspolygon $F_{\frac{q^2-1}{2}}$, wenn wir an der früher verabredeten Einlagerung desselben in die Dreiecksteilung der ω-Halbebene festhalten sollen (p. 20). Dass hier übrigens nicht nur eine, sondern gleich $\frac{1}{2}(q-1)$ Wurzeln von (5) zum Teilungspolygone gehören, entspricht dem Umstande, dass das fragliche Polygon durch $\frac{1}{2}(q-1)$ eine cyclische Gruppe bildende Transformationen in sich übergeht.

Indem man jetzt die Zahl μ unter $1, 2, \ldots, \frac{1}{2}(q-1)$ beliebig auswählt, hat man nach den allgemeinen Erörterungen von p. 490 ff. in

$$\left[1, \wp_{0,\mu}, \wp_{0,\mu}^2, \ldots, \wp_{0,\mu}^{\frac{q^2-3}{2}}\right] \tag{6}$$

eine Basis des Teilungspolygons. Die Discriminante dieser Basis, die wir in der Folge stets durch $D_\wp$ bezeichnen wollen, ist gegeben durch:

$$D_\wp = \left\{\prod(\wp_{\varkappa,\lambda} - \wp_{\varkappa',\lambda'})\right\}^2, \tag{7}$$

wobei sich in bekannter Weise das Product auf alle Differenzen zweier verschiedener Wurzeln von (5) bezieht. Die Discriminante (7) ist eine ganze Modulform erster Stufe. Aber dieselbe kann nur in der Spitze $\omega = i\infty$ des Ausgangsdreiecks verschwinden; denn wir berechnen aus (7) p. 276 sofort:

$$\wp_{\varkappa,\lambda} - \wp_{\varkappa',\lambda'} = -\frac{\sigma_{\varkappa-\varkappa',\lambda-\lambda'}\,\sigma_{\varkappa+\varkappa',\lambda+\lambda'}}{\sigma_{\varkappa,\lambda}^2\,\sigma_{\varkappa',\lambda'}^2},$$

und die σ-Teilwerte sind abgesehen von den Polygonspitzen allenthalben endlich und von Null verschieden. Bei dieser Sachlage ist $D_\wp$ bis auf einen numerischen Factor, den wir vernachlässigen, nach einer früher oft vollzogenen Schlussweise *mit einer Potenz der Discriminante erster Stufe* $\Delta(\omega_1, \omega_2)$ *identisch*, und zwar lesen wir aus der Dimension der rechten Seite von (7) ab:

$$D_\wp = \Delta^{\frac{(q^2-1)(q^2-3)}{24}}. \tag{8}$$

In dem Zutreffen der Gleichung (8) hat man einen besonders einfachen Zug der Teilungsgleichung (5) zu sehen. Aber es sei sogleich bemerkt, dass die Basis (6) noch keineswegs eine Minimalbasis des Teilungspolygons ist, insofern wir z. B. jeden anderen Teilwert $\wp_{0,\mu'}$ noch keineswegs in der Basis (6) mit Hülfe *ganzer* Coefficienten erster Stufe darstellen können. Wir unterlassen jedoch, die zur Bildung einer Minimalbasis führende Recursionsrechnung hier wirklich zu entwickeln, begnügen uns vielmehr mit dem bisher erreichten Resultat: *Jede ganze Modulform* $-2\nu^{\text{ter}}$ *Dimension des Teilungspolygons ist in der Gestalt darstellbar:*

$$(9)\qquad \frac{g_k + g_{k-2}\wp_{0\mu} + g_{k-4}\wp_{0\mu}^2 + \cdots + g_{k-q^2+3}\wp_{0\mu}^{\frac{q^2-3}{2}}}{D_\wp},$$

wobei g_l eine ganze Modulform erster Stufe der Dimension $-l$ ist, während k durch die Gleichung gegeben ist:

$$(10)\qquad k = 2\nu + \frac{(q^2-1)(q^2-3)}{2}.$$

Umgekehrt ist natürlich keineswegs jede Form (9) eine ganze Modulform des Teilungspolygons; wir werden uns vielmehr späterhin mit der Aufgabe zu beschäftigen haben, aus allen Ausdrücken (9) die ganzen Modulformen auszusondern.

§ 2. Von den Modulformen erster und dritter Gattung insbesondere. Vorläufige Auswahl der Integrale j bei einer Primzahlstufe q.

Von den Integralen einer Fläche F_μ werden diejenigen der ersten und zweiten Gattung beim Rückgang zur ω-Halbebene *eindeutige* Functionen von ω (cf. I p. 582 ff.); bei einem Integrale dritter Gattung aber gilt das Gleiche nur dann, wenn seine logarithmischen Unstetigkeitspunkte nur in den Spitzen des Polygons F_μ gelegen sind. Das Differential irgend eines Integrals der F_μ, durch $d\varpi$ dividiert, liefert eine algebraische Form $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension in ω_1, ω_2, und wir haben jetzt vor allem zu untersuchen, wann diese Modulform eine *ganze* wird. Man überblickt leicht, *dass dies stets der Fall ist, wenn wir ein Integral erster Gattung j oder ein solches Integral dritter Gattung Q differenzierten, das nur logarithmische, in den Polygonspitzen gelegene, Unstetigkeitspunkte aufweist.* Für die Integrale j ist dies sofort evident; ist aber Q ein Integral dritter Gattung von der bezeichneten Art, so beziehe man die Fläche F_μ derart auf die ω-Halbebene, dass ein gerade betrachteter Unstetigkeitspunkt c nach der Spitze $\omega = i\infty$ zu liegen kommt. Da wird alsdann:

$$\frac{dQ}{d\varpi} = \frac{d}{d\varpi}(c\log r) = \frac{2c\pi}{i\omega_2^2},$$

und also bleibt die Ableitung von Q an der Stelle c im Sinne des p. 559 verabredeten Sprachgebrauches endlich. *Hiermit sind zugleich die Integrale der geforderten Eigenschaft erschöpft.*

Man führe jetzt die Bezeichnung ein:

$$(1)\qquad \varphi(\omega_1, \omega_2) = \frac{dj}{d\varpi}, \quad \Psi(\omega_1, \omega_2) = \frac{dQ}{d\varpi}$$

und benenne φ und Ψ kurz als *Formen erster und dritter Gattung der*

Fläche F_μ. Dieselben sind ganze Formen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension der F_μ, *und es wird insbesondere eine Form erster Gattung in jedem Punkte c mindestens in der Ordnung* 1 *verschwinden*, da $d\varpi$ nach p. 559 an einer solchen Stelle der Fläche in dieser Ordnung unendlich wird.

Diese Sätze sind sofort auch der Umkehrung fähig: *Jede ganze Form der* F_μ *von der Dimension* -2, *die wenigstens in einer Spitze c von Null verschieden ist*, *ist eine Form dritter Gattung* $\Psi(\omega_1, \omega_2)$; sie wird dann aber wenigstens noch in *einer* weiteren Spitze c von Null verschieden sein, wie man aus der Grundeigenschaft der Integrale dritter Gattung folgert, mindestens zwei logarithmische Unstetigkeitspunkte zu besitzen. *Ist aber eine ganze Form* $(-2)^{\text{ter}}$ *Dimension in allen Punkten c gleich Null, so stellt sie eine Form erster Gattung* $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ *vor*. Die Beweise dieser Behauptungen ergeben sich einfach dadurch, dass man in:

$$(2) \qquad j = \int \varphi(\omega_1, \omega_2)\, d\varpi\,, \qquad Q = \int \Psi(\omega_1, \omega_2)\, d\varpi$$

Integrale erster und dritter Gattung der F_μ erkennt.

Zu den Formen dritter Gattung gehören vor allem die *Teilwerte* $\wp_{\lambda\mu}$ *der* $\wp$*-Function*, so dass wir in:

$$(3) \qquad Q = \int \wp_{\lambda\mu}\, d\varpi$$

eine ganze Reihe von Integralen dritter Gattung von der oben bezeichneten speciellen Art haben; ist n der Teilungsgrad der $\wp_{\lambda\mu}$, so wird natürlich die zugehörige Fläche F_μ der Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe entsprechen. — Für ungerade n liefern die $\frac{n-1}{2}$ *Moduln* z_α eines einzelnen Systems in:

$$(4) \qquad j = \int z_\alpha\, d\varpi$$

ebenso viele Integrale erster Gattung; aber für die Stufe dieser Integrale und also für die Bestimmung der zugehörigen Fläche F_μ sind hier immer die zahlreichen Fallunterscheidungen massgeblich, welche seinerzeit (im zweiten und dritten Kap. des vorigen Abschn.) betreffs der Stufe der z_α zu treffen waren. Bei geradem n liefert jedes einzelne z_α-System $\frac{n+2}{2}$ Integrale erster Gattung j der Gestalt (4), die entweder der $2n^{\text{ten}}$ oder $4n^{\text{ten}}$ Stufe angehören. — Letzten Endes haben wir zur Bildung von Integralen dritter und erster Gattung auch noch *die ganzen Formen* $(-1)^{\text{ter}}$ *Dimension* A_α, B_α zur Hand. Zweigliedrige Verbindungen irgend welcher Moduln dieser Art liefern in:

$$(5) \qquad \int \mathsf{A}_\alpha \mathsf{A}_\beta\, d\varpi \quad , \quad \int \mathsf{A}_\alpha \mathsf{B}_\beta\, d\varpi\,, \cdots$$

stets Integrale dritter oder erster Gattung. Was im Einzelfalle vor-

liegt, wird man nach den entwickelten Regeln immer leicht entscheiden können. —

Wir wenden uns nun gleich zu den Integralen j einer beliebigen *Primzahlstufe* q, deren Anzahl gleich dem Geschlechte:

$$p = \frac{(q+2)(q-3)(q-5)}{24} \tag{6}$$

der Hauptcongruenzgruppe q^{ter} Stufe ist. Für die Anordnung dieser p Integrale j soll hier zuvörderst ein zweckmässiges Schema verabredet werden. Zu diesem Ende sei $j(\omega)$ irgend ein Integral erster Gattung q^{ter} Stufe; man bilde alsdann vermöge der q^{ten} Einheitswurzel $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{q}}$ das neue Integral erster Gattung q^{ter} Stufe:

$$j(\omega \mid k) = \sum_{\nu=0}^{q-1} \varepsilon^{-k\nu} j(\omega + \nu), \tag{7}$$

wobei k irgend eine ganze Zahl aus der Reihe $0, 1, \ldots, q-1$ sein soll. Indem wir k der Reihe nach mit diesen q Zahlen identificieren, ergiebt sich durch Inversion von (7) für das ursprünglich vorgelegte Integral $j(\omega)$ der Ausdruck:

$$j(\omega) = q^{-1}[j(\omega \mid 0) + j(\omega \mid 1) + \cdots + j(\omega \mid q-1)]. \tag{8}$$

Das Integral $j(\omega \mid k)$ zeigt aber bei Ausübung der Substitution S das Verhalten:

$$j(\omega + 1 \mid k) = \varepsilon^k j(\omega \mid k). \tag{9}$$

Es lassen sich demgemäss alle p linear-unabhängigen Integrale j der q^{ten} Stufe so auswählen, dass das einzelne unter ihnen sich gegenüber der Operation S bis auf eine multiplicative n^{te} Einheitswurzel reproduciert.

Man nehme nun diejenigen Integrale j vorweg, welche sich gegenüber S überhaupt nicht mehr ändern. Es werden dies die *Integrale erster Gattung des Teilungspolygons* $F_{\frac{q^2-1}{2}}$ sein, und da sich das Geschlecht des letzteren nach den früheren Regeln leicht zu:

$$\varkappa = \frac{(q-5)(q-7)}{24} \tag{10}$$

bestimmt, *so haben wir an erster Stelle im ganzen $\varkappa$ Integrale:*

$$j_1(\omega \mid 0),\ j_2(\omega \mid 0),\ \cdots,\ j_\varkappa(\omega \mid 0), \tag{11}$$

die gegenüber der Substitution S unveränderlich sind. Hierher gehören natürlich auch die im letzten Kapitel des vorigen Abschnitts (p. 449 ff.) häufig benutzten Integrale j des Transformationspolygons F_{q+1}.

Für die noch übrig bleibenden $(q-1)$ Zahlwerte $k = 1, \cdots, q-1$ unterscheiden wir, ob in k ein quadratischer Rest oder Nichtrest von q

vorliegt; dabei mögen wir die $\frac{q-1}{2}$ Reste generell durch α, die Nichtreste ebenso durch β bezeichnen. Bei einem gerade ausgewählten System von p Integralen der Art (9) mögen nun zu einem besonderen Reste $k = \alpha$ insgesamt die λ linear-unabhängigen Integrale:

$$(12)\qquad j_1(\omega \mid \alpha),\ j_2(\omega \mid \alpha),\ \cdots,\ j_\lambda(\omega \mid \alpha)$$

gehören. Wir verstehen dann unter g eine primitive Wurzel der Primzahl q und wählen eine der Bedingung:

$$(13)\qquad U \equiv \frac{g\omega}{g^{-1}} \equiv g^2\omega,\ (\text{mod. } q)$$

genügende Modulsubstitution aus, um vermöge derselben die λ Integrale (12) zu transformieren. Da $USU^{-1} \equiv S^{g^2}$ (mod q) zutrifft, so wird das einzelne Integral $j_i(U(\omega) \mid \alpha)$ gegenüber der Substitution S die Einheitswurzel $\varepsilon^{g^2\alpha}$ annehmen; im Sinne der in (7) und (9) eingeführten Bezeichnung wird also zu setzen sein:

$$(14)\qquad j_i(U^\nu(\omega) \mid \alpha) = j_i(\omega \mid g^{2\nu}\alpha).$$

Die Substitution U ist aber, mod. q genommen, von der Periode $\frac{q-1}{2}$; indem man somit in (14) für ν der Reihe nach die Werte $0, 1, \cdots, \frac{q-3}{2}$ nimmt, entspringen von (12) aus $\frac{q-1}{2}$ Reihen zu je λ Integralen, deren einzelne je einem der $\frac{q-1}{2}$ Reste α zugehört. Da hierbei hinsichtlich des anfänglich ausgewählten α keinerlei beschränkende Voraussetzung gemacht wurde, so ist zugleich evident, *dass für jeden Rest α gerade λ und nur λ linear-unabhängige Integrale $j(\omega \mid \alpha)$ eintreten.*

Für die Nichtreste $k = \beta$ gestaltet sich die Überlegung genau so. Haben wir für einen ersten Nichtrest insgesamt die μ linear-unabhängigen Integrale:

$$(15)\qquad j_1(\omega \mid \beta),\ j_2(\omega \mid \beta),\ \ldots,\ j_\mu(\omega \mid \beta),$$

so werden wir überhaupt für jeden Nichtrest β genau μ unabhängige Integrale j finden und nicht mehr. In diesem Sinne haben wir nur noch der Gleichung (14) die nachfolgende anzureihen:

$$(16)\qquad j_i(U^\nu(\omega) \mid \beta) = j_i(\omega) \mid g^{2\nu}\beta).$$

Über die jetzt betrachteten

$$\varkappa + (\lambda + \mu)\cdot \frac{q-1}{2}$$

Integrale j hinaus werden weitere unabhängige Integrale j der q^{ten} Stufe nicht mehr existieren können. Aber man beachte umgekehrt,

dass eine lineare Relation zwischen jenen aufgezählten Integralen nicht bestehen kann. Eine derartige Relation würde sich nämlich sogleich in eine Anzahl weiterer Relationen spalten lassen, in deren einzelner nur solche Integrale j vorkommen, welche gegenüber S das gleiche Verhalten zeigen. Derartige Relationen kommen aber sicher nicht vor; denn die λ Integrale der einzelnen Reihe (12), sowie die μ Integrale der einzelnen Reihe (15) sind linear-unabhängig, und ein Gleiches gilt endlich auch von den $\varkappa$ Integralen $j(\omega \mid 0)$ des Teilungspolygons. Bei dieser Sachlage gelten also die Formeln:

$$p = \varkappa + (\lambda + \mu)\frac{q-1}{2} = \frac{(q+2)(q-3)(q-5)}{24}, \quad \varkappa = \frac{(q-5)(q-7)}{24};$$

wir berechnen von hier aus noch für $(\lambda + \mu)$ den Wert:

$$\lambda + \mu = \frac{(q-1)(q-5)}{12}, \tag{17}$$

indessen lässt sich nicht ohne weiteres bestimmen, welche Zahlwerte λ und μ einzeln genommen haben mögen.

§ 3. Specielles über die Integrale $j(\omega \mid 0)$ des Teilungspolygons. Darstellung derselben durch die $j(\omega \mid \alpha)$, $j(\omega \mid \beta)$ *).

Auch nach Festlegung des im vorigen Paragraphen verabredeten Schemas ist die Auswahl der einzelnen Integrale j noch in sehr mannigfaltiger Weise zu treffen. In der That mögen wir die $\varkappa$ Integrale $j(\omega \mid 0)$ des Teilungspolygons noch beliebig linear substituieren, und ein Gleiches dürfen wir mit den Integralen der ersten Reihe (12) bez. (15) § 2 vornehmen; aber man bemerke, dass alsdann auf Grund von (14) bez. (16) die $\frac{q-3}{2}$ übrigen Reihen mit der ersten vollständig bestimmt sind. Wie wir in diesem Betracht bei den Integralen $j(\omega \mid \alpha)$, $j(\omega \mid \beta)$ zweckmässige specielle Auswahlen treffen mögen, werden wir weiterhin noch zu betrachten haben. Unsere nächste Untersuchung gilt allein den $\varkappa$ Integralen $j(\omega \mid 0)$ des Teilungspolygons $F_{\frac{q^2-1}{2}}$. Wir haben dabei insbesondere eine eigenartige Ausdrucksweise dieser Integrale $j(\omega \mid 0)$ durch die $j(\omega \mid \alpha)$, $j(\omega \mid \beta)$ abzuleiten, bez. durch gewisse lineare Verbindungen der $j(\omega \mid \alpha)$, $j(\omega \mid \beta)$, die wir unter der Benennung J_s und $J_{s,s'}$ einführen wollen. Von den so zu entwickelnden Darstellungen der $j(\omega \mid 0)$ wird später ein wichtiger Gebrauch zu machen sein.

*) Den Paragraphen 3, 4, 5 liegt die schon in der Einleitung erwähnte briefliche Mitteilung von Hrn Hurwitz zu Grunde.

Die Substitution U behalten wir in der Bedeutung (13) des vorigen Paragraphen bei und verstehen unter ζ eine primitive $\left(\frac{q-1}{2}\right)^{\text{te}}$ Einheitswurzel. Ist nun $j(\omega)$ ein beliebiges Integral erster Gattung des Teilungspolygons, so haben wir in:

$$(1)\qquad j(\omega),\ j(U(\omega)),\cdots,j(U^{\frac{q-3}{2}}(\omega))$$

gleich $\frac{q-1}{2}$ Integrale dieses Polygons, insofern dasselbe doch durch die Substitution U in sich selbst transformiert wird. Wir bilden uns nun ähnlich wie in (7) § 2 mit Hülfe der Einheitswurzel ζ die $\frac{q-1}{2}$ linearen Verbindungen:

$$(2)\qquad j(\omega)+\zeta^{-s}j(U(\omega))+\zeta^{-2s}j(U^2(\omega))+\cdots\zeta^{-\frac{q-3}{2}\cdot s}j(U^{\frac{q-3}{2}}(\omega)),$$

indem wir hierbei die Zahl s der Reihe nach mit $0,1,\ldots,\frac{q-3}{2}$ identisch nehmen. In (2) haben wir dann $\frac{q-1}{2}$ Integrale des Polygons $F_{\frac{q^2-1}{2}}$, aus denen sich umgekehrt das anfänglich gewählte $j(\omega)$ linear aufbauen lässt. Gegenüber U aber ändert sich das Integral (2) um die $\left(\frac{q-1}{2}\right)^{\text{te}}$ Einheitswurzel $\eta=\zeta^s$ als Factor. Daher das Resultat: *Die $\varkappa$ linear-unabhängigen Integrale j des Polygons $F_{\frac{q^2-1}{2}}$ lassen sich so auswählen, dass das einzelne unter ihnen gegenüber S und U das Verhalten zeigt:*

$$(3)\qquad j(S(\omega))=j(\omega),\quad j(U(\omega))=\eta j(\omega).$$

Die zweite unter diesen beiden Formeln erfordert indes noch eine zusätzliche Bemerkung. Um dieselbe nämlich aus (2) zu entwickeln, haben wir $j(U^{\frac{q-3}{2}}(\omega))$ direct mit $j(\omega)$ identisch gesetzt. Dabei wurde jedoch eine additive Constante vernachlässigt; denn man bemerke, dass $U^{\frac{q-1}{2}}$ (übrigens im Gegensatz zu S^q) auf unserer Riemann'schen Fläche einen solchen geschlossenen Weg bedeutet, der sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen lässt. Strenge genommen sollten wir demgemäss in der zweiten Formel (3) rechter Hand noch eine additive Constante hinzusetzen. Inzwischen ist diese Constante bei den gerade vorliegenden Überlegungen ganz bedeutungslos; wir haben sie demnach in (3), sowie in den analogen weiterhin folgenden Formeln einfach fortgelassen.

Denken wir fortan die $\varkappa$ Integrale $j(\omega)$ des Teilungspolygons in

Übereinstimmung mit den Relationen (3) ausgewählt, so zeigt das einzelne unter ihnen ein besonders einfaches Verhalten bei Ausübung einer beliebigen Modulsubstitution $V = \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$. Wir nennen bei dieser Entwicklung, einem gewohnten Brauche folgend, die in der Congruenz

$$g^\nu \equiv a \pmod{q}$$

zu irgend einer gegen q primen Zahl a gehörende ganze Zahl ν den Index von a bezüglich der Primitivwurzel g und schreiben abgekürzt $\nu = \text{ind.}\, a$. Es wird alsdann:

$$V^{\text{ind.}\, \alpha} \equiv \begin{pmatrix}\alpha, 0\\ 0, \alpha^{-1}\end{pmatrix}, \pmod{q}, \tag{4}$$

und wir finden für die genannte beliebige Modulsubstitution V nach leichter Zwischenrechnung die Congruenzen:

$$\left\{\begin{array}{l} U^{-\text{ind.}\,\alpha} V = \begin{pmatrix}1, \beta\alpha^{-1}\\ 0, 1\end{pmatrix}, \text{ wenn } \gamma \equiv 0 \pmod{q},\\ U^{\text{ind.}\,\gamma} S^{-\alpha\gamma^{-1}}\, V \equiv \begin{pmatrix}0, -1\\ 1, \delta\gamma^{-1}\end{pmatrix}, \text{ wenn } \gamma \text{ prim gegen } q \end{array}\right. \tag{5}$$

ist. *Für das einzelne Integral j ergiebt sich daraufhin vermöge* (3) *gegenüber V das Verhalten:*

$$\left\{\begin{array}{l} j\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = \eta^{\text{ind.}\,\alpha} j(\omega), \textit{ falls } \gamma \textit{ durch } q \textit{ teilbar},\\ j\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = \eta^{-\text{ind.}\,\gamma} j\left(\frac{-1}{\omega+\delta\gamma^{-1}}\right), \textit{ falls } \gamma \textit{ prim gegen } q. \end{array}\right. \tag{6}$$

Besonders einfach werden diese Formeln für $\eta = 1$, d. i. für ein *Integral j des Transformationspolygons F_{q+1}*; die Anzahl dieser besonderen Integrale ist nach Formel (13) p. 52 bez. gleich:

$$\frac{q-13}{12}, \quad \frac{q-5}{12}, \quad \frac{q-7}{12}, \quad \frac{q+1}{12}, \tag{7}$$

je nachdem $q \equiv 1, 5, 7, 11 \pmod{12}$ ist. Hier ist $j(\omega)$ bekanntlich eines unter $(q+1)$ gleichberechtigten Integralen, die einfach durch:

$$j(\omega),\; j\left(\frac{-1}{\omega}\right),\; j\left(\frac{-1}{\omega+1}\right), \cdots,\; j\left(\frac{-1}{\omega+q-1}\right) \tag{8}$$

gegeben sind. Die Summe dieser $(q+1)$ Integrale ist dabei als ein überall endliches Integral *erster* Stufe mit einer Constanten identisch:

$$j(\omega) + j\left(\frac{-1}{\omega}\right) + \cdots + j\left(\frac{-1}{\omega+q-1}\right) = \text{const.} \tag{9}$$

Hieran knüpft sich nun die nachfolgende Überlegung: Einmal sind die Integrale (8) gerade diejenigen, welche auf den rechten Seiten

der linearen Transformationen (6) auftreten; für's zweite aber bemerke man, dass sich vermöge der Formel (9) $j(\omega)$ durch die q übrigen Integrale (8) darstellen lässt. Indem wir zusammenfassen, folgt vermöge einer leichten Zwischenbetrachtung, *dass sich die q letzten Integrale* (8) *gegenüber beliebiger Modulsubstitutionen linear substituieren.* Auf die so entspringenden q-gliedrigen Substitutionen müssen wir aber deshalb eingehen, weil wir gerade durch ihre weitere Discussion diejenige Darstellung für das Integral $j(\omega \mid 0)$ des Transformationspolygons gewinnen werden, auf die wir schon im Anfang des Paragraphen Bezug nahmen.

Bei dieser Entwicklung führen wir zur Vereinfachung des Ausdrucks der in Rede stehenden q-gliedrigen Substitutionen an Stelle der q Integrale $j\left(\frac{-1}{\omega+\nu}\right)$ die q neuen Integrale $J_0(\omega)$, $J_1(\omega), \ldots,$ $J_{q-1}(\omega)$ durch die lineare Transformation ein:

$$(10)\quad J_s(\omega) = j\left(\frac{-1}{\omega}\right) + \varepsilon^{-s} j\left(\frac{-1}{\omega+1}\right) + \cdots + \varepsilon^{-s(q-1)} j\left(\frac{-1}{\omega+q-1}\right),$$

deren Determinante von Null verschieden ist, wie es für die Umkehrbarkeit der Substitution (10) erforderlich ist. Für $s = 0$ haben wir in $J_0(\omega)$ einfach das ursprüngliche Integral $-j(\omega)$, immer von einer additiven Constanten abgesehen. Indem man die Transformation (10) leicht invertiert, *ergiebt sich als Wirkung der Substitutionen S und T auf das System der Integrale $J_0, J_1, \ldots, J_{q-1}$ nach leichter Zwischenrechnung:*

$$(S)\qquad J_s' = \varepsilon^s J_s,$$

$$(T)\qquad \begin{cases} -qJ_0' = \sum_{t=0}^{q-1} J_t, \\ -qJ_s' = (q+1)J_0 + \sum_{t=1}^{q-1} c_{st} J_t, \end{cases}$$

wobei sich in der letzten Formel der Summationsbuchstabe s nur auf $1, 2, \cdots, q-1$ bezieht; die Abkürzung c_{st} ist gebraucht in der Bedeutung:

$$c_{st} = -\sum_{\nu=1}^{q-1} \varepsilon^{s\nu + t\nu^{-1}}.$$

Hiervon nun die nachfolgende Anwendung: Wie man sieht, ist das einzelne der $(q-1)$ Integrale $J_1, J_2, \ldots J_{q-1}$ eine *lineare Combination gewisser λ Integrale $j(\omega \mid \alpha)$ bez. μ Integrale $j(\omega \mid \beta)$*, je nachdem s ein Rest $s = \alpha$ oder ein Nichtrest $s = \beta$ von q ist. Wenn man nun nach ganz beliebiger Auswahl von s unter den Zahlen

$1, 2, \cdots, q-1$ auf die betreffende unter (T) stehende Formel:

$$-qJ_s\left(\frac{-1}{\omega}\right) = (q+1)J_0(\omega) + \sum_{t=1}^{q-1} c_{st}J_t(\omega)$$

der Reihe nach die q Substitutionen $1, S, \ldots, S^{q-1}$ ausübt und alle entspringenden q Formeln addiert, *so folgt vermöge* $J_0 = -j$ *für das beliebig ausgewählte Integral* $j(\omega)$ *des Transformationspolygons die Darstellung:*

$$(11) \qquad (q+1)j(\omega) = J_s\left(\frac{-1}{\omega}\right) + J_s\left(\frac{-1}{\omega+1}\right) + \cdots + J_s\left(\frac{-1}{\omega+q-1}\right),$$

und gerade um diese Formel war es uns zwecks späterer Anwendung zu thun. Natürlich können wir die hiermit geleistete Darstellung des fraglichen Integrals $j(\omega)$ vermöge der Integrale $j(\omega \mid \alpha)$, $j(\omega \mid \beta)$ den wechselnden Werten $s = 1, 2, \cdots, q-1$ entsprechend noch in $(q-1)$ unterschiedenen Arten ausführen.

Analoge Entwicklungen haben wir jetzt noch für jedes beliebige Integral $j(\omega)$ des Teilungspolygons durchzuführen, welches nicht bereits zum Transformationspolygon gehört. Hier besteht dann die Relation (9) nicht; zufolge der Formeln (6) werden demnach die Integrale (8) gegenüber beliebigen Modulsubstitutionen $(q+1)$-*gliedrige lineare Substitutionen* erleiden. Um für die letzteren eine möglichst einfache Gestalt zu gewinnen, führen wir statt der $(q+1)$ Integrale (8) die nachfolgenden $(q+1)$ neuen Integrale ein:

$$(12) \qquad \begin{cases} J_\infty(\omega) = j(\omega), \\ qJ_0(\omega) = j\left(\frac{-1}{\omega}\right) + j\left(\frac{-1}{\omega+1}\right) + \cdots + j\left(\frac{-1}{\omega+q-1}\right), \\ qJ_s(\omega) = \eta^{-\text{ind.}s}\left[j\left(\frac{-1}{\omega}\right) + \varepsilon^{-s}j\left(\frac{-1}{\omega+1}\right) + \cdots \right. \\ \qquad\qquad \left. + \varepsilon^{-s(q-1)}j\left(\frac{-1}{\omega+q-1}\right)\right], \end{cases}$$

wobei in der letzten Formel sich s nur wieder auf die $(q-1)$ Werte $1, 2, \cdots, q-1$ bezieht, während η die im Sinne von (3) zu $j(\omega)$ gehörende Einheitswurzel ist. Die Inversion der Formeln (12) liefert offenbar:

$$(13) \qquad j\left(\frac{-1}{\omega+t}\right) = J_0(\omega) + \sum_{s=1}^{q-1} \varepsilon^{st}\eta^{\text{ind.}s}J_s(\omega).$$

Als *Wirkung der Substitutionen S und T auf die jetzt gemeinten* $(q+1)$ *Integrale* $J(\omega)$ berechnen wir ohne Mühe:

$$(S) \qquad J'_\infty = J_\infty, \; J'_0 = J_0, \; J'_s = \varepsilon^s J_s,$$

$$(T)\quad \begin{cases} J'_\infty = J_0 + \sum\limits_{t=1}^{q-1} \eta^{\text{ind.}\, t} J_t, \\ q J_0' = J_\infty + (\eta, \varepsilon) \sum\limits_{t=1}^{q-1} J_t, \\ q J_s' = \eta^{-\text{ind.}\, s} J_\infty + (\eta^{-1}, \varepsilon) J_0 + \sum\limits_{t=1}^{q-1} c_{st} J_t, \end{cases}$$

wobei in der letzten Formel $s = 1, 2, \cdots, q-1$ zu nehmen ist. Hierbei hat das auch in der Kreisteilungstheorie gebräuchliche Symbol (η, ε) die Bedeutung:

$$(14)\qquad (\eta, \varepsilon) = \sum_{\mu=1}^{q-1} \varepsilon^\mu \eta^{\text{ind.}\, \mu},$$

während der Coefficient c_{st} gegeben ist durch:

$$(15)\qquad c_{st} = \sum_{\nu=1}^{q-1} \varepsilon^{t\nu + s\nu^{-1}} \eta^{\text{ind.}\, t\nu}.$$

Hieran knüpft sich nun wieder die nachfolgende Rechnung: Nach beliebiger Auswahl von s aus dem Intervall $1, 2, \cdots, q-1$ übe man auf die zu s gehörende Gleichung (T) der Reihe nach die Substitutionen $1, S, \cdots, S^{q-1}$ aus und addiere die gesamten so entspringenden q Formeln zusammen. Gehen wir dabei von J_∞ gleich wieder zur ursprünglichen Bezeichnung $j(\omega)$ zurück, so folgt:

$$(16)\qquad j(\omega) = -\eta^{\text{ind.}\, s} (\eta^{-1}, \varepsilon) J_0(\omega) + \eta^{\text{ind.}\, s} \sum_{t=0}^{q-1} J_s\left(\frac{-1}{\omega + t}\right).$$

Unter den rechts stehenden Integralen gehört auch noch J_0 zum Teilungspolygon. Um dasselbe zu eliminieren, wählen wir an Stelle von s ein zweites Mal die Zahl s' so aus, dass $(\eta^{\text{ind.}\, s'} - \eta^{\text{ind.}\, s})$ von Null verschieden ist; dies hat keine Schwierigkeit, da η nicht gleich 1 ist. Ohne die der Gleichung (16) analoge Relation für s' hinzuschreiben, führen wir zum Zwecke der Elimination von J_0 jetzt endlich das Integral ein:

$$(17)\qquad J_{s, s'} = \frac{\eta^{\text{ind.}\, s s'}}{\eta^{\text{ind.}\, s'} - \eta^{\text{ind.}\, s}} \cdot [J_s - J_{s'}];$$

wie man sieht, setzt sich dasselbe wieder *ausschliesslich aus Integralen* $j(\omega \mid \alpha)$, $j(\omega \mid \beta)$ zusammen, nämlich aus den Integralen $j(\omega \mid s)$ und $j(\omega \mid s')$. *Mit Hülfe des Integrals* (17) *aber folgern wir aus* (16) *für das ursprünglich vorgelegte Integral* $j(\omega)$ *des Teilungspolygons die Darstellung:*

$$(18)\quad j(\omega) = J_{s,s'}\left(\frac{-1}{\omega}\right) + J_{s,s'}\left(\frac{-1}{\omega+1}\right) + \cdots + J_{s,s'}\left(\frac{-1}{\omega+q-1}\right),$$

eine Formel, die sich der oben entwickelten Gleichung (11) unmittelbar anschliesst; doch ist sie infolge der *zwei* Indices s, s' noch mannigfaltiger wählbar, als (11). *Hierdurch haben nun auch die in* (11) *noch nicht miterledigten Integrale* $j(\omega \mid 0)$ *ihre in Aussicht genommene Darstellung durch die* $j(\omega \mid \alpha)$, $j(\omega \mid \beta)$ *gefunden.*

Wir haben mit dem Vorstehenden diejenigen gruppentheoretischen Entwicklungen über die Integrale q^{ter} Stufe gegeben, welche sich an die halbmetacyclischen Untergruppen $G_{\frac{q(q-1)}{2}}$ anschliessen. Es wäre jetzt möglich, auch noch die übrigen Untergruppen der Gesamtgruppe $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ der q^{ten} Stufe in entsprechender Weise heranziehen. Jedoch haben wir in dieser Richtung liegende Entwicklungen im folgenden nicht nötig.

§ 4. Ein allgemeines Bildungsgesetz für die Integrale $j(\omega \mid \alpha)$, $j(\omega \mid \beta)$ der q^{ten} Stufe.

Um ein allgemeines Bildungsgesetz für die Integrale j zu gewinnen, bringen wir die in Paragraph 1 gegebene Basis des Teilungspolygons $\left[1, \wp_{0,\mu}, \ldots, \wp_{0,\mu}^{\frac{q^2-3}{2}}\right]$ in Anwendung. Dies lässt sich ohne weiteres zunächst nur für Integrale $j(\omega \mid 0)$ durchführen; indessen ist es gerade unser Ziel, die fragliche Darstellung für die Integrale $j(\omega \mid \alpha)$, $j(\omega \mid \beta)$ unter Beiseitelassung der $j(\omega \mid 0)$ durchzubilden, und dieserhalb müssen wir noch einen Umweg gehen, um die Formen des Teilungspolygons mit den Integralen $j(\omega \mid \alpha)$, $j(\omega \mid \beta)$ in Verbindung zu bringen.

Indem wir zuvörderst unentschieden lassen, ob wir mit einem Reste α oder Nichtreste β zu thun haben, schreiben wir $j(\omega \mid \nu)$, wo also ν irgend eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, q-1$ ist. Man gehe dann gleich zur entsprechenden Form erster Gattung:

$$\varphi(\omega_1, \omega_2) = \frac{d j(\omega \mid \nu)}{d \varpi} \tag{1}$$

und suche dieselbe mit einem solchen Factor zu versehen, dass das Product eine ganze Form des Teilungspolygons wird. Unter unwesentlicher Abweichung von der p. 281 befolgten Schreibweise setze man:

$$z_\alpha = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m r^{\frac{[(2m+1)q-2\alpha]^2}{8q}} \tag{2}$$

und verstehe weiter unter (q) den kleinsten positiven Rest von q modulo 4:

$$(q) = 2 - \left(\frac{-1}{q}\right).$$

Nach den seinerzeit entwickelten Sätzen ist $z_\alpha z_\beta (\sqrt[]{\Delta})^{(q)}$ eine *ganze* Modulform q^{ter} Stufe, deren Verhalten gegenüber S aus (1) p. 313 leicht berechnet werden kann. Im Anschluss daran zeigt man leicht, dass die Congruenz $\alpha^2 + \beta^2 \equiv -2\nu \pmod{q}$ bei beliebig gewähltem $\nu = 1, 2, \cdots, q-1$ stets durch zwei ganze durch q nicht teilbare Zahlen α, β befriedigt werden kann. Wählen wir aber zwei solche Zahlen α, β gerade als Indices in $z_\alpha z_\beta (\sqrt[]{\Delta})^{(q)}$, so wird dieser Ausdruck gegenüber S die Einheitswurzel $\varepsilon^{-\nu}$ annehmen.

Bei dieser Sachlage besitzen wir in $z_\alpha z_\beta (\sqrt[]{\Delta})^{(q)} \cdot \varphi(\omega_1, \omega_2)$ eine *ganze* Form des Teilungspolygons, und zwar von der Dimension $-3\left[3 - \left(\frac{-1}{q}\right)\right]$. Auf diese Form bringen wir jetzt die in (9) § 1 gegebene Darstellung vermöge der Basis $[1, \wp_{0,\mu}, \ldots]$ in Anwendung, indem wir dabei μ aus der Zahlreihe $1, 2, \cdots, q-1$ beliebig auswählen. Es ergiebt sich die Darstellung:

$$(3) \qquad D_\wp z_\alpha z_\beta (\sqrt[]{\Delta})^{(q)} \cdot \varphi(\omega_1, \omega_2) = g_k + g_{k-2}\wp_{0\mu} + \cdots + g_{k-q^2+3}\wp_{0\mu}^{\frac{q^2-3}{2}},$$

wobei unter $-k$ die Gesamtdimension der linken Seite verstanden ist.

Die hier auftretenden ganzen Formen erster Stufe $g_k, g_{k-2}, \ldots$ denken wir nun durch g_2, g_3 dargestellt und wollen übrigens, was weiterhin sehr wichtig wird, statt $g_2, g_3, \wp_{0,\mu}$ die drei Formen:

$$(4) \qquad \mathfrak{g}_2 = 12 g_2, \quad \mathfrak{g}_3 = 216 g_3, \quad \mathfrak{p}_{0\mu} = 3(2 - \varepsilon^\mu - \varepsilon^{-\mu})\wp_{0\mu}$$

gebrauchen. *Es sind nämlich die Entwicklungscoefficienten in den Potenzreihen für $\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3$ nach r durchgehends ganze Zahlen, während die Entwicklungscoefficienten von $\mathfrak{p}_{0\mu}$ ganzzahlige Verbindungen der Potenzen von ε^μ sind.* Im letzteren Falle wolle man vor allem gleich noch anmerken, *dass die Potenzentwicklung von $\mathfrak{p}_{0\mu'}$ aus der von $\mathfrak{p}_{0\mu}$ einfach dadurch hergestellt wird, dass man ε^μ durch $\varepsilon^{\mu'}$ ersetzt;* es ist dies eine einfache Folge der p. 12 unter (3) gegebenen Formel. Unter Gebrauch der in (4) eingeführten Bezeichnungen schreiben wir jetzt die in (3) gelieferte Darstellung von $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ explicite in der Gestalt:

$$(5) \qquad \varphi(\omega_1, \omega_2) = \frac{(\sqrt[]{\Delta})^{-(q)}}{z_\alpha z_\beta D_\wp} \sum_{a, b} C_{a, b}\, \mathfrak{g}_2^{\,a}\, \mathfrak{g}_3^{\,b}\, \mathfrak{p}_{0\mu}^{\,c}.$$

Dabei bezieht sich die Summe auf alle ganzen, nicht negativen Zahlen a, b, c, welche der Bedingung genügen:

$$4a + 6b + 2c = k, \quad c < \frac{q^2-1}{2},$$

unter k die schon in (3) gebrauchte ganze Zahl verstanden.

Die hiermit gegebene Entwicklung kehre man nun um und frage, wann überhaupt die auf der rechten Seite von (5) stehende Verbindung eine Form erster Gattung q^{ter} Stufe darstellt. Hierzu ist einzig erforderlich, dass sie in den Spitzen c des Polygons wenigstens je in erster Ordnung verschwindet, und dass wir übrigens mit einer ganzen Form zu thun haben; die überdies noch zu fordernde Dimension -2 liegt in (5) unabhängig von den besonderen Zahlwerten $C_{a,b}$ stets vor. Da aber $D_{\wp}$ eine Potenz von Δ ist, während die z_α, z_β zufolge ihrer bekannten Productdarstellungen als transformierte ϑ-Nullwerte jedenfalls nur in den Spitzen c verschwinden können, so wird der Ausdruck (5), wie auch die $C_{a,b}$ gewählt sein mögen, im Innern des Polygons, d. i. abgesehen von den Punkten c, jedenfalls endlich sein. Wir haben also nur noch die Punkte c zu untersuchen und hier dürfen wir uns auf das Teilungspolygon beschränken, da sich der Ausdruck (5) gegenüber S nur um den Factor ε^ν ändert.

Das Teilungspolygon $F_{\frac{q^2-1}{2}}$ hat zweimal $\frac{q-1}{2}$ Punkte c, deren Lage wir uns am leichtesten vom Transformationspolygon F_{q+1} aus deutlich machen. Letzteres hat zwei Spitzen c und c', welche den Punkten $\omega = i\infty$ und $\omega = 0$ entsprechen. Indem wir alsdann auf diese Punkte die Substitution U des vorigen Paragraphen wiederholt ausüben, gewinnen wir die übrigen Punkte $c_1, c_1', c_2, c_2', \ldots, c_{\frac{q-3}{2}}, c'_{\frac{q-3}{2}}$ des Teilungspolygons. Die Werte von ω in diesen gesamten Punkten sind offenbar:

$$(6) \quad \omega = i\infty,\ T(i\infty),\ U(i\infty),\ UT(i\infty), \ldots, U^{\frac{q-3}{2}}(i\infty),\ U^{\frac{q-3}{2}}T(i\infty).$$

Um jetzt den Ausdruck (5) in einem einzelnen dieser Punkte c näher zu untersuchen, werfe man denselben in üblicher Weise vermöge der gerade in Betracht kommenden Substitution (6) nach $\omega = i\infty$, entwickele die rechte Seite von (5) nach Potenzen von r und verlange, dass diese Entwicklung mit einem von Null verschiedenen positiven Exponenten beginnt. Handelt es sich um einen der Punkte $c, c_1, c_2, \ldots, c_{\frac{q-3}{2}}$, so ist eine Substitution der Gestalt $\omega' \equiv \frac{a\omega}{a^{-1}}$ auszuüben, wobei man zur leichteren Ausführung dieser Substitution für den Augenblick wieder $\wp_{0\mu}$ an Stelle von $\mathfrak{p}_{0\mu}$ in (5) substituiert denke. Es gehen alsdann $z_\alpha, z_\beta, \wp_{0\mu}$ bez. über in $z_{a^2\alpha}, z_{a^2\beta}, \wp_{0,a^{-1}\mu}$, während die übrigen Bestandteile des Ausdrucks (5) unverändert bleiben. Setzen wir nun die Reihenentwicklungen ein, so haben wir die $C_{a,b}$ so zu bestimmen, dass eine gewisse Anzahl von Anfangsgliedern für die

Entwicklung der Summe $\sum\limits_{a,b}$ ausfällt, damit eine von dem Nenner in (5) etwa herrührende Potenz mit negativem Exponenten in richtiger Weise compensiert wird. Wir folgern aus der Natur der Entwicklungscoefficienten von $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$, $\wp_{0,\mu a^{-1}}$, sowie aus der Gestalt des von $\wp_{0\mu}$ zu $\mathfrak{p}_{0\mu}$ führenden Zusatzfactors leicht, *dass jeder Punkt c der Reihe $c, c_1, \ldots, c_{\frac{q-3}{2}}$ für die Zahlen $C_{a,b}$ eine gewisse Anzahl linearer homogener Bedingungen liefert, deren Coefficienten in die Gestalt ganzer ganzzahliger Functionen der q^{ten} Einheitswurzel ε^μ gebracht werden können.* Die einzelnen Punkte $c, c_1, \ldots$ liefern dabei ganz verschiedene Anzahlen solcher Relationen, da die z_α, z_β in diesen Punkten in verschiedener Art verschwinden.

Jetzt ist zweitens noch in den Punkten $c', c_1', c_2', \ldots$ das Verhalten des unter (5) gegebenen Ausdrucks $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ zu untersuchen, wobei wir wieder fordern müssen, dass in jedem dieser Punkte die Summe auf der rechten Seite von (5) wenigstens in einer um 1 höheren Ordnung verschwindet als $D_\wp z_\alpha z_\beta (\sqrt[12]{\Delta})^{(q)}$. Hier kommen denn für die in Rede stehende Summe neben $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ die Entwicklungsglieder von $\wp_{a^{-1}\mu,0}$ zur Geltung, und diese sind auschliesslich rationale Zahlen. Es ergeben sich also, damit wir in (5) eine Form erster Gattung haben, weitere lineare homogene Gleichungen für die $C_{a,b}$. Man bemerke hierbei wieder, dass in (4) der Übergang von $\wp_{0,\mu}$ zu $\mathfrak{p}_{0,\mu}$ durch Zusatz eines Factors bewerkstelligt wurde, der eine ganzzahlige ganze Function von ε^μ ist. Indem wir ja bei Ausübung von Modulsubstitutionen auf $\wp_{0,\mu}$ zurückgehen wollten, werden Potenzen jenes Zusatzfactors $3(2 - \varepsilon^\mu - \varepsilon^{-\mu})$ vortreten, die nun mit in die Coefficienten unserer neuen linearen Bedingungen für die $C_{a,b}$ übergehen. *Also auch hier sind die Coefficienten dieser linearen Gleichungen ganzzahlige ganze Functionen von ε^μ.* Übrigens bemerke man noch, dass der Ausdruck (8) in allen jetzt fraglichen Punkten c' das gleiche Verhalten zeigt; die Anfangsglieder der Summe im Ausdruck (5) müssen also für alle Punkte $c', c_1', \ldots$ bis zu gleicher Höhe verschwinden.

Wenn wir nun die $C_{a,b}$ den gesamten, jetzt gewonnenen Bedingungen gemäss wählen, so wird $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ sicher eine Form erster Gattung sein, *und wir gelangen so zugleich zur allgemeinsten Form erster Gattung q^{ter} Stufe, die gegenüber S den Factor ε^ν annimmt.* Die $C_{a,b}$ werden demnach noch λ bez. μ linear und homogen vorkommende Parameter aufweisen (die willkürlich bleiben), je nachdem ν quadratischer Rest oder Nichtrest von q ist. Durch λ bez. μ linear-unab-

hängige willkürliche Auswahlen jener Parameter werden wir dann ein System von λ bez. μ Integralen $j(\omega \mid \nu)$ gewinnen können. Dass wir in ähnlicher Weise auch $\varkappa$ Integrale des Teilungspolygons ableiten könnten, ist leicht evident; doch gehen wir hierauf nicht näher ein.

§ 5. Das Princip der ganzzahligen Entwicklungscoefficienten bei den Integralen $j(\omega \mid \alpha)$, $j(\omega \mid \beta)$.

Wenn auch die Herstellung der Integrale j nach der im vorigen Paragraphen beschriebenen Methode selbst schon in niederen Fällen q sehr umständlich ausfallen dürfte, so werden wir doch durch Fortsetzung der begonnenen Entwicklung zu einem in der Folge äusserst wichtigen Satze geführt. Es gilt nämlich das Folgende: *Das System der* $(\lambda + \mu) \cdot \frac{q-1}{2}$ *Integrale* $j(\omega \mid \alpha)$, $j(\omega \mid \beta)$ *lässt sich bei beliebigem* q *stets so wählen, dass die Entwicklung jedes einzelnen dieser Integrale nach Potenzen von* r *durchgehends nur* ***ganzzahlige*** *Coefficienten aufweist.* Um dies zu zeigen, nehmen wir etwa an, ν sei ein Rest α; für die Nichtreste β ist die Entwicklung genau so. Unsere Überlegung besteht dann aus folgenden Schritten:

Die Coefficienten $C_{a,b}$ des vorigen Paragraphen berechnen sich aus den gewonnenen linearen Relationen bis auf λ unter ihnen, welche willkürlich bleiben. Der grösseren Gleichmässigkeit halber schreiben wir die letzteren $e_1, e_2, \ldots, e_\lambda$; in ihnen stellen sich dann alle $C_{a,b}$ linear und homogen dar mit Coefficienten, *die ganze ganzzahlige Functionen der* q^{ten} *Einheitswurzel* ε^μ *sind.* Wählten wir aber statt des anfänglichen $\wp_{0,\mu}$ den Teilwert $\wp_{0,\mu'}$, so erscheinen die Verhältnisse nur insofern geändert, dass in den eben gemeinten ganzen ganzzahligen Functionen ε^μ durch $\varepsilon^{\mu'}$ ersetzt worden ist. Man kann dies aus der Natur der Potenzentwicklungen für die $\wp$-Teilwerte (cf. p. 12), sowie andrerseits aus dem Entwicklungsgange des vorigen Paragraphen ohne besondere Mühe beweisen.

Wir entwickeln jetzt φ selbst nach Potenzen von r, und hier liegt aller Nachdruck auf dem, was wir schon vorhin über die Entwicklungscoefficienten von $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{p}_{0\mu}$ sagten. Andrerseits bemerke man, dass z_α, z_β und Δ lauter *ganzzahlige* Entwicklungscoefficienten aufweisen, wobei insbesondere als Anfangscoefficient stets 1 auftritt; es folgt daraus, dass auch die reciproken Werte z_α^{-1}, z_β^{-1}, Δ^{-1}, nach r entwickelt, ausschliesslich ganzzahlige Coefficienten aufweisen werden. Indem wir zusammenfassen und nun die eben schon eingeführte Benennung $e_1, \ldots, e_\lambda$ für die unbestimmt bleibenden $C_{a,b}$ brauchen, kommt für

das allgemeinste zum quadratischen Reste $\nu = \alpha$ gehörende $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ die Potenzentwicklung:

$$(1) \qquad \varphi(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{\alpha}{q}} [e_1 \mathfrak{P}_1(r \mid \varepsilon^\mu) + \cdots + e_\lambda \mathfrak{P}_\lambda(r \mid \varepsilon^\mu)];$$

dabei bedeutet $\mathfrak{P}_k(r \mid \varepsilon^\mu)$ eine Entwicklung nach ganzen positiven Potenzen von r, deren Coefficienten ganze ganzzahlige Functionen von ε^μ sind. Als die λ zu $\nu = \alpha$ gehörenden Formen φ können wir somit diese:

$$(2) \qquad \varphi_k(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{\alpha}{q}} \mathfrak{P}_k(r \mid \varepsilon^\mu), \quad k = 1, 2, \ldots, \lambda$$

auswählen, Entwicklungen, die übrigens innerhalb der ganzen positiven ω-Halbebene convergent sind.

Jetzt aber denke man sich in der anfänglichen Entwicklung $\wp_{0,\mu'}$ an Stelle von $\wp_{0,\mu}$ gewählt, wobei natürlich auch in den $C_{a,b}$ an Stelle von ε^μ die Wurzel $\varepsilon^{\mu'}$ treten wird. Wir erhalten dann alle zu $\nu = \alpha$ gehörenden φ genau wieder in der Gestalt (1), nur dass ε^μ durch $\varepsilon^{\mu'}$ ersetzt ist; dabei wird übrigens keineswegs ein und dasselbe System $e_1, \ldots, e_\lambda$ beide Male die gleiche Form φ darstellen. Man ordne nun die einzelnen Coefficienten in $\mathfrak{P}_k(r \mid \varepsilon^\mu)$ nach Potenzen von ε^μ an und spalte daraufhin $\mathfrak{P}_k(r \mid \varepsilon^\mu)$ in die Summe:

$$\mathfrak{P}_k(r \mid \varepsilon^\mu) = \mathfrak{P}_{k,0}(r) + \varepsilon^\mu \mathfrak{P}_{k,1}(r) + \cdots + \varepsilon^{\mu(q-1)} \mathfrak{P}_{k,q-1}(r),$$

wo alsdann die einzelne dieser q Entwicklungen $\mathfrak{P}_{k,i}(r)$ durchgängig *ganzzahlige* Entwicklungscoefficienten aufweisen wird. Die rechte Seite von (2) stellte für alle Zahlen $\mu = 1, 2, \cdots, q-1$ eine Form erster Gattung dar; eine Form erster Gattung haben wir also insbesondere auch in:

$$(3) \qquad \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{\alpha}{q}} \mathfrak{P}'_{k,i}(r) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{\alpha}{q}} \sum_{\mu=1}^{q-1} \varepsilon^{-\mu i} \mathfrak{P}_k(r \mid \varepsilon^\mu),$$

und hier hat die Entwicklung $\mathfrak{P}'_{k,i}$, da sie sich folgendermassen schreibt:

$$\mathfrak{P}'_{k,i}(r) = q\,\mathfrak{P}_{k,i}(r) - \sum_{l=0}^{q-1} \mathfrak{P}_{k,l}(r),$$

offenbar selbst wieder lauter ganzzahlige Coefficienten. Durch Inversion der q für $i = 0, 1, \cdots, q-1$ zu bildenden Gleichungen:

$$\mathfrak{P}'_{k,i} = \varepsilon^{-i} \mathfrak{P}_k(r \mid \varepsilon) + \varepsilon^{-2i} \mathfrak{P}_k(r \mid \varepsilon^2) + \cdots + \varepsilon^{-(q-1)i} \mathfrak{P}_k(r \mid \varepsilon^{q-1})$$

lässt sich aber $\mathfrak{P}_k(r \mid \varepsilon^\mu)$ selbst wieder in der Gestalt:

$$\mathfrak{P}_k(r \mid \varepsilon^\mu) = \sum_{i=0}^{q-1} \varepsilon^{\mu i} \mathfrak{P}'_{k,i}(r)$$

darstellen, so dass wir die anfänglich ausgewählten λ Formen (2) durch die λq Formen:

$$(4) \qquad \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{\alpha}{q}} \mathfrak{P}'_{k,i}(r), \quad k = 1, 2, \cdots, \lambda; \quad i = 0, 1, \cdots, q-1$$

ausdrücken können. Unter den letzteren Formen werden somit λ linear-unabhängige enthalten sein; ein solches System denken wir jetzt in $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(\lambda)}$ ausgewählt, setzen weiter:

$$(5) \qquad \varphi^{(k)}(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{\alpha}{q}} \mathfrak{P}^{(k)}(r)$$

und haben den Satz, *dass die Entwicklungscoefficienten dieser λ linear-unabhängigen Formen erster Gattung lauter ganze Zahlen sind.* Hiermit ist unsere obige Behauptung zu einem ersten Teile thatsächlich bewiesen.

Aber indem wir jetzt des ausführlicheren $\varphi^{(k)}(\omega_1, \omega_2 \mid \alpha)$ schreiben, ist weiter zu zeigen, dass auch die durch irgend eine Potenz der in (13) p. 565 gewählten Modulsubstitution U aus $\varphi^{(k)}(\omega_1, \omega_2 \mid \alpha)$ entspringende Form $\varphi^{(k)}(\omega_1, \omega_2 \mid \alpha')$ stets ganzzahlige Entwicklungscoefficienten aufweist. Zu diesem Ende brauchen wir nur noch einmal auf die gegebene Herleitung der Formen (5) zurückzugreifen, indem wir insbesondere die Formel aufschreiben:

$$(6) \qquad \varphi(\omega_1, \omega_2 \mid \alpha) = \frac{\sum\limits_{a,b} \left[\mathfrak{g}_2^{\,a} \mathfrak{g}_3^{\,b} \sum\limits_{\mu=1}^{q-1} G_{a,b}(\varepsilon^\mu)\, \mathfrak{p}_{0,\mu}^{c} \right]}{z_\alpha z_\beta D_\wp \cdot (\sqrt{\Delta})^{(q)}},$$

welche die obige Formel (3) mit (5) § 4 zusammenfasst; hierbei ist $G_{a,b}(\varepsilon^\mu)$ eine ganze ganzzahlige Function des zugefügten Argumentes, wie aus der früheren Entwicklung ohne weiteres folgt. Übt man nun die Substitution $\omega' \equiv \frac{\varkappa\omega}{\varkappa^{-1}}$ aus, so kann man durch leichte Umsetzung:

$$(7) \qquad \sum_{\mu=1}^{q-1} G_{a,b}(\varepsilon^\mu)\, \mathfrak{p}_{0,\mu\varkappa^{-1}}^{c} = \sum_{\mu=1}^{q-1} H_{a,b}(\varepsilon^\mu)\, \mathfrak{p}_{0,\mu}^{c}$$

machen, und dabei ist $H_{a,b}(\varepsilon^\mu)$ diejenige ganzzahlige Function von ε^μ, welche aus $G_{a,b}(\varepsilon^\mu)$ bei Ersatz von ε^μ durch $\varepsilon^{\mu\varkappa^{-1}}$ hervorgeht. Da aber rechter Hand in (7) wieder die Summe über $\mu = 1, \cdots, q-1$ zu nehmen ist, so wird die Potenzentwicklung dieser Summe nach r offenbar wieder ganzzahlige Coefficienten aufweisen. *Also hat endlich auch:*

$$(8)\qquad \varphi(\omega_1, \omega_2 \,|\, \varkappa^2 \alpha) = \frac{\sum\limits_{a,b}\left[\mathfrak{g}_2{}^a \mathfrak{g}_3{}^b \sum\limits_{\mu=1}^{q-1} H_{a,b}(\varepsilon^\mu)\,\mathfrak{p}_{0,\mu}^c\right]}{z_{\varkappa^2\alpha} z_{\varkappa^2\beta} D_\wp \cdot (\sqrt[4]{\Delta})^{(q)}}$$

durchgehends ganzzahlige Entwicklungscoefficienten.

Hiermit ist nun unsere obige Behauptung im vollen Umfange eingelöst, wenn man noch bemerken will, dass für die Integrale $j(\omega \,|\, \beta)$ mit Nichtresten β bez. für die entsprechenden Formen erster Gattung offenbar ein ganz analoger Beweisgang eingeschlagen werden kann.

Natürlich können auch die Integrale $j(\omega)$ des Teilungspolygons so ausgewählt werden, dass lauter ganzzahlige Entwicklungscoefficienten auftreten. Der Beweis ist hier sogar noch kürzer, da für die Darstellung der betreffenden Formen φ die Basis des Teilungspolygons ohne weiteres in Anwendung gebracht werden kann. Wir brauchen aber in der Folge diese Eigenschaft der Ganzzahligkeit bei den fraglichen Integralen des Teilungspolygons nicht in Anwendung zu bringen und gehen hier also auf keine Einzelheiten ein.

§ 6. Einführung der Entwicklungsfunctionen $\psi(m)$ und $\chi(m)$. Minimalbasen von Integralen $j(\omega \,|\, \alpha)$, $j(\omega \,|\, \beta)$.*)

Von den $(\lambda + \mu) \cdot \frac{q-1}{2}$ Formen erster Gattung φ, die wir im vorigen Paragraphen auswählten, gehen wir jetzt durch Integration zu den Integralen selbst zurück, und zwar schreiben wir dabei:

$$(1)\qquad 2i\pi q\, j(\omega) = \int \varphi\, d\varpi.$$

Für die Entwicklungen der $j(\omega \,|\, \alpha)$ und $j(\omega \,|\, \beta)$ nach Potenzen von r benutzen wir alsdann die nachfolgende Bezeichnungsweise:

$$(2)\qquad \begin{cases} j_i(\omega \,|\, \alpha) = \sum \frac{\psi_i(m)}{m} r^{\frac{m}{q}}, & m \equiv \alpha \pmod{q}, \\ j_k(\omega \,|\, \beta) = \sum \frac{\chi_k(m)}{m} r^{\frac{m}{q}}, & m \equiv \beta \pmod{q}, \end{cases}$$

wobei m jedesmal alle ganzen positiven, der hinzugesetzten Congruenz genügenden Zahlen zu durchlaufen hat; der Index i bezieht sich dabei auf die Zahlen $1, 2, \ldots, \lambda$ und entsprechend k auf $1, 2, \ldots, \mu$.

Zufolge der Festsetzung (1) und der Entwicklungen des vorigen Paragraphen sind die $\psi_i(m)$ ganze Zahlen, und wir haben, wie man

*) Vergl. hierzu die Note von Hurwitz: *„Über die Classenzahlrelationen und Modularcorrespondenzen primzahliger Stufe"*, Leipz. Berichte vom 4. Mai 1885.

sieht, die Entwicklungscoefficienten der $\frac{q-1}{2}$ Integrale $j_i(\omega \mid \alpha)$, $j_i(\omega \mid \alpha'), \ldots$ mit dem gleichen i durch das gemeinsame Symbol $\psi_i(m)$ zusammengefasst. *Für alle positiven quadratischen Reste m von q haben wir damit λ zahlentheoretische Functionen $\psi_1(m)$, $\psi_2(m), \ldots, \psi_\lambda(m)$ definiert, die für alle genannten Werte m ganzzahlige Werte bekommen.* Ganz Entsprechendes gilt bei den Integralen $j(\omega \mid \beta)$. Hier haben wir wieder die Coefficienten der $\frac{q-1}{2}$ Integrale $j_k(\omega \mid \beta), j_k(\omega \mid \beta'), \ldots$ mit dem gleichen Index k in eins zusammengefasst und haben so μ *zahlentheoretische Functionen $\chi_1(m), \ldots, \chi_\mu(m)$, die für alle quadratischen Nichtreste $m > 0$ definiert sind, und die für alle diese Argumente durchgängig ganzzahlige Werte haben.*

Man schreibe jetzt:

$$j_i'(\omega \mid \alpha) = \sum_{k=1}^{\lambda} e_{ik} j_k(\omega \mid \alpha), \tag{3}$$

indem man unter den e_{ik} λ^2 ganze Zahlen einer von Null verschiedenen Determinante versteht. Die neuen Integrale $j_i'(\omega \mid \alpha)$ werden dann alle bisher namhaft gemachten Eigenschaften der ursprünglichen teilen. Indem wir aber, einem früheren Brauche folgend, das System $j_1(\omega \mid \alpha), \ldots, j_\lambda(\omega \mid \alpha)$ als eine *Basis* bezeichnen, fragt es sich, ob *jedes* System von Integralen $j_1'(\omega \mid \alpha), \ldots, j_\lambda'(\omega \mid \alpha)$, welches alle bis jetzt aufgezählten Eigenschaften und also insbesondere *ganzzahlige* Entwicklungsfunctionen $\psi_i'(m)$ aufweist, durch unsere Basis in der Gestalt (3) vermöge *ganzer* Zahlen e_{ik} darstellbar ist.

Hierüber entscheiden wir vermöge der bei solcher Gelegenheit stets eintretenden Überlegung und weisen zu diesem Zwecke der Basis

$$[j_1(\omega \mid \alpha), j_2(\omega \mid \alpha), \ldots, j_\lambda(\omega \mid \alpha)] \tag{4}$$

zuvörderst eine gewisse Discriminante zu. Man verstehe nämlich unter $1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ der Reihe nach alle positiven quadratischen Reste von q und bilde die Matrix mit unendlich vielen Verticalreihen:

$$\left| \begin{matrix} \psi_1(1), & \psi_1(\alpha_1), & \psi_1(\alpha_2), & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_\lambda(1), & \psi_\lambda(\alpha_1), & \psi_\lambda(\alpha_2), & \ldots \end{matrix} \right|. \tag{5}$$

Nach den Elementen der Determinantentheorie ist leicht evident, dass jedenfalls nicht alle unendlich vielen λ-gliedrigen Unterdeterminanten der Matrix (5) verschwinden können; in diesem Falle wären nämlich die Integrale der Basis (4) von einander linear-abhängig. *Den grössten gemeinsamen Teiler aller λ-gliedrigen Unterdeterminanten der Matrix* (5)

benennen wir nun als Discriminante der Basis (4) *und bezeichnen sie für den Augenblick durch* D_ψ.

Es ist nun jedenfalls D_ψ eine von Null verschiedene ganze Zahl, die wir als positiv annehmen können. Man setze dann den Fall, es sei $D_\psi > 1$, und benenne mit p einen von 1 verschiedenen Primteiler von D_ψ. Man wird annehmen dürfen, dass die Elemente der ersten Horizontalreihe in (5) nicht sämtlich durch p teilbar sind; man würde sonst $j_1(\omega \mid \alpha)$ durch $p^{-1}j_1(\omega \mid \alpha)$ ersetzen können. Andrerseits aber sind alle λ-gliedrigen Unterdeterminanten von (5) durch p teilbar; denn p teilt die Discriminante D_ψ. Indem man $1 \leq \nu < \lambda$ nimmt, setze man, es seien bereits alle $(\nu + 1)$-gliedrigen Unterdeterminanten der Matrix:

$$(6) \qquad \left|\begin{array}{llll} \psi_1(1), & \psi_1(\alpha_1), & \psi_1(\alpha_2), & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_{\nu+1}(1), & \psi_{\nu+1}(\alpha_1), & \psi_{\nu+1}(\alpha_2), & \ldots \end{array}\right|$$

durch p teilbar, während sich doch eine ν-gliedrige Determinante, aus den ν ersten Reihen (5) entnommen, vorfinden mag, die prim gegen p ist. Die letztere Determinante mag die Verticalreihen mit den Argumenten $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_\nu}$ aufweisen; nach den voraufgehenden Sätzen ist übrigens ν wenigstens gleich 1 und höchstens gleich $(\lambda - 1)$, wie wir schon angaben.

Man bilde jetzt endlich die Matrix:

$$(7) \qquad \left|\begin{array}{llll} \psi_1(\alpha_{i_1}), & \psi_1(\alpha_{i_2}), & \ldots, & \psi_1(\alpha_{i_\nu}) \\ \psi_2(\alpha_{i_1}), & \psi_2(\alpha_{i_2}), & \ldots, & \psi_2(\alpha_{i_\nu}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_{\nu+1}(\alpha_{i_1}), & \psi_{\nu+1}(\alpha_{i_2}) & \ldots, & \psi_{\nu+1}(\alpha_{i_\nu}) \end{array}\right|$$

und benenne die ν-gliedrigen Unterdeterminanten derselben, immer abwechselnd mit positivem und negativem Zeichen versehen, durch $e_1, e_2, \ldots, e_{\nu+1}$; dabei soll e_l aus (7) durch Auslassung der l^{ten} Horizontalreihe hervorgehen. *Hier ist denn nach dem, was voraufgeht,* $e_{\nu+1}$ *sicher eine gegen* p *prime ganze Zahl.*

Da zufolge unserer Annahme alle $(\nu + 1)$-gliedrigen Unterdeterminanten von (6) durch p teilbar sind, so wird, wie man leicht überblickt, für alle positiven quadratischen Reste m von q die Congruenz bestehen:

$$(8) \qquad e_1 \psi_1(m) + e_2 \psi_2(m) + \cdots + e_{\nu+1} \psi_{\nu+1}(m) \equiv 0, \pmod{p}.$$

Weil hier nun $e_{\nu+1}$ prim gegen p ist, so können wir eine ganze Zahl e_0 finden, welche die Congruenz $e_0 e_{\nu+1} \equiv 1 \pmod{p}$ befriedigt. Schreibt man alsdann endlich $e_0 e_i = e_i'$, so ergiebt sich die Congruenz:

(9) $e_1'\psi_1(m) + e_2'\psi_2(m) + \cdots + e_\nu'\psi_\nu(m) + \psi_{\nu+1}(m) \equiv 0 \pmod{p}$

für *alle* positiven Reste m von q. Also wird auch noch das Integral:

$$j'_{\nu+1}(\omega \mid \alpha) = \frac{e_1' j_1(\omega \mid \alpha) + \cdots + e_\nu' j_\nu(\omega \mid \alpha) + j_{\nu+1}(\omega \mid \alpha)}{p}$$

eine für alle m *ganzzahlige* Entwicklungsfunction $\psi'_{\nu+1}$ aufweisen. Indem wir aber $j'_{\nu+1}$ an Stelle von $j_{\nu+1}$ in unsere Basis (4) einführen, wird die so geänderte Basis die Discriminante $D_\psi : p$ besitzen. *Durch wiederholte Anwendung dieses Schlussverfahrens wird man schliesslich zu einer Basis* (4) *von der Discriminante* 1, *d. i. zu einer Minimalbasis gelangen können.*

Liegt eine Minimalbasis von Integralen $j(\omega \mid \alpha)$ vor, so können wir offenbar stets eine endliche Reihe von Null verschiedener λ-gliedriger Unterdeterminanten der Matrix (5) auswählen, die einen gemeinsamen Teiler > 1 nicht mehr aufweisen. Man halte diesen Satz für eine spätere Anwendung fest.

Die Minimalbasis (4) ist jetzt insoweit bestimmt, *dass wir nur noch eine Substitution* (3) *mit ganzzahligen* e_{ik} *der Determinante eins*, $|e_{ik}| = 1$, *ausüben dürfen.* Indessen sehen wir davon ab, hier noch eine besondere Auswahl zu treffen.

Dass übrigens im Falle der Integrale $j(\omega \mid \beta)$ völlig analoge Entwicklungen gelten, brauchen wir kaum noch hinzuzusetzen.

§ 7. Arithmetische Definition der $\psi_i(m)$ bei $q = 7$ und $q = 11$. Das allgemeine binäre Entwicklungsprincip.

Im Bisherigen haben wir auf functionentheoretischem Wege für die Primzahlstufe q gewisse $(\lambda + \mu)$ Entwicklungsfunctionen $\psi_i(\alpha)$, $\chi_k(\beta)$ als existierend erkannt. Wir werden jetzt der Frage näher treten, ob es möglich ist, diese zahlentheoretischen Functionen $\psi_i(\alpha)$, $\chi_k(\beta)$ auch in einer directen und also *arithmetischen* Art zu definieren. Hier geben uns nun in der That die Entwicklungen im Kap. 3 des vorigen Abschnittes eine Reihe allgemeiner Ansätze. Aber wir werden vermöge derselben doch nur für die niedersten Stufenzahlen die $(\lambda + \mu)$ arithmetischen Functionen ψ_i, χ_k erschöpfend erklären können, während bei den höheren Stufen die genannten Ansätze des vorigen Abschnitts ohne weiteres nicht ausreichen.

Indem wir einen inductiven Weg gehen, handeln wir zuvörderst von der *siebenten* Stufe, wo wir auf sehr bekannte Verhältnisse zurückkommen. Integrale des Teilungspolygons existieren hier noch nicht, da letzteres für $q = 7$ das Geschlecht Null hat; vielmehr kommen hier nach p. 393 nur die drei Integrale $j_1(\omega \mid 1)$, $j_1(\omega \mid 2)$, $j_1(\omega \mid 4)$ in

Betracht. Wir haben also nur *eine* zahlentheoretische Function $\psi_1(m)$, wobei wir den unteren Index 1 beibehalten, um Verwechslungen mit dem Symbol $\psi(m)$ im sonst gebräuchlichen Sinne von I p. 460 Formel (2) zu meiden.

Wenn wir uns direct an die Bezeichnungen von p. 393 anschliessen sollen, so werden wir die fraglichen drei Integrale $j(\omega \mid \alpha)$ in der Gestalt geben:

$$(1) \qquad 14 i\pi\, j(\omega \mid \alpha) = \int z_{2\alpha}\, d\varpi.$$

Als Anfangsterme der Reihenentwicklungen haben wir dann:

$$(2) \qquad \begin{cases} j(\omega \mid 1) = r^{\frac{1}{7}} - \frac{3}{8} r^{\frac{8}{7}} + * + \frac{4}{22} r^{\frac{22}{7}} + \cdots, \\ j(\omega \mid 2) = \frac{1}{2} r^{\frac{2}{7}} - \frac{3}{9} r^{\frac{9}{7}} - \frac{1}{16} r^{\frac{16}{7}} + \frac{8}{23} r^{\frac{23}{7}} + \cdots, \\ j(\omega \mid 4) = -\frac{1}{4} r^{\frac{4}{7}} + \frac{4}{11} r^{\frac{11}{7}} - \frac{3}{18} r^{\frac{18}{7}} - \frac{5}{25} r^{\frac{25}{7}} + \cdots. \end{cases}$$

Natürlich handelt es sich hier um eine Minimalbasis; denn die Matrix (5) § 6 wird für den gegenwärtigen Fall nur eine Horizontalreihe aufweisen und, wie man aus (2) sieht, wird $\psi_1(m)$ z. B. für $m = 1$ oder 2 direct gleich 1.

Hier wird nun unsere Aufgabe sein, das *allgemeine arithmetische Bildungsgesetz von* $\psi_1(m)$ aufzudecken, und zu diesem Ende müssen wir auf die Formel (2) p. 393 zurückgehen. Indem wir in dieselbe:

$$\xi = \frac{x - 7y}{2}, \quad \eta = y$$

substituieren, kommt nach leichter Zwischenrechnung:

$$(3) \qquad z_\alpha = \frac{1}{2} \sum x\, r^{\frac{x^2 + 7y^2}{28}}, \quad \begin{matrix} x \equiv y \pmod{2} \\ x \equiv 4\alpha^2 \pmod{7}. \end{matrix}$$

Ordnen wir jetzt nach ansteigenden Potenzen von r um und schreiben in gewohnter Weise:

$$(4) \qquad j(\omega \mid \alpha) = \sum \frac{\psi_1(m)}{m}\, r^{\frac{m}{7}}, \quad m \equiv \alpha \pmod{7},$$

so ergiebt eine kurze Zwischenbetrachtung die folgende einfache Definition der zahlentheoretischen Function $\psi_1(m)$: *Es ist* $\psi_1(m)$ *gegeben durch die Summe:*

$$(5) \qquad \psi_1(m) = \frac{1}{4} \sum \left(\frac{x}{7}\right) x,$$

bezogen auf alle Darstellungen von $4m$ *durch die ganzzahlige binäre quadratische Form:*

$$(6) \qquad 4m = x^2 + 7y^2.$$

Weitere Bedingungen treten hier nicht hinzu; denn die erste Congruenz (3) ist bei (6), wie man sieht, ohne weiteres erfüllt. Von der

anderen Congruenz (3), nämlich $x \equiv 4\alpha^2$ (mod. 7), aber haben wir abgesehen, nehmen vielmehr in (6) neben $x \equiv +4\alpha^2$ immer auch $x \equiv -4\alpha^2$; dies ist dann in (5) durch Aufnahme des Legendre'schen Zeichens $\left(\frac{x}{7}\right)$ und durch Zusatz des Factors $\frac{1}{2}$ (gegenüber (3)) compensiert. — Hiermit ist die siebente Stufe bereits erledigt*).

Das Geschlecht der Hauptcongruenzgruppe *elfter* Stufe war 26, und das Teilungspolygon dieser Stufe hat $p = 1$; *hier also haben wir fünf Functionen* $\psi_i(\alpha)$, $\chi_k(\beta)$. Aber der eben bei $n = 7$ benutzte Ansatz (4) p. 563 liefert uns nur erst eine einzige dieser Functionen: Es gehört nämlich unter den drei zu $q = 11$ gehörenden z_α-Systemen nur das in (1) p. 403 gegebene im absoluten Sinne zur elften Stufe; wir gewinnen also auf dem bezeichneten Wege nur erst *eine* Reihe von fünf Integralen $j_1(\omega \mid 1)$, $j_1(\omega \mid 3), \ldots, j_1(\omega \mid 4)$, während die übrigen vier Reihen noch unbekannt bleiben. Indem wir die Betrachtung der 21 übrigen Integrale auf den folgenden Paragraphen verschieben, machen wir hier nur erst folgende Angaben: Das Bildungsgesetz der fraglichen fünf Integrale

$$(7) \qquad j_1(\omega \mid \alpha) = \sum \frac{\psi_1(m)}{m} r^{\frac{m}{11}}, \quad m \equiv \alpha \text{ (mod. 11)},$$

ist demjenigen der drei Integrale 7ter Stufe (4) genau analog. Ohne die Rechnung noch einmal aufführlich abzuleiten, geben wir gleich an: *Es ist für* $q = 11$:

$$(8) \qquad \psi_1(m) = \tfrac{1}{4} \sum \left(\frac{x}{11}\right) x,$$

summiert über alle Darstellungen von $4m$ *durch die ganzzahlige binäre quadratische Form:*

$$(9) \qquad 4m = x^2 + 11y^2$$

vermöge ganzer positiver oder negativer Zahlen x, y **).

Die in den beiden Fällen $q = 7, 11$ damit erhaltenen Resultate können wir sogleich für beliebige Stufenzahlen q der Gestalt $(4h + 3)$ verallgemeinern. Indem wir z. B. an die unter (3) p. 355 gegebenen Systeme der $z_\alpha^{(1)}$ anknüpfen, werden wir für die Primzahlstufe q gleich eine Reihe zahlentheoretischer Functionen ψ, χ in der Gestalt $\sum \left(\frac{\xi}{q}\right) \xi$ gewinnen, summiert über alle Darstellungen von m in der Gestalt

*) Siehe übrigens wegen $q = 7$ die Arbeit von Hurwitz: „*Über Relationen zwischen Classenanzahlen binärer quadratischer Formen u. s. w.*" Math. Ann. Bd. 25 p. 183 ff. (1884).

**) Vergl. die Note von Hurwitz „*Über Relationen u. s. w.*" in den Leipziger Berichten vom 15. December 1884.

$m = f(\xi, \eta)$, wo $f(\xi, \eta)$ eine ganzzahlige binäre quadratische Form der Determinante $-q$ ist. Die Anzahl der auf diesem Wege für die q^{te} Stufe zu gewinnenden Functionen $\psi_i(m)$, $\chi_k(m)$ ist nach früheren Sätzen gleich der Anzahl ambiger Classen der Determinante $D = -q$ vermehrt um die halbe Anzahl der übrigen Formclassen dieser Determinante. Hierbei ist übrigens, wie auch früher, die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass einige dieser Formclassen durch identisches Verschwinden der zugehörigen Functionen ψ, χ ausfallen, oder dass zwei verschiedene Formclassen das nämliche ψ bez. χ liefern. Die einzelne Formclasse liefert natürlich ein ψ oder χ, je nachdem im Sinne der Einteilung der Formen in Geschlechter jene Classe bezüglich q den Charakter $+1$ oder -1 bekommt.

Indem hier dem Bildungsgesetz der zahlentheoretischen Functionen jedesmal eine *binäre* quadratische Form zu Grunde liegt, wollen wir von einem *binären Entwicklungsprincip* der Integrale erster Gattung sprechen. Offenbar führt der Ansatz:

$$j = \int z_\alpha d\varpi$$

stets zu diesem Bildungsgesetz, mögen wir eine Primzahlstufe haben oder eine zusammengesetzte. Wir führen gleich an, dass das binäre Entwicklungsprincip ausser bei $q = 7$ auch noch für die Stufen 6 und 8 zu den gesamten Integralen erster Gattung führt, worüber wir weiter unten noch kurz Bericht erstatten. Höher hinauf aber gewinnen wir aus dem binären Princip die Integrale j immer nur erst teilweise, wie wir eben bereits bei $q = 11$ kennen lernten. Wir werden jetzt nachsehen, welches das Bildungsgesetz für die rückständigen Integrale elfter Stufe ist.

§ 8. Die rückständigen Entwicklungsfunctionen ψ_i, χ_k der elften Stufe. Das allgemeine quaternäre Entwicklungsprincip.

Neben dem im vorigen Paragraphen benutzten Ansatze zur Bildung von Integralen j hatten wir in § 2 unter (5) noch einen zweiten Ansatz in Vorschlag gebracht, der sich auf die Integration quadratischer Verbindungen von ganzen Modulformen erster Stufe gründete. Hier bei $q = 11$ können wir zu diesem Ende das aus (7) p. 332 entspringende Modulsystem der

$$\mathsf{A}_\alpha = \frac{2\pi}{\omega_2} \sum (-1)^{\frac{\xi+\eta}{2}} r^{\frac{\xi^2+11\eta^2}{264}} \tag{1}$$

brauchen, wobei wir als Summationsbedingungen die nachfolgenden anzumerken haben:

$$(2)\qquad \xi \equiv 5\alpha \pmod{11},\quad \xi \equiv \eta \equiv \pm 1 \pmod{6}.$$

Diese sechs Moduln $A_0, A_1, A_3, \ldots$ werden freilich erst durch Multiplication mit $\sqrt{\Delta}$ zu Moduln *elfter* Stufe normiert; aber man sieht, dass die quadratischen Verbindungen $A_\alpha A_{\alpha'}$, auf die allein es hier ankommt, ohne weiteres absolut zur elften Stufe gehören. Zum Zwecke der weiterhin folgenden Rechnungen schreiben wir hier gleich einige Anfangsglieder der nach ansteigenden Potenzen von r angeordneten Reihen auf:

$$(3)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2} A_0 = \frac{2\pi}{\omega_2} r^{\frac{1}{2}} \left(1 - r - r^2 + r^5 + r^7 + \cdots\right), \\ A_1 = \frac{2\pi}{\omega_2} r^{\frac{1}{22}} \left(1 - r + * - r^3 + \cdots\right), \\ A_3 = \frac{2\pi}{\omega_2} r^{\frac{9}{22}} \left(* - r + 2r^2 + * \cdots\right), \\ A_9 = \frac{2\pi}{\omega_2} r^{\frac{15}{22}} \left(1 - r - r^2 - r^3 + \cdots\right), \\ A_5 = \frac{2\pi}{\omega_2} r^{\frac{3}{22}} \left(-1 + * + 2r^2 + r^3 + \cdots\right), \\ A_4 = \frac{2\pi}{\omega_2} r^{\frac{5}{22}} \left(-1 + r + r^2 - r^3 + \cdots\right). \end{cases}$$

Unsere sechs Moduln A_α liefern 21 quadratische Verbindungen $A_\alpha A_\alpha$, und indem aus den weiter folgenden Entwicklungen leicht hervorgehen wird, dass diese 21 Verbindungen von einander linear-unabhängig sind, *finden wir alle* 21 *noch fehlenden Integrale elfter Stufe in der Gestalt:*

$$(4)\qquad \int A_\alpha A_{\alpha'}\, d\varpi.$$

Unter den damit gewonnenen 21 Integralen steht zunächst dasjenige des Teilungspolygons, nämlich:

$$(5)\qquad 88 i\pi j(\omega \mid 0) = \int A_0^2\, d\varpi,$$

für sich. Es lässt sich dieses Integral auch als das elliptische Integral des Transformationspolygons auffassen, und in dieser Eigenschaft hatten wir es bereits oben (p. 435) zu benutzen gehabt. Natürlich ist es eines unter zwölf gleichberechtigten Integralen, welch' letztere wir sämtlich aus den 21 Integralen (4) zusammensetzen können.

Indem man nur die Anfangsterme in (3) zu Paaren mit einander multipliciert, wird evident, dass die 20 noch fehlenden Integrale zur Hälfte Integrale $j(\omega \mid \alpha)$ sind, zur andern Hälfte Integrale $j(\omega \mid \beta)$. Da aber die Integrale (7) des vorigen Paragraphen zu den $j(\omega \mid \alpha)$ gehörten, *so haben wir für* $q = 11$ *drei zahlentheoretische Functionen* $\psi_i(m)$ *und zwei Functionen* $\chi_k(m)$.

Wir wenden uns nun zuvörderst zur Betrachtung der beiden Functionen ψ_2 und ψ_3 und haben zu diesem Zwecke zu schreiben:

$$(6)\qquad \begin{cases} 22 i\pi\, j_2(\omega \mid \alpha) = \int \mathsf{A}_{\alpha'}^2\, d\varpi, \\ 22 i\pi\, j_3(\omega \mid \alpha) = \int \mathsf{A}_{3\alpha'} \mathsf{A}_{9\alpha'}\, d\varpi, \end{cases}$$

während wir natürlich andrerseits für diese beiden Reihen zu je fünf Integralen die Bezeichnungen:

$$(7)\qquad \begin{cases} j_2(\omega \mid \alpha) = \sum \frac{\psi_2(m)}{m} r^{\frac{m}{11}}, \quad m \equiv \alpha \pmod{11}, \\ j_3(\omega \mid \alpha) = \sum \frac{\psi_3(m)}{m} r^{\frac{m}{11}}, \quad m \equiv \alpha \pmod{11}, \end{cases}$$

beibehalten.

Zur arithmetischen Definition unserer neuen zahlentheoretischen Functionen ψ_2, ψ_3 müssen wir auf

$$(8)\qquad \mathsf{A}_\alpha \mathsf{A}_{\alpha'} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \sum (-1)^{\frac{\xi+\eta+\zeta+\vartheta}{2}} r^{\frac{\xi^2+\zeta^2+11\eta^2+11\vartheta^2}{264}}$$

zurückgehen und unter Obacht auf die im Einzelfall stattfindenden Summationsbedingungen nach ansteigenden Potenzen von r umordnen. *Dabei werden wir $\psi_2(m)$ und $\psi_3(m)$ augenscheinlich im Anschluss an alle Darstellungen von $24m$ in der quaternären Form:*

$$(9)\qquad 24m = \xi^2 + \zeta^2 + 11\eta^2 + 11\vartheta^2$$

durch ungerade, gegen 3 prime Zahlen ξ, ζ, η, ϑ zu definieren haben.

Durch Zeichenwechsel der darstellenden Zahlen gewinnen wir von einem Quadrupel ξ, ζ, η, ϑ aus deren gleich *sechzehn*; aber wir wollen unter den sechzehn so gemeinten Darstellungen jeweils nur eine einzelne durch die nachfolgende Vorschrift fixieren: Da es sich in (9) für ψ_2 und ψ_3 um quadratische Reste m handelt, so kann keine der Zahlen ξ, ζ durch 11 teilbar sein; *wählen wir also die Vorzeichen von ξ und ζ so, dass sie selbst quadratische Reste von 11 sind!* Die Vorzeichen von η und ϑ sollen dann so bestimmt werden, *dass einmal ξ und η, andrerseits ζ und ϑ mod. 3 einander congruent sind.* Dadurch bleiben wir zugleich mit den ursprünglichen Summationsbedingungen (2) in Übereinstimmung.

Hiernach gelten nun die Erklärungen: *Für $\psi_2(m)$ nehme man nur diejenigen Darstellungen* (9), *bei welchen ξ und ζ modulo 11 congruent ausfallen; $\psi_2(m)$ bedeutet die Anzahl solcher Darstellungen, bei denen die Summe der vier darstellenden Zahlen durch 4 teilbar ist, vermindert um die Anzahl der übrigen Darstellungen* (9) *dieser Art.* Andrerseits nehme man alle Darstellungen (9), *bei denen ξ und ζ modulo 11 incon-*

gruent sind; da ist dann $2\psi_3(m)$ wieder die Anzahl aller Darstellungen dieser Art mit $\xi+\zeta+\eta+\vartheta\equiv 0$ (mod. 4), vermindert um die Anzahl der übrigen Darstellungen. Wir mussten hier aber $2\psi_3$ statt ψ_3 schreiben, weil nämlich jede der beiden Darstellungen $(\xi, \zeta, \eta, \vartheta)$ und $(\zeta, \xi, \vartheta, \eta)$ bei der eben bezeichneten Abzählung besonders gezählt wurde, während doch bei (6) nur *eine* von ihnen zur Geltung kommt. —

Es erübrigt, in entsprechender Weise die beiden Entwicklungsfunctionen $\chi_1(m)$ und $\chi_2(m)$ zu discutieren. Hier haben wir zu setzen:

$$(10)\quad \begin{cases} 44 i\pi\, j_1(\omega \mid \beta) = \int \mathsf{A}_0 \mathsf{A}_{-3\beta^2}\, d\varpi, \\ 22 i\pi\, j_2(\omega \mid \beta) = \int \mathsf{A}_{-4\beta^2} \mathsf{A}_{-9\beta^2}\, d\varpi, \end{cases}$$

sowie andrerseits:

$$(11)\quad \left.\begin{cases} j_1(\omega \mid \beta) = \sum \dfrac{\chi_1(m)}{m}\, r^{\frac{m}{11}}, \\ j_2(\omega \mid \beta) = \sum \dfrac{\chi_2(m)}{m}\, r^{\frac{m}{11}}, \end{cases}\right\}\ m \equiv \beta \pmod{11}.$$

Die arithmetische Definition von $\chi_2(m)$ schliesst sich sehr eng an die über die ψ_i gemachten Angaben an. Da jetzt m Nichtrest ist, so werden sich unter den Darstellungen (9) auch solche finden, bei denen eine der Zahlen ξ, ζ durch 11 teilbar ist. *Doch schliessen wir zunächst solche Darstellungen von $24m$ in der quaternären Form* (9), *bei denen ξ oder ζ Multiplum von 11 ist, aus und fixieren die Vorzeichen der $\xi, \zeta, \eta, \vartheta$ bei den übrig bleibenden Darstellungen genau nach der vorhin gegebenen Vorschrift.* Wie man dann leicht ins einzelne verfolgt, *wird $2\chi_2(m)$ gleich der Anzahl derjenigen unter den fraglichen Darstellungen, bei denen $\xi+\zeta+\eta+\vartheta\equiv 0$ (mod. 4) wird, vermindert um die Anzahl der übrigen Darstellungen.*

Es bleibt endlich nur noch die arithmetische Definition von $\chi_1(m)$ zu geben übrig, und hier handelt es sich um alle diejenigen Darstellungen eines Nichtrestes m in der Gestalt (9), *bei denen eine der Zahlen ξ, ζ ein Vielfaches von 11 ist.* Jetzt passen die obigen Festsetzungen über die Vorzeichen nicht mehr vollständig: wir setzen etwa fest, *dass die durch 11 teilbare unter den Zahlen ξ, ζ positiv genommen werden soll, während wir im übrigen an den obigen Bestimmungen festhalten.* Die Function $2\chi_1(m)$ ist demnächst wieder genau wie bisher als *Differenz zweier Anzahlen von Darstellungen* zu definieren. —

Im Anschluss hieran liesse sich übrigens leicht auch die Entwicklungsfunction des elliptischen Integrals $j(\omega \mid 0)$ — und zwar in besonders einfacher Weise — definieren. Wir gehen hierauf indessen nicht mehr besonders ein und gedenken nur noch kurz der Verall-

gemeinerung der gefundenen Gesetze. Zu ähnlichen Verhältnissen gelangen wir offenbar stets von den Ansätzen (5) p. 563 aus und gewinnen solchergestalt im Anschluss an das binäre des vorigen Paragraphen *ein quaternäres Entwicklungsprincip* für die Integrale der Congruenzgruppen. Dasselbe basiert im Einzelfalle auf Darstellungen des Reihenexponenten m in Gestalt einer quaternären quadratischen Form, und zwar entsprechend einer Gleichung:

$$\sigma m = f(\xi, \eta) + f'(\zeta, \vartheta), \tag{12}$$

wo f und f' zwei binäre Formen sind. Die ganze Zahl σ war vorhin gleich 24; sie kann aber je nach den gebrauchten Modulsystemen auch noch einige andere Werte bedeuten und wird insbesondere gleich 1, wenn wir von den Modulsystemen (2) p. 355 ausgehen.

§ 9. Angabe einiger Resultate über die Integrale niederer zusammengesetzter Stufenzahlen.

Das binäre und das quaternäre Entwicklungsprincip, wie wir dieselben vorstehend kennen lernten, reichen auch noch für die überall endlichen Integrale der Stufen 6, 8, 9 aus. Wir nehmen aber auf die Integrale dieser Stufen hier um so lieber gleich Bezug, als wir einige von ihnen weiterhin gelegentlich zu gebrauchen haben.

Die Hauptcongruenzgruppe *sechster* Stufe Γ_{72} hat $p = 1$, und das zugehörige elliptische Integral erster Gattung haben wir in Bd. I p. 690 bereits angegeben; es hatte die Gestalt:

$$j(\omega) = \int \sqrt[6]{\Delta}\, d\varpi. \tag{1}$$

Indem wir andrerseits explicite entwickeln:

$$j(\omega) = \sum \frac{\chi(m)}{m} r^{\frac{m}{6}}, \quad m \equiv 1 \pmod{6}, \tag{2}$$

werden wir die Bedeutung der arithmetischen Function sechster Stufe $\chi(m)$ entweder aus (3) p. 374 oder aber vermöge der Darstellung $\sqrt[6]{\Delta} = \sqrt[8]{\Delta}^2 \sqrt[24]{\Delta}$ aus (5) p. 374 und (4) p. 377 durch Multiplication ableiten. Wir finden, was wir hier natürlich nicht noch eingehend ausrechnen, die nachfolgende Definition: *Es ist:*

$$\chi(m) = \tfrac{1}{2} \sum \left(\frac{\xi}{3}\right) \xi, \tag{3}$$

summiert über alle Darstellungen von m in der Gestalt:

$$m = \xi^2 + 3\eta^2 \tag{4}$$

vermöge irgend welcher ganzer Zahlen ξ, η. Als Anfangsglieder berechnet man daraufhin:

(5) $$j(\omega) = r^{\frac{1}{6}} - \tfrac{4}{7}\, r^{\frac{7}{6}} + \tfrac{2}{13}\, r^{\frac{13}{6}} + \cdots.$$

Bei der *achten* Stufe hat man erstlich die ausgezeichnete hyperelliptische Γ_{48} vom Geschlechte $p = 2$, die wir in I p. 652 auffanden. Die beiden zugehörigen überall endlichen Integrale finden wir durch Integration der in (7) p. 378 gegebenen Moduln z_0, z_1 und schreiben, wie gewohnt:

(6) $$j_k(\omega) = \sum \frac{\chi(m)}{m}\, r^{\frac{m}{8}}, \quad m \equiv 2k - 1 \pmod{8}.$$

Die eine bei der Gruppe Γ_{48} achter Stufe auftretende zahlentheoretische Function $\chi(m)$ ist zu definieren durch:

(7) $$\chi(m) = \tfrac{1}{2} \sum \left(\frac{-1}{\xi}\right) \xi,$$

summiert über alle ganzzahligen Darstellungen von m in der binären Form:

(8) $$m = \xi^2 + 2\eta^2.$$

Die Anfangsglieder der Reihenentwicklungen für unsere beiden Integrale sind dabei nach (7) p. 378:

(9) $$\begin{cases} j_1 = r^{\frac{1}{8}} - \tfrac{1}{9}\, r^{\frac{9}{8}} - \tfrac{6}{17}\, r^{\frac{17}{8}} + \cdots, \\ j_2 = \tfrac{2}{3}\, r^{\frac{3}{8}} - \tfrac{6}{11}\, r^{\frac{11}{8}} + \tfrac{2}{19}\, r^{\frac{19}{8}} + \cdots. \end{cases}$$

Aber wir haben bei der *achten* Stufe noch eine zweite zahlentheoretische Function, und bei dieser tritt, an Stelle der eben zur Geltung gekommenen quadratischen Form (1, 0, 2), die Form (1, 0, 4) in Kraft. In der That haben wir ja noch die drei Integrale j der *ausgezeichneten* Γ_{96} *achter Stufe* zu betrachten, denen wir auf Grund der Angaben von p. 30 die Gestalt verleihen:

(10) $$\begin{cases} 8 i\pi\, j_1(\omega) = \displaystyle\int \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}}\, \sqrt[8]{\Delta}\; \vartheta_2\, d\varpi, \\ 8 i\pi\, j_2(\omega) = \displaystyle\int \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}}\, \sqrt[8]{\Delta}\; \vartheta_0\, d\varpi, \\ 8 i\pi\, j_3(\omega) = \displaystyle\int \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}}\, \sqrt[8]{\Delta}\; \vartheta_3\, d\varpi\,^{*)}. \end{cases}$$

Bei der Entwicklung dieser Integrale nach ansteigenden Potenzen von r werden wir auf die eine zur Γ_{96} gehörende Entwicklungsfunction geführt:

---

*) Es sind diese Integrale in historischer Beziehung insofern interessant, als sie die ersten Beispiele sind, an denen Hr. Hurwitz seine neuen Principien der Theorie der Modularcorrespondenzen durchführte; siehe die Note *„Zur Theorie der Modulargleichungen“* in den Göttinger Nachrichten vom 3. November 1883.

(11) $$\chi(m) = \tfrac{1}{2} \sum \left(\frac{-1}{\xi}\right) \xi,$$

summiert über alle Darstellungen von m in der Gestalt:

(12) $$m = \xi^2 + 4\eta^2$$

durch ganze Zahlen ξ, η. Man hat dann für die drei in Rede stehenden Integrale die Darstellungen:

(13) $$\left\{\begin{array}{l} j_1(\omega) = \sum (-1)^{\frac{m-1}{4}} \frac{\chi(m)}{m} r^{\frac{m}{4}}, \\ j_2(\omega) = 2 \sum (-1)^{\frac{m-1}{4}} \frac{\chi(m)}{m} r^{\frac{m}{8}}, \\ j_3(\omega) = 2 \sum \frac{\chi(m)}{m} r^{\frac{m}{8}}, \end{array}\right\} m \equiv 1 \pmod{4}.$$

Bei den gesamten Integralen j der *neunten* Stufe, sowie bei einigen Integralen j der *zehnten* Stufe kommt ausschliesslich das quaternäre Entwicklungsprincip in Betracht.

Die Hauptcongruenzgruppe neunter Stufe gehörte zum Geschlechte $p = 10$, und ein volles Modulsystem hatten wir nach pag. 31 in den vier dritten Teilwerten $\sigma_{\lambda,\mu}$. Die zehn quadratischen Verbindungen derselben liefern, mit $\sqrt[3]{\Delta}$ multipliciert, die zehn Formen erster Gattung, *und also gewinnen wir die fraglichen Integrale in der Gestalt:*

(14) $$j(\omega) = \int \sigma_{\lambda\mu}\, \sigma_{\lambda'\mu'} \sqrt[3]{\Delta}\, d\varpi.$$

Von hier aus zeigt man leicht, dass dem quaternären Entwicklungsprincip im vorliegenden Falle Darstellungen der Exponenten m in der Gestalt:

(15) $$8m = \xi^2 + \zeta^2 + 3\eta^2 + 3\vartheta^2$$

zu Grunde liegen. Wir gehen indessen auf das Nähere hier nicht ein.

Bei der zehnten Stufe gedenken wir nur kurz der ausgezeichneten Γ_{120}, welche zu einer hyperelliptischen F_{120} hinführte, und zwar vom Geschlecht $p = 5$. Die fünf Integrale j dieser Γ_{120} stellten wir bereits einmal in I p. 655 dar. Aber wir gewinnen einen directeren Einblick in das Bildungsgesetz dieser Integrale, wenn wir an das p. 389 studierte System der A_α anknüpfen. *Die sechs quadratischen Verbindungen dieser drei Moduln liefern zunächst sechs Integrale:*

(16) $$j = \int A_\alpha A_{\alpha'}\, d\varpi,$$

zwischen denen aber infolge der Identität $A_0^2 + A_1 A_2 = 0$ eine lineare Relation besteht. Nach (1) p. 388 wird die eine hier in Betracht kommende zahlentheoretische Function $\chi(m)$ durch Anzahlen von Darstellungen des Exponenten m vermöge der Gleichung:

$$(17) \qquad 2m = \xi^2 + \zeta^2 + 5\eta^2 + 5\vartheta^2$$

zu definieren sein. Doch gehen wir darauf wieder nicht näher ein und schliessen hier überhaupt unsere Untersuchung über die Bildungsgesetze der Integrale erster Gattung j ab.

§ 10. Weitere Fragestellungen über die Integrale erster Gattung.

Zum Schlusse des vorliegenden Kapitels berichten wir noch kurz über ein paar weitere Problemstellungen, die man an die betrachteten Integrale erster Gattung anschliessen wird.

Im Voraufgehenden haben wir allenthalben von *additiven Constanten* abgesehen, welche bei Ausübung einer Modulsubstitution zu einem Integrale $j(\omega)$ hinzutreten. Es ist natürlich, dass man der Untersuchung gerade auch die Wendung auf diese additiven Constanten geben kann, was dann zu der Betrachtung der *Periodeneigenschaften* unserer Integrale $j(\omega)$ hinführt. Einige Beispiele müssen hinreichen, um den Charakter der in dieser Richtung liegenden Entwicklungen zu kennzeichnen.

Indem wir jetzt für die sechste Stufe des genaueren schreiben:

$$(1) \qquad j(\omega) = \int_{i\infty}^{\omega} \sqrt[6]{\Delta}\, d\varpi,$$

haben wir, wie man leicht bemerkt, für dieses Integral gegenüber S und T das Verhalten anzumerken:

$$j(\omega+1) = -\varrho^2 j(\omega),\quad j\left(\frac{-1}{\omega}\right) = -j(\omega) + \int_{i\infty}^{0} dj(\omega),$$

ϱ in sehr gewohnter Weise als 3te Einheitswurzel $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ gebraucht. Der Wert der Integrationsconstanten in der zweiten unter diesen Formeln ist nicht ohne weiteres angebbar. Wir werden demnach, um unsere Formeln zu vereinfachen, statt $j(\omega)$ das Integral $u(\omega)$ vermöge der Gleichung:

$$(2) \qquad j(\omega) = u(\omega)\cdot \int_{i\infty}^{0} dj(\omega)$$

einführen. *Dieses Integral sechster Stufe $u(\omega)$ zeigt dann gegenüber S und T das Verhalten:*

$$(3) \qquad u(\omega+1) = -\varrho^2 u(\omega),\quad u\left(\frac{-1}{\omega}\right) = -u(\omega) + 1.$$

Durch Combination lernt man das Verhalten von u gegenüber einer beliebigen Modulsubstitution kennen; offenbar hat man:

$$(4) \qquad u\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = \pm\,\varrho^{\nu} u(\omega) + a + b\varrho,$$

wo a und b ganze Zahlen sind. Als additive Constante treten hier also *aus dritten Einheitswurzeln gebildete ganze complexe Zahlen hinzu.*

Ein Paar primitiver Perioden für das elliptische Gebilde sechster Stufe wird hiernach durch ϱ, 1 geliefert. Es liegt also der *äquianharmonische Fall* vor, was wir auch schon aus I p. 686 wissen. Wie übrigens die arithmetische Abhängigkeit der ganzen Zahl $(a + b\varrho)$ von der gerade ausgeübten Modulsubstitution direct zu definieren sein mag, ist zur Zeit durchaus eine offene Frage*).

Für die *achte* Stufe scheint erwähnenswert, dass die drei Integrale $j(\omega)$ der Γ_{96} einzeln genommen *elliptisch* sind. Man findet nämlich, wie wir nicht näher ausführen, dass das einzelne dieser Integrale zu einer Untergruppe Γ_{24} des Geschlechtes $p = 1$ gehört. Gegenüber einer beliebigen Substitution dieser Γ_{24} zeigt dann $j(\omega)$ das Verhalten:

$$(5) \qquad j' = j + a + ib,$$

wo a und b wieder ganze Zahlen sind. Es entspringt daraus das Resultat: *Die Fläche F_{96} lässt sich durch vierfache Überlagerung einer elliptischen Fläche von harmonischem Doppelverhältnis herstellen.*

Auch die hyperelliptische Γ_{48} lässt sich leicht erledigen. Wir merken betreffs derselben nur an, *dass die Moduln der F_{48} im Sinne von* p. 528 *arithmetisch dem Zahlgebiete der achten Einheitswurzeln angehören.*

Verweilen wir etwa noch einen Augenblick bei den drei Integralen j_1, j_2, j_4 der siebenten Stufe, um insbesondere das in I p. 706 vorläufig angegebene Periodenschema der Normalintegrale abzuleiten. Die Γ_{168} hat zufolge ihres Polygons Fig. 86 in I p. 370 sieben erzeugende Substitutionen $v_0, v_1, \ldots v_6$, wobei sich eine, z. B. v_0, durch die übrigen ausdrücken lässt. Den sechs Substitutionen $v_1, v_2, \ldots, v_6$ entsprechen nun sechs primitive Periodenwege auf der geschlossenen Fläche F_{168} des Geschlechtes $p = 3$. Versehen wir die drei j_α mit einem solchen gemeinsamen Factor, dass $j_1(v_0(\omega))$ gleich $j_1(\omega) + 1$ wird, so ändert sich das einzelne j_α bei Ausübung von $v_1, \ldots, v_6$ um die Beträge $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^6$ in irgend einer bestimmten Reihenfolge; ε ist dabei im gewohnten Sinne für $e^{\frac{2i\pi}{7}}$ gebraucht. Es ist dieses Verhalten

*) Die bezüglichen Entwicklungen des Herausgebers in den Mathem. Ann. Bd. 30 p. 348 führen die hier vorliegende Frage nur auf ihre einfachste Gestalt zurück. Vergl. übrigens wegen der Abbildung der Modulteilung vermöge der Function $u(\omega)$ die l. c. pag. 364 ff. gegebene ausführliche Untersuchung des Herausgebers.

der in Rede stehenden Integrale eine einfache Folge des Umstandes, dass einmal j_α gegenüber S den Factor ε^α annimmt (cf. p. 583), während andrerseits die Substitutionen $v_1, \ldots, v_6$ aus v_0 durch wiederholte Transformation vermöge S hervorgehen. Nehmen wir noch hinzu, wie die letzthin immer durch U bezeichnete Modulsubstitution (13) p. 565 auf die j_α wirkt, so kommt nach leichter Zwischenbetrachtung das Resultat: *Gegenüber einer beliebigen Substitution der Γ_{168} nehmen die drei Integrale j_α als simultane Perioden die drei conjugierten ganzen complexen Zahlen aus siebenten Einheitswurzeln:*

$$(6) \qquad h_1 \varepsilon^\alpha + h_2 \varepsilon^{2\alpha} + \cdots + h_6 \varepsilon^{6\alpha}$$

an; die h sind hier als von α unabhängige ganze rationale Zahlen zu denken.

Man findet solchergestalt jeder modulo 7 mit 1 congruenten Modulsubstitution drei conjugierte Zahlen (6) eindeutig zugeordnet, und wir können auf Grund dieses Ergebnisses eine Beziehung herstellen zwischen den gruppentheoretischen Fragen der Modultheorie und jener allgemeinen Zahlentheorie, wie sie insbesondere durch Hrn. Dedekind im letzten Supplement seines oft genannten Werkes durchgeführt ist. Hier im speciellen kommt der Kreisteilungskörper siebenten Grades zur Geltung. Dabei ist das Fundament aller sich hier anschliessenden Untersuchungen der Umstand, *dass der Combination zweier Operationen der Γ_{168} die Addition der zu beiden Substitutionen gehörenden Zahlen* (6) *gegenübertritt. Dieserhalb entspricht jedem System ganzer Zahlen* (6), *das sich bei Addition und Subtraction seiner Zahlen reproduciert, insbesondere also jedem Ideale des fraglichen Kreisteilungskörpers eine Untergruppe der Γ_{168}, welche wir durch Rückgang von den bezüglichen Zahlen* (6) *zu den zugehörigen Modulsubstitutionen gewinnen.* Alle so zu gewinnenden Gruppen sind natürlich Untergruppen der Γ_{168} und gehören im Sinne von I p. 362 der siebenten Classe an; aber wir gewinnen auf diesem Wege noch keineswegs die gesamten Untergruppen der bezeichneten Art. Denn alle diese Untergruppen enthalten gemeinsam jene ausgezeichnete Untergruppe vom Index ∞, deren sämtliche Substitutionen die j_α völlig unverändert lassen, d. i. ohne dass noch additive Constante zutreten; die hiermit gewonnene Gruppe ist aber noch keineswegs mit der in I p. 359 durch $\Gamma_{(7)}$ bezeichneten Gruppe identisch, vielmehr ist letztere in jener selbst erst wieder eine Untergruppe vom Index ∞ *).

---

*) Vergl. bezüglich der im Texte angeregten Frage auch die Arbeit des Herausgebers *„Über ausgezeichnete Untergruppen in der Gruppe der elliptischen Modulfunctionen“* Math. Ann. Bd. 31 (1887).

Das in I p. 706 angegebene Periodenschema der Normalintegrale siebenter Stufe entspringt nun einfach so: Die eben betrachteten Integrale haben, insofern wir den erzeugenden Substitutionen $v_1, \ldots, v_6$ sechs primitive Periodenwege zuordnen, zunächst das Schema:

	a_1,	a_2,	a_3	b_1,	b_2,	b_3
j_1	ε,	ε^2,	ε^4	ε^3,	ε^6,	ε^5
j_2	ε^2,	ε^4,	ε	ε^6,	ε^5,	ε^3
j_4	ε^4,	ε,	ε^2	ε^5,	ε^3,	ε^6

Um von hier aus drei Normalintegrale für die gerade ausgewählte Zerschneidung der F_{168} zu gewinnen, haben wir zu schreiben:

$$u_\alpha = \frac{7 - i\sqrt{7}}{28}\left\{(\varepsilon^{6\alpha} - \varepsilon^{2\alpha})j_1 + (\varepsilon^{5\alpha} - \varepsilon^{4\alpha})j_2 + (\varepsilon^{3\alpha} - \varepsilon^{\alpha})j_4\right\}. \tag{7}$$

Die leichte Umrechnung des eben angeführten Schemas vermöge dieser Gleichungen (7) ergiebt dann gerade das in I p. 706 angeführte Periodenschema. Wir haben insbesondere im Anschluss an den damals schon angeführten Zahlwert der Periode τ etwa das Schlussresultat: *Das zu $q = 7$ gehörende Gebilde des Geschlechtes $p = 3$ lässt sich durch mehrfache Überdeckung einer solchen elliptischen Fläche herstellen, deren „reducierter“ Periodenquotient $\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ ist, deren absolute Invariante J also nach den p. 200 unter (15) gewonnenen Resultaten:*

$$J\left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right) = -\frac{5^3}{2^6}$$

ist.

Man kann hoffen, dass die hiermit entwickelten Ansätze bei späterer Durchführung zu beziehungsreichen Ergebnissen führen werden. Indessen weisen diese Gegenstände über unsere hier vorliegenden Ziele weit hinaus. Es muss genügen, dass wir für die Theorie der Integrale j von Primzahlstufe ein allgemeines Schema gewonnen haben, und dass wir wenigstens in den niederen Fällen die directe arithmetische Definition der zahlentheoretischen Functionen ψ und χ erschöpfend haben geben können. Dies ist zumal alles, was wir bei der nun folgenden Theorie der Modularcorrespondenzen gebrauchen werden.

Viertes Kapitel.

Specielle Theorie der Modularcorrespondenzen n^{ter} Ordnung einer beliebigen Stufe.

Es sind nun alle Vorbereitungen getroffen, um unsere eigentliche Aufgabe, nämlich die Darstellung der Theorie der Modularcorrespondenzen, zu behandeln. Wir besprachen oben (p. 154 ff.) die sogenannten *Modulargleichungen in irrationaler Form* und hatten damals bereits auf die allgemeinen Auffassungsweisen einer Theorie der Modularcorrespondenzen Bezug genommen, innerhalb welcher jene Modulargleichungen ihre naturgemässe Erklärung fanden. Hier ist es indes einfacher, die damaligen functionentheoretischen Gesichtspunkte vorerst zu meiden und statt dessen an die allgemeinen Grundlagen der Transformationstheorie anzuknüpfen, wie sie im 3ten Kapitel des 4ten Abschnittes (p. 84 ff.) entworfen wurden. Indem dies sogleich in § 1 geschehen soll, gewinnen wir auf diesem Wege eine völlig allgemeine Grundlage für die weiteren Betrachtungen.

Unsere wesentliche Aufgabe wird natürlich die sein, dass wir die Modularcorrespondenzen in die allgemeine Correspondenztheorie des vorletzten Kapitels einordnen. Wir treffen hier geradezu auf das interessanteste Beispiel zur Erläuterung jener allgemeinen Theorie und werden jetzt dem Gange der damaligen allgemeinen Entwicklung genau folgen. In diesem Sinne haben wir erstlich die *Integralrelationen* klarzustellen, wie sie für die Integrale j den Modularcorrespondenzen entsprechen, und diesem Zwecke dienten die Vorbereitungen des vorigen Kapitels. Wir haben andrerseits die Modularcorrespondenzen *vermöge der Primform darzustellen*, sowie endlich aus diesen Darstellungen die *Anzahl der Coincidenzen* der einzelnen Correspondenz abzuzählen.

Die allgemeine Idee der Modularcorrespondenzen wurde von Hrn. Klein in der Programmnote *„Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen“* (Math. Ann. Bd. 17, 1879) entwickelt. Die Durchführung, insbesondere auf Grundlage der Integrale j, wurde dann von Hrn. Hurwitz gegeben. Wie wir schon p. 590 anführten, waren es die Modularcorrespondenzen der Γ_{96} *achter* Stufe, bei denen Hurwitz seine Methoden

zuerst anwandte. Bald darauf zog derselbe auch die Correspondenzen der *siebenten* Stufe in Betracht*) und gab sodann in den Leipziger Berichten vom 4. Mai 1885 einen ersten Entwurf für eine allgemeine Theorie der Modularcorrespondenzen einer *beliebigen Primzahlstufe.* Bis zu diesem Punkte sollen denn auch die Überlegungen des vorliegenden Kapitels geführt werden, wobei uns zur Erläuterung der bei beliebiger Primzahlstufe q eintretenden Verhältnisse immer der Fall $q = 11$ dienen mag.

Hr. Hurwitz trug sich gelegentlich mit der Idee, selbst eine ausführliche Darstellung seiner Theorie der Modularcorrespondenzen zu veröffentlichen; jedoch wurde er hiervon durch seine weitergehenden Untersuchungen über algebraische Functionen abgelenkt. Möchte die vorliegende Behandlung der Modularcorrespondenzen, welche vom Herausgeber herrührt, in etwas jenem nicht zur Durchführung gelangten Plane entsprechen.

§ 1. Definition der Modularcorrespondenzen n^{ter} Ordnung. Irreducibilität, Inversibilität und Monodromiegruppe derselben.

Es sei n irgend eine ganze positive Zahl > 1 und ω ein beliebiger Punkt der positiven Halbebene. *Diesem Punkte ω soll alsdann der Punkt $\omega' = n\omega$ correspondieren,* der als solcher natürlich wieder der positiven Halbebene angehört. Die so begründete ein-eindeutige Correspondenz zwischen zwei Punkten ω und ω' der positiven Halbebene setzen wir nun gleich in Beziehung *mit dem regulären Polygon F_μ irgend einer ausgezeichneten Congruenzgruppe Γ_μ, deren Stufe gegen die Ordnung n relativ prim ist.*

Man übertrage nämlich die Correspondenz $\omega' = n\omega$ auf Grund der bekannten 1-∞-deutigen Beziehung zwischen der Halbebene und der geschlossenen *Fläche F_μ* auf die letztere. Einem ersten Punkte ω entspricht dabei ein gewisser Punkt x der Fläche F_μ, und diesem correspondiert zunächst der durch $n\omega$ eindeutig bestimmte Punkt y der Fläche. Aber wir werden sogleich fragen, welche Lagen der Punkt y anzunehmen vermag, falls x geschlossene Wege auf der Fläche F_μ beschreibt. Solchen Wegen entsprechen in der ω-Halbebene die Übergänge von ω zu den bezüglich Γ_μ äquivalenten Punkten $v_1(\omega)$, $v_2(\omega), \cdots$. Unter allen zugeordneten Punkten $nv_1(\omega)$, $nv_2(\omega), \cdots$ sind aber zufolge p. 105 ff. im ganzen $\psi(n)$ bezüglich der Γ_μ inäquivalente, wo wir dieses Symbol $\psi(n)$ im Augenblick wieder in der

*) *Über Relationen zwischen Classenanzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante,* Math. Ann. Bd. 25 (1884).

früheren Bedeutung von I p. 460 Formel (2) gebrauchen. Diese ψ Punkte können wir wie früher durch die $\psi(n)$ Repräsentanten:

$$(1) \qquad R_0(\omega),\ R_1(\omega),\ \ldots,\ R_{\psi-1}(\omega)$$

eines zum Schema $\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ gehörenden Repräsentantensystems der Γ_μ charakterisieren. Lassen wir jetzt dem Punkte x der geschlossenen F_μ nicht nur die eine Stelle y, welche $R_0(\omega) = n\omega$ zugehört, sondern gleich alle ψ Stellen $y_0, y_1, \ldots, y_{\psi-1}$, wie sie den Argumenten (1) zugeordnet sind, correspondieren, so werden bei geschlossenen Wegen des x diese ψ Stellen y in einander übergehen. *Die hiermit gewonnene ψ-deutige Correspondenz auf der Fläche F_μ soll nun fortan als eine Modularcorrespondenz n^{ter} Ordnung der Γ_μ benannt werden.*

Es ist vor allen Dingen evident, *dass unsere Modularcorrespondenz allen Anforderungen genügt, die wir seinerzeit (p. 523 u. f.) an eine algebraische Correspondenz auf einer Riemann'schen Fläche stellten.* Die Abhängigkeit zwischen den Stellen x, y ist durch ein analytisches Gesetz begründet, nämlich durch $\omega' = n\omega$, und es entsprechen allen Punkten x ausnahmslos je $\psi(n)$ mit x bewegliche Punkte y. Es ist demnach gestattet, alle Resultate des vorletzten Kapitels auf die Modularcorrespondenzen in Anwendung zu bringen. —

Nach den früheren Regeln über die μ unterschiedenen Repräsentantensysteme einer ausgezeichneten Congruenzgruppe Γ_μ ist übrigens evident, *dass wir mit einer ersten gleich μ Modularcorrespondenzen der fraglichen Art auf der Fläche F_μ neben einander zu betrachten haben.* Der Übergang zu diesen $(\mu - 1)$ neuen Correspondenzen von jener ersten aus ist in bekannter Weise dadurch zu bewerkstelligen, dass wir die Punkte $y_0, y_1, \ldots, y_{\psi-1}$ nicht wie eben dem Punkte x, sondern einem der $(\mu - 1)$ auf F_μ mit x äquivalenten Punkte zuordnen. *Andrerseits aber erreichen wir genau dasselbe, wenn wir den Punkt x festhalten und diesem nach einander alle μ Systeme zu je ψ Punkten y zuordnen, wie sie den μ unterschiedenen Repräsentantensystemen n^{ter} Ordnung der Γ_μ:*

$$(2) \qquad R_0^{(i)}(\omega),\ R_1^{(i)}(\omega),\ \ldots,\ R_{\psi-1}^{(i)}(\omega),\quad (i = 1, 2, \ldots, \mu)$$

zugehören. Die einzelne unter diesen μ, durch die Transformationen der endlichen Gruppe G_μ in einander überführbaren, Correspondenzen ist dann durch das Schema $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ des zugehörigen Repräsentantensystems eindeutig festzulegen.

Wenn man die einzelne unserer μ Correspondenzen im Sinne der

Gleichungstheorie discutieren will, so liegt das Problem vor, bei gegebener Stelle x die ψ correspondierenden Stellen y zu berechnen. Bei der Behandlung dieser Aufgabe tritt nun die bereits oben (p. 156) erwähnte Übereinstimmung der Modularcorrespondenzen mit den Modulargleichungen in allen wesentlichen Punkten in Evidenz:

Es ist nämlich erstlich der *Grad* unseres Problems, nämlich $\psi(n)$, derselbe wie bei der Modulargleichung von der gleichen Ordnung n.

Um zweitens die *Monodromiegruppe* des aufgeworfenen Problems festzustellen, müssen wir die Permutationen der ψ Stellen y sammeln, welche durch geschlossene Wege der Stelle x auf der F_μ erzielt werden können. Der letzte Cursivsatz p. 107 ergiebt hier unmittelbar das Resultat, *dass die Gruppe dieser Permutationen mit der Gruppe der Modulargleichung* (*cf. p.* 53) *holoedrisch isomorph ist.* Wir werden die Correspondenz insbesondere als eine *irreducibele* bezeichnen, da jene Permutationsgruppe bekanntlich transitiv ist.

Endlich müssen wir die einzelne Modularcorrespondenz *invertieren.* Indem wir aber die Inversion an einem der μ Repräsentantensysteme (2) ausführen, wird in $R_0^{-1}, R_1^{-1}, \ldots, R_{\psi-1}^{-1}$ wieder ein Repräsentantensystem n^{ter} Ordnung der Γ_μ entspringen, nur nicht notwendig eben jenes System, von dem wir gerade ausgingen. Hier treten vielmehr jene Betrachtungen ein, denen wir mit Ausführlichkeit bei den Modulargleichungen höherer Stufe (p. 122 ff.) nachgingen. Es ergiebt sich demgemäss: *Die μ Modularcorrespondenzen n^{ter} Ordnung der Γ_μ sind ψ-ψ-deutig und gehen bei Inversion teils in sich selbst über, teils permutieren sie sich zu Paaren.*

In *Grad, Monodromiegruppe* und *Inversibilität* sahen wir aber seinerzeit die drei wesentlichen Eigenschaften der Modulargleichungen; und also stimmen in der That die Modularcorrespondenzen mit jenen in allen wesentlichen Punkten überein.

Es ist hier endlich besonders wichtig, für den Fall, dass n quadratische Teiler besitzt, auch noch *die erweiterte Transformation* heranzuziehen, diese Ausdrucksweise im Sinne von p. 48 gebraucht. Ihr entsprechend vereinen wir alle diejenigen Correspondenzen der Γ_μ von gleichem Schema, welche sich auf die Ordnungen $\frac{n}{\tau^2}$ beziehen, wo τ der Reihe nach alle quadratischen Teiler von n zu durchlaufen hat. Der Grad der so entspringenden Correspondenz ist nach p. 47 gleich $\Phi(n)$, d. i. gleich der Teilersumme von n; wir werden sie fortan schlechtweg als eine *reducibele* Modularcorrespondenz n^{ter} Ordnung der Γ_μ bezeichnen. Für die ausführlichen Rechnungen bietet die Betrachtung der reducibelen Correspondenzen an Stelle der irreducibelen alle jene Vorteile,

die wir bei entsprechender Gelegenheit im vorletzten Abschnitt, nämlich bei den Modulargleichungen und ihren Classenzahlrelationen kennen lernten. Wir werden demgemäss auch hier zumeist nur mit den reducibelen Correspondenzen der erweiterten Transformation n^{ter} Ordnung arbeiten.

§ 2. Der Integralansatz für die Modularcorrespondenzen sechster Stufe.

Ist das Geschlecht der Γ_μ Null, so führt der allgemeine Ansatz des vorigen Paragraphen zu den Modulargleichungen des vierten Abschnittes zurück, wie wir schon früher p. 156 angaben. Der niederste, hier bei den Modularcorrespondenzen specifisch in Betracht kommende, Fall ist also derjenige der Hauptcongruenzgruppe *sechster* Stufe Γ_{72}, welche zum Geschlechte $p = 1$ gehört.

Jeder Correspondenz ordneten wir im vorletzten Kapitel ein System von p Integralrelationen:

$$\sum_{r=1}^{\alpha} j_i(y_r) = \sum_{k=1}^{p} \pi_{ik} j_k(x) + \pi_i \tag{1}$$

zu, wobei die j als Normalintegrale gedacht waren. Es wird unsere wesentlichste Aufgabe sein, diese Relationen für die einzelne Modularcorrespondenz thatsächlich zu berechnen. Dabei wollen wir übrigens kein besonderes Gewicht darauf legen, dass die j auch wirklich immer als ein System von Normalintegralen gewählt sind; wir nehmen diese Integrale vielmehr immer gleich so an, wie sie vom vorigen Kapitel geliefert werden. Die Folge ist natürlich, dass wir die Integralrelationen nicht unmittelbar in der in (1) gedachten Gestalt erreichen, sondern dass wir vielmehr im allgemeinen nur p linear-unabhängige Verbindungen der Relationen (1) gewinnen. Für unsere späteren Zwecke ist dies indessen gleichgültig, wie wir noch sehen werden.

Die Methode, welche in den niederen Fällen zur Kenntnis der Relationen (1) führt, illustrieren wir nun am Beispiele der Γ_{72} wie folgt. Man nehme gleich die reducibele Correspondenz der n^{ten} Ordnung vor und zwar diejenige vom Schema $\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$, wobei natürlich die Ordnung n als ungerade und relativ prim gegen 3 gewählt sein soll. Indem wir die Betrachtung von der Fläche F_{72} in das Polygon zurückverlegen, liefere der Punkt x die Stelle ω, die $\Phi(n)$ durch die reducibele Correspondenz zugewiesenen Punkte y aber gehen über in die $\Phi(n)$ Stellen:

$$(2)\qquad R_k(\omega) = V_k\left(\frac{A_k\omega + 6B_k}{D_k}\right),\quad V_k \equiv \begin{pmatrix} D_k, & 0 \\ 0, & D_k^{-1}\end{pmatrix}$$

des Fundamentalpolygons, die letzteren Bezeichnungen dabei im Sinne der p. 108 getroffenen Verabredung gebraucht. Da $p = 1$ ist, so kommt nur eine einzige Integralrelation (1) zur Geltung, wobei man gleich noch beachten wolle, dass zufolge der Congruenz $n \equiv \pm 1$ (mod. 6) die Substitution V_k stets der Γ_{72} angehört. Es gilt demgemäss der Ansatz:

$$(3)\qquad \sum_{k=0}^{\Phi(n)-1} j\left(\frac{A_k\omega + 6B_k}{D_k}\right) = aj(\omega) + b,$$

und unsere Aufgabe ist, die Constanten a und b zu bestimmen, was durch Einsetzung der Potenzentwicklung (2) p. 589 in den Ansatz (3) zu geschehen hat.

Zufolge der eben citierten Formel (2) p. 589 wird $j(i\infty) = 0$. Indem wir also $\omega = i\infty$ in (3) eintragen, *entspringt erstlich* $b = 0$.

Aber weit wesentlicher ist es, dass wir die Constante a berechnen, und zu diesem Ende tragen wir erstlich in die linke Seite von (3) die eben wiederholt genannte Potenzentwicklung ein; wir finden dabei:

$$(4)\qquad \sum_k j\left(\frac{A_k\omega + 6B_k}{D_k}\right) = \sum_k \sum_{m'=\pm 1} \frac{\chi(m')}{m'} e^{\frac{2m'\pi i B_k}{D_k}} r^{\frac{m'A_k}{6D_k}}.$$

Es sei hierbei erlaubt, in (2) p. 589 den Summationsbuchstaben m nicht nur die Zahlen $m = 6h + 1$, sondern auch $m = 6h - 1$ durchlaufen zu lassen; diese Änderung gegenüber der ursprünglichen Summationsbedingung ist nur eine äusserliche, da zufolge (3) p. 589 $\chi(m)$ für alle Zahlen $6h - 1$ mit Null identisch ist. In (4) haben wir übrigens m' statt m gebraucht, um den Buchstaben m sogleich disponibel zu haben.

Die rechte Seite von (4) wolle man nun nach ansteigenden Potenzen von r umordnen und setze zu diesem Zwecke:

$$(5)\qquad \frac{m'A_k}{D_k} = m.$$

Zufolge der rechten Seite der Identität (3) wird m in der fertig umgeordneten Reihe (4) nur noch *ganzzahlige* Werte darbieten. Dieses ist auch aus der rechten Seite von (4) leicht zur Evidenz zu bringen, wenn man beachten will, dass bei stehenden m', A_k, D_k die Zahl B_k jedesmal die Werte $0, 1, \ldots, D_k - 1$ anzunehmen hat. A_k als Teiler von n werde durch δ bezeichnet, worauf:

(6) $$m' = \frac{m D_k}{A_k} = \frac{m n}{\delta^2}, \quad \frac{m' B_k}{D_k} = \frac{m B_k}{\delta}$$

wird. Die rechte Seite der Formel (4) aber liefert jetzt:

(7) $$\sum_m \sum_\delta \sum_B \frac{\delta^2}{m n} \chi\left(\frac{m n}{\delta^2}\right) e^{\frac{2 m \pi i}{\delta} B} r^{\frac{m}{6}};$$

m soll hier alle positiven, gegen 6 primen Zahlen durchlaufen; bei stehendem m muss δ alle Teiler von n durchlaufen, für welche m' ganzzahlig ausfällt; endlich ist bei stehenden m, δ die Zahl B über das Intervall $0, 1, \ldots, n\delta^{-1} - 1$ zu summieren.

Aber diese letzte Summe, nämlich die über B, ist leicht auszuführen. Sei nämlich δ_0 der grösste Teiler von δ, der prim gegen m ist, so wird, da doch m' ganzzahlig ist, $n\delta^{-1}$ durch δ_0 teilbar sein. Man hat demnach:

$$\sum_B e^{\frac{2 m \pi i}{\delta} B} = 0 \quad \text{oder} = \frac{n}{\delta},$$

je nachdem $\delta_0 > 1$ oder $\delta_0 = 1$ ist. Damit gewinnen wir aus (7):

(8) $$\sum_k j\left(\frac{A_k \omega + 6 B_k}{D_k}\right) = \sum_{m \equiv \pm 1} \left\{ \frac{1}{m} r^{\frac{m}{6}} \sum_\delta \delta \chi\left(\frac{m n}{\delta^2}\right) \right\},$$

wo sich bei stehendem m die Summe über δ auf alle gemeinsamen Teiler der beiden Zahlen m und n bezieht.

Die Formel (3) liefert nun, wenn wir auch noch rechts die Reihenentwicklung eintragen:

(9) $$\sum_m \left\{ \frac{1}{m} r^{\frac{m}{6}} \sum_\delta \delta \chi\left(\frac{m n}{\delta^2}\right) \right\} = a \sum_m \frac{\chi(m)}{m} r^{\frac{m}{6}}$$

als eine identisch bestehende Gleichung; eben dieserhalb entspringt durch Vergleich der Coefficienten gleich hoher Potenzen das Ergebnis:

$$a \chi(m) = \sum_\delta \delta \chi\left(\frac{m n}{\delta^2}\right),$$

wo wir jetzt zur Bestimmung von a den Wert $m = 1$ eintragen wollen. Es folgt dabei einfach $a = \chi(n)$ und übrigens nebenbei das bemerkenswerte *zahlentheoretische Resultat:*

(10) $$\chi(m)\chi(n) = \sum_\delta \delta \chi\left(\frac{m n}{\delta^2}\right);$$

summiert über alle gemeinsamen Teiler der beiden positiven Zahlen m und n, die gegen 6 prim sind.

Indem wir nun aber den durch die vorstehende Entwicklung in

Erfahrung gebrachten Wert $a = \chi(n)$ in den Integralansatz sechster Stufe (3) eintragen, entspringt das nachfolgende Ergebnis: *Die für die Modularcorrespondenz sechster Stufe n^{ter} Ordnung vom Schema* $\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ *charakteristische Integralrelation lautet:*

$$\sum_k j(R_k(\omega)) = \chi(n)\, j(\omega), \tag{11}$$

wo die ganze Zahl $\chi(n)$ die in (3) *p.* 589 *angegebene Bedeutung hat.* Wir haben hier also *„gewöhnliche" Correspondenzen von der Wertigkeit* $\chi(n)$. Die letztere ist insbesondere stets dann gleich Null, wenn $n = 6h - 1$ ist; aber auch unter den Fällen $n = 6h + 1$ sind viele, welche $\chi(n) = 0$ aufweisen. Indessen untersuchen wir dies hier nicht näher, begnügen uns vielmehr mit der nachfolgenden, unmittelbar zu ziehenden, Folgerung: *Ist $\chi(n) = 0$, so sind offenbar alle* 72 *zu diesem n gehörende Correspondenzen Wertigkeitscorrespondenzen; dagegen gilt dies bei solchen Ordnungen n, welche $\chi(n) \gtrless 0$ haben, nur vom dritten Teil, d. i. von* 24 *unter jenen* 72 *Correspondenzen.* Bei den übrigen $2 \cdot 24$ Relationen (11) tritt rechter Hand eine complexe dritte Einheitswurzel als Factor hinzu, was mit den bezüglichen allgemeinen Angaben des vorletzten Kapitels bei Rücksicht auf das äquianharmonische Doppelverhältnis unserer Fläche F_{72} des Geschlechtes $p = 1$ in Übereinstimmung ist.

§ 3. Die Integralrelationen für die Modularcorrespondenzen siebenter Stufe*).

Die eben zur sechsten Stufe gegebenen Entwicklungen sind typisch für alle jene ausgezeichneten Congruenzgruppen Γ_μ, bei denen nur eine einzelne arithmetische Entwicklungsfunction $\chi(m)$ oder $\psi(m)$ auftritt. Dies gilt abgesehen von der Stufe 6 auch noch von den Stufen 7 und 9, dagegen nicht mehr von der Hauptcongruenzgruppe der Stufen 8 und 10. Bei der achten Stufe haben wir zwei Entwicklungsfunctionen, die zu den ausgezeichneten Gruppen Γ_{48} und Γ_{96} gehören; wir werden also erst wieder analoge Verhältnisse wie bei $n = 6$ erhalten, wenn wir die Γ_{48} oder Γ_{96} einzeln behandeln. Bei der zehnten Stufe fanden wir bis jetzt überhaupt nur erst die Entwicklungsfunction $\chi(m)$ der von der Hauptcongruenzgruppe verschiedenen Γ_{120}; die Bildungsgesetze der übrigen Integrale dieser Stufe blieben im vorigen Kapitel unbekannt.

---

*) Siehe hierzu die in der Einleitung genannte Arbeit von Hurwitz im 25ten Annalenbande.

Aus dem gesamten hiermit bezeichneten Bereich derjenigen Fälle, die sich nach Art des vorigen Paragraphen behandeln lassen, sollen hier nur die zu $q = 7$ gehörende Γ_{168} und die Γ_{96} *achter Stufe* untersucht werden; wir werden nämlich nur an diese Gruppen bei unseren [illegible] Darlegungen ausführlicher anknüpfen.

[illegible] wir mit $q = 7$ beginnen, wählen wir n prim gegen 7 und [illegible] die erweiterte Transformation n^{ter} Ordnung mit dem Schema [illegible] ist dann in gewohnter Weise zu setzen:

$$R_k(\omega) = V_k\left(\frac{A_k\omega + 7B_k}{D_k}\right), \quad V_k \equiv \begin{pmatrix} D_k, & 0 \\ 0, & D_k^{-1} \end{pmatrix} \pmod{7}.$$

Für die drei Integrale siebenter Stufe benutzen wir die in (1) und (2) p. 583 getroffene particuläre Auswahl und haben alsdann die $\pi_{\alpha\gamma}$ in den Relationen:

$$\sum_k j(R_k(\omega) \mid \alpha) = \pi_\alpha + \sum_\gamma \pi_{\alpha\gamma} j(\omega \mid \gamma) \tag{2}$$

explicite zu berechnen.

Zu diesem Ende lasse man vorab eine vereinfachende Massregel eintreten. Man trage nämlich die Ausdrücke (1) für R_k in (2) ein und benutze das Verhalten der j gegenüber V_k; man hat dann:

$$\sum_k j\left(\frac{A_k\omega + 7B_k}{D_k} \mid D_k^2\alpha\right) = \pi_\alpha + \sum_\gamma \pi_{\alpha\gamma} j(\omega \mid \gamma). \tag{3}$$

Jetzt übe man die Substitution S aus, wodurch die linke Seite der letzten Gleichung, unter Aufnahme gleich näher zu bestimmender ganzer Zahlen e_k übergeht in:

$$\sum_k \varepsilon^{e_k D_k^2 \alpha} j\left(\frac{A_k\omega + 7B_k + (A_k - e_k D_k)}{D_k} \mid D_k^2\alpha\right).$$

Damit wir wieder zum Schema $\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ zurückgelangen, muss e_k im einzelnen Gliede dieser Summe so bestimmt werden, dass $A_k - e_k D_k$ durch 7 teilbar wird; dies liefert:

$$e_k D_k \equiv A_k, \quad e_k D_k^2 \equiv n \pmod{7},$$

so dass die linke Seite von (3) gegenüber S den Factor $\varepsilon^{n\alpha}$ annimmt.

Indem aber die rechte Seite von (3) gegenüber S das gleiche Verhalten zeigen, d. h. auch den Factor $\varepsilon^{n\alpha}$ annehmen muss, werden erstlich für einen quadratischen *Nichtrest* n von 7 alle Coefficienten $\pi_{\alpha\gamma}$ in (3) jedenfalls mit Null identisch sein müssen. Merken wir

uns demnach als erstes Resultat: *Ist die Ordnung n quadratischer Nichtrest von 7, so lauten die drei Integralrelationen unserer Correspondenz:*

$$(4)\qquad \sum_{k=0}^{\Phi(n)-1} j(R_k(\omega)\mid\alpha) = \pi_\alpha,$$

(wo die π_α unbestimmt bleiben mögen). *Hier haben wir also mit einer gewöhnlichen Correspondenz der Wertigkeit Null zu thun, und es zeigen dann,* wie man aus den früheren Sätzen leicht schliesst, *immer gleich alle* 168 *Correspondenzen dieser Ordnung die gleiche Eigenart.*

Ist hingegen *n quadratischer Rest* von 7, so wird unter den drei Coefficienten $\pi_{\alpha,1}$, $\pi_{\alpha,2}$, $\pi_{\alpha,4}$ auf der rechten Seite von (3) möglicherweise derjenige von Null verschieden sein, deren zweiter Index $\gamma\equiv n\alpha$ (mod. 7) ist; die beiden anderen werden jedoch sicher verschwinden. Indem wir die additive Constante im Augenblick ganz bei Seite lassen, haben wir sonach den Ansatz:

$$(5)\qquad \sum_k j\left(\frac{A_k\omega+7B_k}{D_k}\mid D_k^2\alpha\right) = c_\alpha j(\omega\mid n\alpha).$$

Es ist nunmehr dieser Ansatz (5) näher zu discutieren, und solches geschieht in der früheren Weise durch Eintragung der Reihenentwicklungen (4) p. 583 für unsere Integrale; wir treffen hierbei auf eine Entwicklung, die derjenigen des vorigen Paragraphen genau analog ist.

Erstlich liefert die linke Seite von (5) den Ausdruck:

$$(6)\qquad \sum_k \sum_{m'\equiv D_k^2\alpha} \frac{\psi(m')}{m'}\, e^{\frac{2m'\pi i B_k}{D_k}}\, r^{\frac{m'A_k}{7D_k}}.$$

Hier schreiben wir nun wieder:

$$\frac{m'A_k}{D_k}=m,\quad A_k=\delta,$$

so dass wir umgekehrt erhalten:

$$m'=\frac{mD_k}{A_k}=\frac{mn}{\delta^2},\quad \frac{m'B_k}{D_k}=\frac{mB_k}{\delta}.$$

Durch Eintragung in (6) nimmt dieser Ausdruck die Gestalt an:

$$\sum_m\sum_\delta\sum_B \frac{\delta^2}{mn}\psi\left(\frac{mn}{\delta^2}\right) e^{\frac{2m\pi i B_k}{\delta}}\, r^{\frac{m}{7}},$$

wobei betreffs der Summationsbedingungen Wort für Wort dasselbe gilt, wie in Formel (7) § 2. Die Summation über B lässt sich denn

auch hier wieder leicht ausführen, und wir gewinnen als explicite Gestalt der Formel (5) die nachfolgende:

$$(7) \qquad \sum_{m \equiv n\alpha} \left\{ \frac{1}{m} r^{\frac{m}{7}} \sum_{\delta} \delta \psi\left(\frac{mn}{\delta^2}\right) \right\} = c_\alpha \sum_{m \equiv n\alpha} \frac{\chi(m)}{m} r^{\frac{m}{7}}.$$

Die Coefficientenvergleichung ergiebt gerade wie im vorigen Paragraphen so auch jetzt für die eine arithmetische Function ψ_1 siebenter Stufe das Gesetz:

$$(8) \qquad \psi(m)\psi(n) = \sum_{\delta} \delta \psi\left(\frac{mn}{\delta^2}\right),$$

summiert über alle gemeinsamen Teiler δ von m und n, und wir finden somit im speciellen für den Fall relativ primer m, n die Regel:

$$\psi(m)\psi(n) = \psi(mn).$$

Vor allem aber ergiebt die gerade beendete Rechnung für die in (5) mit c_α bezeichnete Constante den Wert $\psi(n)$, und damit entspringt das Resultat: *Ist der Transformationsgrad n quadratischer Rest von 7, so lauten die zum ausgewählten Schema gehörenden Integralrelationen:*

$$(9) \qquad \sum_{k=0}^{\Phi(n)-1} j(R_k(\omega) \mid \alpha) = \pi_\alpha + \psi(n) \cdot j(\omega \mid n\alpha).$$

Bei einer späteren Gelegenheit werden wir zu untersuchen haben, für welche Reste n die Zahl $\psi(n)$ mit Null identisch ist. Heben wir gleich jetzt hervor, *dass in diesen Fällen verschwindender $\psi(n)$ alle 168 Correspondenzen gewöhnliche sind, und zwar von der Wertigkeit Null.* Ist $\psi(n)$ nicht gleich Null, so wählen wir eine der Bedingung:

$$V(\omega) \equiv \frac{n^{-\frac{1}{2}}\omega}{n^{\frac{1}{2}}}, \text{ (mod. 7)}$$

genügende Substitution aus und üben dieselbe auf die drei Relationen (9) aus. Solchergestalt werden wir linker Hand vom Schema $\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ zu

$$(10) \qquad R' = RV \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{n}, & 0 \\ 0, & \sqrt{n} \end{pmatrix} \text{ (mod. 7)},$$

geführt, und diesem besonderen Schema entspricht dann bei der Wirkung von V auf $j(\omega \mid n\alpha)$ das System der Integralrelationen:

$$(11) \qquad \sum_{k} j(R'_k(\omega) \mid \alpha) = \pi_\alpha + \psi(n) \cdot j(\omega \mid \alpha).$$

Nur zum Schema (10) *gehört somit bei $\psi(n) \gtrless 0$ eine gewöhnliche Correspondenz, und zwar von der Wertigkeit $-\psi(n)$; alle* 167 *anderen Corre-*

spondenzen sind nun singuläre, was mit der schon p. 556 *erkannten singulären Natur unserer Fläche* F_{168} *vereinbar ist.* Zum Beweise hat man nur zu beachten, dass einzig die mod. 7 mit 1 congruenten Substitutionen alle drei Integrale $j(\omega \mid \alpha)$ bis auf additive Constante in sich überführen.

§ 4. Mitteilung der Integralrelationen für die zur Γ_{96} achter Stufe gehörenden Correspondenzen.

Unter den ausgezeichneten Congruenzgruppen *achter* Stufe berücksichtigen wir, wie schon gesagt, nur die Gruppe Γ_{96}, welche alle mit $\begin{pmatrix}1, 0\\0, 1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}3, 0\\0, 3\end{pmatrix}$ mod. 8 congruenten Modulsubstitutionen enthält. Diese Gruppe ist vom Geschlechte $p = 3$, und es gehört zu ihr als Normalcurve der φ die durch (2) p. 29 gegebene Curve vierter Ordnung. Die spätere Betrachtung der Modularcorrespondenzen auf dieser C_4 veranlasst uns, schon hier die Integralrelationen zusammenzustellen, welche zu den Correspondenzen der Γ_{96} gehören. Es wird gestattet sein, die Beweise dieser Relationen der Kürze halber zu überspringen; in der That gestalten sich dieselben durchaus gerade so, wie eben bei $q = 7$.

Die drei Integrale j_1, j_2, j_3 der Γ_{96} sind p. 591 angegeben worden, und ihre eine Entwicklungsfunction $\chi(n)$ wurde dortselbst unter (13) im Anschluss an die binäre quadratische Form (1, 0, 4) definiert. Der Transformationsgrad n hat hier nur der einen Bedingung zu genügen, eine *ungerade* Zahl vorzustellen, und die einfachste Gestalt des zum Schema $\begin{pmatrix}n, 0\\0, 1\end{pmatrix}$ gehörenden Repräsentantensystems ist nach den bezüglichen allgemeinen Regeln gegeben durch:

$$R(\omega) = \frac{A\omega + 8B}{D}, \tag{1}$$

wo die Zahlen A, B, D immer wieder den bekannten Bedingungen:

$$AD = n, \quad 0 \leq B < D \tag{2}$$

zu genügen haben. Natürlich benutzen wir nach wie vor die erweiterte Transformation n^{ter} Ordnung. Ähnlich wie bei $n = 6$ beziehen wir hier übrigens die Entwicklungsfunction $\chi(n)$ auf *alle* ungeraden positiven Zahlen n. Für die Zahlen $n = 4h - 1$ wird dann $\chi(n)$ stets mit Null identisch sein, da Zahlen dieser Gestalt durch die ganzzählige binäre Form (1, 0, 4) nicht darstellbar sind.

Die Integralrelationen für die n^{te} *Ordnung unter Benutzung des Repräsentantensystems* (1) *lauten nun einfach:*

$$(3)\qquad \begin{cases} \sum j_1\left(\frac{A\omega+8B}{D}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{4}}\chi(n)\cdot j_1(\omega), \\ \sum j_2\left(\frac{A\omega+8B}{D}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{4}}\chi(n)\cdot j_2(\omega), \\ \sum j_3\left(\frac{A\omega+8B}{D}\right) = \qquad\qquad \chi(n)\cdot j_3(\omega). \end{cases}$$

Additive Constante treten bei der hiermit gewählten Gestalt unserer Relationen nicht auf, da für $\omega = i\infty$ immer beide Seiten der Gleichungen zugleich verschwinden. Wann gewöhnliche und wann singuläre Correspondenzen vorliegen, wird man nun aus (3) leicht ablesen können, wenn man noch das Verhalten der j_1, j_2, j_3 gegenüber den 96 inäquivalenten Substitutionen berücksichtigt. Merken wir etwa insbesondere gleich an, *dass für $n = 4h + 3$ stets gewöhnliche Correspondenzen der Wertigkeit Null vorliegen.*

§ 5. Primformdarstellung und Coincidenzenanzahl der Modularcorrespondenzen im Falle einer einzelnen Entwicklungsfunction, bei $q = 7$ erläutert.

Die Darstellung der Modularcorrespondenzen sechster, siebenter und achter Stufe durch die Primform soll hier nicht im vollen Umfange geleistet werden. Da es sich vielmehr in allen drei Fällen um ganz ähnliche Betrachtungen handelt, so genüge die Besprechung des Falles $q = 7$.

Man setze erstlich voraus, dass die Ordnung n der Transformation *quadratischer Rest von* 7 sei, und wähle übrigens für die erweiterte Transformation ein der Bedingung:

$$(1)\qquad R_0 \equiv R_1 \equiv \cdots \equiv R_{\Phi-1} \equiv \begin{pmatrix}\sqrt{n}, & 0\\ 0, & \sqrt{n}\end{pmatrix} \pmod{7}$$

genügendes Repräsentantensystem. Die zugehörigen Integralrelationen lauten dann, wie wir im vorletzten Paragraphen fanden:

$$(2)\qquad \sum_k j(R_k(\omega)\mid\alpha) = \pi_\alpha + \psi_1(n)\cdot j(\omega\mid\alpha),$$

wo ψ_1 die eine bei $q = 7$ auftretende Entwicklungsfunction ist. Die *Primformdarstellung* der vorliegenden Modularcorrespondenz lässt sich hier nach der allgemeinen Vorschrift p. 535 ff. ohne weiteres leisten*).

*) Man bemerke dabei vielleicht noch, dass die Formeln (2) unmittelbar für die Normalintegrale in Gültigkeit bleiben, wenn wir nur π_α entsprechend modificiert denken. Es ist dies eine einfache Folge des Umstandes, dass auf der rechten Seite von (2) der Coefficient des Integrals $j(\omega\mid\alpha)$ von α unabhängig ist.

Sind ω und ω' zwei variabele Punkte des Polygons F_{168}, während man unter ω_0 und ω_0' zwei specielle Lagen dieser Punkte versteht, so bilde man den Primformquotienten:

$$(3)\quad F(\omega, \omega' \mid \omega_0, \omega_0') = \left[\frac{P(\omega', \omega) P(\omega_0', \omega_0)}{P(\omega_0', \omega) P(\omega', \omega_0)}\right]^{-\psi_1(n)} \prod_k \frac{P(\omega', R_k(\omega)) P(\omega_0', R_k(\omega_0))}{P(\omega_0', R_k(\omega)) P(\omega', R_k(\omega_0))}.$$

Es liefert alsdann nach den citierten allgemeinen Erörterungen (p. 536) $F(\omega, \omega' \mid \omega_0, \omega_0')$ *in Abhängigkeit jedes der vier Punkte* $\omega, \omega', \omega_0, \omega_0'$ *eine algebraische Modulfunction siebenter Stufe, und es wird insbesondere durch die Gleichung:*

$$(4)\qquad F(\omega, \omega' \mid \omega_0, \omega_0') = 0$$

unsere Correspondenz in der früher ausführlich charakterisierten Weise dargestellt.

Die übrigen 167 für die vorliegende Ordnung bestehenden Correspondenzen sind nun von den Formeln (3), (4) aus nach den früheren Sätzen leicht mit zu erledigen. Indem wir V_i ein System mod. 7 incongruenter Modulsubstitutionen durchlaufen lassen, haben wir für das einzelne V_i zu schreiben:

$$F(V_i(\omega), \omega' \mid V_i(\omega_0), \omega_0') = F_i(\omega, \omega' \mid \omega_0, \omega_0'),$$

um die zugehörige Correspondenz durch Nullsetzen von $F_i(\omega, \omega' \mid \omega_0, \omega_0')$ *darzustellen.* Explicite haben wir also, indem wir

$$(5)\qquad R_k V_i = R_k^{(i)} \equiv \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} \pmod{7}$$

setzen, für die Modulfunction F_i die Primformdarstellung:

$$(6)\quad \begin{cases} F_i(\omega, \omega' \mid \omega_0, \omega_0') = \\ = \left[\frac{P(\omega', V_i(\omega)) P(\omega_0', V_i(\omega_0))}{P(\omega_0', V_i(\omega)) P(\omega', V_i(\omega_0))}\right]^{-\psi_1(n)} \prod_k \frac{P(\omega', R_k^{(i)}(\omega)) P(\omega_0', R_k^{(i)}(\omega_0))}{P(\omega_0', R_k^{(i)}(\omega)) P(\omega', R_k^{(i)}(\omega_0))}. \end{cases}$$

Man bemerke, wie sich die hiermit gegebene Darstellung der Correspondenzen siebenter Stufe in die allgemeinen Ansätze von p. 550 ff. subsumiert. Für jedes der 168 Schemata (5) haben wir eine besondere Correspondenz zur „Minimalbasis" im Sinne von p. 549 ausgewählt, und zwar nur eine, dem Umstande entsprechend, dass wir bei $q = 7$ nur *eine* arithmetische Function ψ_1 haben. *Die ausgewählte Correspondenz ist aber einfach die zum Schema* (5) *gehörende Correspondenz erster Ordnung:* $\omega' = V_i(\omega)$, *d. h. die zu* V_i *gehörende Transformation der Fläche* F_{168} *in sich.*

Der Fall eines *quadratischen Nichtrestes* n subsumiert sich unmittelbar unter den allgemeinen Ansatz (6), indem jetzt stets $\psi_1(n) = 0$

ist. Die Function $F_i(\omega, \omega' \mid \omega_0, \omega_0')$ hat demnach jetzt einfach die Gestalt:

$$(7) \qquad F_i(\omega, \omega' \mid \omega_0, \omega_0') = \prod_k \frac{P(\omega', R_k^{(i)}(\omega))\, P(\omega_0', R_k^{(i)}(\omega_0))}{P(\omega_0', R_k^{(i)}(\omega))\, P(\omega', R_k^{(i)}(\omega_0))}.$$

Die *Coincidenzenanzahl* bei den Modularcorrespondenzen 7[ter] Stufe ist in allen Fällen „gewöhnlicher" Correspondenzen einfach nach der Cayley-Brill'schen Formel (9) p. 539 anzugeben; letztere Formel findet also unmittelbare Anwendung für alle Nichtreste n und unter den Resten n stets beim Schema (1). Wir können sagen, dass es sich in allen diesen Fällen um die Wertigkeit $-\psi_1(n)$ handelt, insofern ja für die Nichtreste n die Function ψ_1 verschwindet. Da die Γ_{168} das Geschlecht $p = 3$ besitzt, so specificiert sich die Angabe $\alpha + \beta + 2p\varkappa$ für die Coincidenzenanzahl ν hier zu:

$$(8) \qquad \nu = 2\Phi(n) - 6\psi_1(n).$$

Indessen erfordert diese Formel in dem speciellen Falle einer rein quadratischen Ordnung n eine Ergänzung. Hier wollen wir nämlich bei der erweiterten Transformation, gerade wie auch früher in der Theorie der Modulargleichungen, den Repräsentanten der Transformation *erster* Ordnung ausschalten. *Indem wir an dieser Massnahme auch in der Folge wieder festhalten, wird es sich im fraglichen Ausnahmefalle um eine* $(\Phi - 1)$-$(\Phi - 1)$-*deutige Correspondenz der Wertigkeit* $-\psi_1(n) + 1$ *handeln;* in der That fällt jetzt auf der rechten und linken Seite jeder Relation (2) ein einzelnes Glied $j(\omega \mid \alpha)$ aus. Die Cayley-Brill'sche Formel liefert demnach jetzt:

$$(9) \quad \nu = 2\Phi(n) - 2 - 6[\psi_1(n) - 1] = 2\Phi(n) - 6\psi_1(n) + 4.$$

Um beide Formeln (8) und (9) in eins zusammenzuziehen, verstehen wir unter ε_n nach früherem Brauche die 1, falls n ein reines Quadrat ist, anderenfalls aber die Null. Als Resultat kommt alsdann: *Die Coincidenzenanzahl ν ist im Falle eines Nichtrestes n, sowie im Falle eines Restes beim Schema* (1) *gegeben durch:*

$$(10) \qquad \nu = 2\Phi(n) - 6\psi_1(n) + 4\varepsilon_n.$$

Jetzt sind noch die 167 Correspondenzen (6) im Falle eines Restes n rückständig, und hier können wir einfach in der zugehörigen Function $F_i(\omega, \omega' \mid \omega_0, \omega_0')$ die beiden Punkte ω, ω' zur Coincidenz bringen, um (bei constant gedachten ω_0, ω_0') in $F_i(\omega, \omega \mid \omega_0, \omega_0')$ eine algebraische Modulfunction von ω zu gewinnen. Durch Abzählung der Null- und Unstetigkeitspunkte gewinnt man dann in bekannter Überlegung (p. 539) die jetzt gesuchte Zahl ν. Man wird gegen-

über der eben citierten Entwicklung hier nur die eine Änderung bemerken, dass die Anzahl der Nullpunkte von $P(\omega, V_i(\omega))$ auf dem Polygon F_{168} nicht unmittelbar angegeben werden kann. Nennen wir diese im Augenblick noch unbekannte Zahl k, *so folgt im Falle eines Restes n für ein von* (1) *verschiedenes Schema* (5) *als Coincidenzenanzahl:*

$$(11) \qquad \nu = 2\Phi(n) - 2\psi_1(n) + k\psi_1(n).$$

Die Anzahl k aber ist, wie man jetzt endlich bemerken wolle, als Zahl der Nullpunkte von $P(\omega, V_i(\omega))$ nichts anderes als die Coincidenzenanzahl der Correspondenz $\omega' = V_i(\omega)$ oder (um es mit der früheren Bezeichnung zu belegen) nichts anderes als die *Anzahl der Fixpunkte der Transformation V_i der F_{168} in sich.* Nach bekannten Sätzen aus Bd. I hat man also ohne weiteres die Resultate: *Es ist:*

$$(12) \qquad k = 4, 2, 3, 0,$$

je nachdem die Summe von α und δ bei der Substitution V_i bez. der Bedingung:

$$\alpha + \delta \equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pmod{7}$$

genügt.

An die hiermit für $q = 7$ vollständig geleistete Bestimmung der Anzahl ν knüpfen wir im nächstfolgenden Kapitel wieder an.

§ 6. Ansatz für die Integralrelationen der $j(\omega \mid \alpha)$, $j(\omega \mid \beta)$ bei den Modularcorrespondenzen einer beliebigen Primzahlstufe q*).

Der elementare Charakter der voraufgehenden Betrachtungen beruhte auf dem Umstande, dass in den bisher erledigten Fällen jeweils nur *eine* zahlentheoretische Entwicklungsfunction in Betracht kam. Wird die Anzahl dieser Functionen > 1, wie schon bei $q = 11$, wo wir deren fünf haben, so müssen wir bei der Aufstellung der Integralrelationen indirect verfahren. Indem wir das hiermit gemeinte Verfahren sogleich im allgemeinen Falle q (den wir im vorigen Kapitel vorbereiteten) skizzieren wollen, genügt es, wenn wir dabei allein die Integrale $j(\omega \mid \alpha)$ und $j(\omega \mid \beta)$ in Betracht ziehen. In der That werden wir bei den späteren Anwendungen (§ 9) die Integrale $j(\omega \mid 0)$ des Teilungspolygons durch ein indirectes Schlussverfahren gleich selbst mit erledigen, wobei uns die bezüglichen Entwicklungen des vorigen Kapitels (p. 566 ff.) zu statten kommen sollen.

Des besseren Überblicks halber senden wir voraus, dass in den

*) Man vergl. hier die Note von Hurwitz in den Leipziger Berichten vom 4. Mai 1885, auf welche wir schon wiederholt Bezug nahmen.

nächstfolgenden Formeln e, f, g, h als Summationsbuchstaben gebraucht werden sollen, und zwar sollen sich dieselben auf die Bereiche beziehen:

$$e, f = 1, 2, \cdots, \lambda; \quad g, h = 1, 2, \cdots, \mu.$$

Die Zahlen λ, μ haben wir dabei im Sinne des vorigen Kapitels beibehalten, wo für jeden quadratischen Rest α insgesamt λ Integrale $j_e(\omega \mid \alpha)$ ausgewählt wurden und für jeden Nichtrest β μ Integrale $j_g(\omega \mid \beta)$.

Indem wir jetzt bei vorgegebener Ordnung n der erweiterten Transformation am Schema $\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ wie bisher festhalten und dann in $R_0, R_1, \ldots$ ein zugehöriges Repräsentantensystem bilden, ist unsere Aufgabe, *die Integralsummen:*

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{\Phi-1} j_e(R_k(\omega) \mid \alpha), \quad \sum_{k=0}^{\Phi-1} j_g(R_k(\omega) \mid \beta)$$

durch die ursprünglichen p Integrale q^{ter} Stufe linear auszudrücken. Hierbei haben wir zur Abkürzung Φ statt $\Phi(n)$ geschrieben, und es ist für jede in Betracht kommende Combination e, α, sowie für jede Combination g, β eine Summe (1) zu bilden.

Um die gedachten Integralrelationen wirklich zu gewinnen, übe man erstlich auf ω in (1) die Substitution S aus und berücksichtige dabei die offenbar zutreffende Congruenz:

$$S^{-n} \cdot \begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \cdot S \equiv \begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{mod. } q).$$

Es ergiebt sich hieraus leicht, dass die erste Summe (1) gegenüber S den Factor $\varepsilon^{n\alpha}$ annimmt, die zweite aber den Factor $\varepsilon^{n\beta}$; jene erste Summe ist also in denjenigen λ bez. μ Integralen linear darstellbar, welche eben diesen Factor $\varepsilon^{n\alpha}$ gegenüber S aufnehmen, und die zweite Summe (1) entsprechend in den μ bez. λ Integralen vom Factor $\varepsilon^{n\beta}$. Wie man sieht, tritt hier die Fallunterscheidung ein, ob n quadratischer Rest oder Nichtrest von q ist. In der That werden wir gleich explicite sondern und haben als die zu discutierenden Ansätze:

I. im Falle eines quadratischen Restes n von q:

$$(2) \qquad \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\Phi-1} j_e(R_k(\omega) \mid \alpha) = \sum\limits_{f=1}^{\lambda} a_{ef}(n)\, j_f(\omega \mid n\alpha), \\ \sum\limits_{k=0}^{\Phi-1} j_g(R_k(\omega) \mid \beta) = \sum\limits_{h=1}^{\mu} b_{gh}(n)\, j_h(\omega \mid n\beta), \end{cases}$$

II. im Falle eines quadratischen Nichtrestes n von q:

$$(3)\quad \begin{cases} \sum_{k=0}^{\Phi-1} j_e(R_k(\omega) \mid \alpha) = \sum_{h=1}^{\mu} c_{eh}(n)\, j_h(\omega \mid n\alpha), \\ \sum_{k=0}^{\Phi-1} j_g(R_k(\omega) \mid \beta) = \sum_{f=1}^{\lambda} d_{gf}(n)\, j_f(\omega \mid n\beta). \end{cases}$$

Hierzu gleich die nachfolgenden Erläuterungen: Erstlich sollten wir bei diesen Ansätzen strenge genommen allenthalben rechter Hand additive Constante hinzunehmen; aber dieselben sind, wie früher, als unwesentlich um der einfachen Schreibweise der Formeln willen stets ausgelassen. Ferner: Die Coefficienten a, b, c, d auf den rechten Seiten von (2) und (3) werden natürlich mit wechselndem n andere und andere Werte darbieten; in diesem Sinne haben wir sie in (2) und (3) gleich als Functionen der Ordnung n geschrieben, wobei dann natürlich Functionen $a(n)$ und $b(n)$ nur für Reste, Functionen $c(n)$ und $d(n)$ nur für Nichtreste n in Betracht kommen. Es ist aber sehr zu betonen, *dass in der einzelnen unserer Formeln* (2), (3) *die Zahlwerte a bez. b, c, d unabhängig sind von dem besonderen Reste α bez. dem besonderen Nichtreste β.* Dies sieht man leicht ein, wenn man auf das ω der einzelnen Formel (2), (3) die schon p. 565 eingeführte Substitution U ausübt und dabei die leicht zu verificierende Congruenz:

$$U^{-1} \cdot \begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \cdot U \equiv \begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \pmod{q}$$

in Betracht zieht. Man hat also (immer unter Gebrauch des einmal ausgewählten Schemas) beim einzelnen Reste n insgesamt λ^2 Coefficienten a_{ef} und μ^2 Coefficienten b_{gh}, dagegen bei einem Nichtreste n im ganzen $\lambda\mu$ Coefficienten c_{eh} und ebenso viele d_{gf}.

Zur näheren Untersuchung der in Rede stehenden Coefficienten schreibe man jetzt explicite:

$$R_k(\omega) = V_k\left(\frac{A_k\,\omega + q\,B_k}{D_k}\right), \quad V_k \equiv \begin{pmatrix} D_k, & 0 \\ 0, & D_k^{-1} \end{pmatrix}$$

und trage demnächst die im vorigen Kapitel p. 579 gegebenen Potenzentwicklungen für unsere Integrale ein. Indem wir dann immer nach ansteigenden Potenzen linker Hand umordnen, tritt eine Rechnung ein, wie wir sie in den voraufgehenden Paragraphen öfter durchgeführt haben; z. B. für die erste Reihe (2) finden wir linker Hand in der nach ansteigenden Potenzen von r geordneten Entwicklung den Coefficienten der Potenz $r^{\frac{m}{q}}$ in der typischen Gestalt:

$$\sum_\delta \delta\,\psi_e\left(\frac{mn}{\delta^2}\right),$$

wo sich die Summe auf die gemeinsamen Teiler δ von m und n bezieht. Der Vergleich der Coefficienten gleicher Potenzen rechts und links ergiebt alsdann in unseren vier Fällen (2), (3) die Resultate:

$$(4)\quad \begin{cases} \sum\limits_\delta \delta\,\psi_e\left(\frac{mn}{\delta^2}\right) = \sum\limits_{f=1}^{\lambda} a_{ef}(n)\,\psi_f(m), & \left(\frac{n}{q}\right) = +1, \left(\frac{m}{q}\right) = +1, \\ \sum\limits_\delta \delta\,\chi_g\left(\frac{mn}{\delta^2}\right) = \sum\limits_{h=1}^{\mu} b_{gh}(n)\,\chi_h(m), & \left(\frac{n}{q}\right) = +1, \left(\frac{m}{q}\right) = -1, \\ \sum\limits_\delta \delta\,\psi_e\left(\frac{mn}{\delta^2}\right) = \sum\limits_{h=1}^{\mu} c_{eh}(n)\,\chi_h(m), & \left(\frac{n}{q}\right) = -1, \left(\frac{m}{q}\right) = -1, \\ \sum\limits_\delta \delta\,\chi_g\left(\frac{mn}{\delta^2}\right) = \sum\limits_{f=1}^{\lambda} d_{gf}(n)\,\psi_f(m), & \left(\frac{n}{q}\right) = -1, \left(\frac{m}{q}\right) = +1, \end{cases}$$

wobei die für den einzelnen dieser Fälle charakteristischen Legendreschen Zeichen immer gleich rechter Hand angefügt sind. Diese Formeln sollen uns nun zur Bestimmung der a, b, c, d das Fundament abgeben.

Zuvörderst folgert man aus (2) und (3) vermöge der linearen Unabhängigkeit der Integrale $j(\omega \mid \alpha)$, $j(\omega \mid \beta)$ leicht, *dass die $a_{ef}(n)$ etc. eindeutige arithmetische Functionen von n sind.* Um aber über diese Functionen Genaueres anzugeben, benutzen wir nun den Umstand, dass die linken Seiten der Gleichungen (4) durchgehends symmetrisch von m und n abhängen. Also wird auch z. B. in der ersten Formel (4), wo m und n zugleich quadratische Reste von q sind, die rechter Hand stehende Summe ihren Wert bei Vertauschung von m und n nicht ändern. Ein Gleiches gilt auch für die dritte Formel (4), in welcher m und n gleichfalls im quadratischen Charakter modulo q übereinstimmen; wir haben also die Ergebnisse:

$$(5)\quad \begin{cases} \sum\limits_{f=1}^{\lambda} a_{ef}(n)\,\psi_f(m) = \sum\limits_{f=1}^{\lambda} a_{ef}(m)\,\psi_f(n), \text{ für } \left(\frac{n}{q}\right) = +1, \left(\frac{m}{q}\right) = +1, \\ \sum\limits_{h=1}^{\mu} c_{eh}(n)\,\chi_h(m) = \sum\limits_{h=1}^{\mu} c_{eh}(m)\,\chi_h(n), \text{ für } \left(\frac{n}{q}\right) = -1, \left(\frac{m}{q}\right) = -1. \end{cases}$$

Stimmen aber m und n in ihren quadratischen Charakteren mod. q nicht überein, so liefern in analoger Art die zweite und vierte Relation (4), mit einander combiniert, das Resultat:

(6) $$\sum_{h=1}^{\mu} b_{gh}(n)\,\chi_h(m) = \sum_{f=1}^{\lambda} d_{gf}(m)\,\psi_f(n),\ \text{für } \left(\frac{n}{q}\right) = 1,\ \left(\frac{m}{q}\right) = -1.$$

Jetzt bilde man die erste Relation (5) bei einem einzelnen vorgelegten Reste n und bei stehend gedachtem e, indem man für m der Reihe nach λ specielle Reste $m_1, m_2, \ldots, m_\lambda$ einträgt. Die letzteren können wir nach p. 580 so gewählt denken, dass die λ-gliedrige Determinante $|\ \psi_f(m_{f'})\ |$ einen von Null verschiedenen Wert hat. Die damit bei stehendem e für jeden Rest n gewonnenen λ Gleichungen fassen wir als solche für die λ unbekannten Grössen $a_{e1}(n), \ldots, a_{e\lambda}(n)$ auf. Unser Gleichungssystem hat eine von Null verschiedene Determinante, und die rechten Seiten sind ersichtlich lineare homogene Verbindungen der λ von n abhängenden Functionen $\psi_1(n), \ldots, \psi_\lambda(n)$ mit von n unabhängigen, durch die Auswahl der $m_1, m_2, \ldots, m_\lambda$ fest bestimmten, Coefficienten. Durch Auflösung des fraglichen Gleichungssystems finden wir das sehr wichtige Ergebnis: *Es ist $a_{ef}(n)$ eine lineare homogene Function der λ Werte $\psi_1(n), \ldots, \psi_\lambda(n)$:*

(7) $$a_{ef}(n) = \alpha_{ef}^{(1)}\psi_1(n) + \alpha_{ef}^{(2)}\psi_2(n) + \cdots + \alpha_{ef}^{(\lambda)}\psi_\lambda(n)$$

mit Coefficienten α_{ef}, die von n unabhängig sind.

Es könnte scheinen, dass die λ Coefficienten α_{ef} vielleicht noch von den particulär ausgewählten λ Resten m_f abhängig sein möchten. *Es sind indessen die $\alpha_{ef}^{(1)}, \ldots, \alpha_{ef}^{(\lambda)}$ gewisse λ bei der q^{ten} Stufe für stehende Combination (ef) eindeutig bestimmte Grössen.* Könnten wir nämlich die Function $a_{ef}(n)$ für alle positiven Reste n noch durch ein zweites Zahlsystem $\bar{\alpha}_{ef}^{(1)}, \ldots, \bar{\alpha}_{ef}^{(\lambda)}$ ebenfalls in der Gestalt (7) darstellen, so gäbe es augenscheinlich ein System nicht durchgehends verschwindender Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_\lambda$, welches der Gleichung

$$\alpha_1\psi_1(n) + \alpha_2\psi_2(n) + \cdots + \alpha_\lambda\psi_\lambda(n) = 0$$

für jeden Rest n genügte. Damit aber wären offenbar die λ Integrale $j_1(\omega\,|\,\alpha), \ldots, j_\lambda(\omega\,|\,\alpha)$ linear-abhängig.

Die übrigen Relationen (5), (6) ziehen wir nun zu völlig analogem Gebrauche heran. *Indem wir zusammenfassen, ergeben sich die Darstellungen:*

(8) $$\begin{cases} a_{ef}(n) = \alpha_{ef}^{(1)}\psi_1(n) + \alpha_{ef}^{(2)}\psi_2(n) + \cdots + \alpha_{ef}^{(\lambda)}\psi_\lambda(n), \\ b_{gh}(n) = \beta_{gh}^{(1)}\psi_1(n) + \beta_{gh}^{(2)}\psi_2(n) + \cdots + \beta_{gh}^{(\lambda)}\psi_\lambda(n), \end{cases}$$

sowie entsprechend für die c, d:

(9) $$\begin{cases} c_{eh}(n) = \gamma_{eh}^{(1)}\chi_1(n) + \gamma_{eh}^{(2)}\chi_2(n) + \cdots + \gamma_{eh}^{(\mu)}\chi_\mu(n), \\ d_{gf}(n) = \delta_{gf}^{(1)}\chi_1(n) + \delta_{gf}^{(2)}\chi_2(n) + \cdots + \delta_{gf}^{(\mu)}\chi_\mu(n). \end{cases}$$

Dabei beziehen sich natürlich die Formeln (8) auf die Reste n, die Formeln (9) auf die Nichtreste. *Überall aber sind die Coefficientensysteme $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ von n unabhängig und eindeutig bestimmt.* Wie man sie zu bestimmen vermag, werden wir im nächsten Paragraphen am Beispiele $q = 11$ betrachten.

§ 7. Wirkliche Aufstellung der Integralrelationen für $q = 11$.

Bei der Hauptcongruenzgruppe elfter Stufe fanden wir im vorigen Kapitel im ganzen *fünf* Entwicklungsfunctionen, drei für die Reste n, nämlich $\psi_1(n)$, $\psi_2(n)$, $\psi_3(n)$, und zwei, $\chi_1(n)$, $\chi_2(n)$, für die Nichtreste. Die arithmetische Definition dieser Functionen wurde im vorigen Kapitel vollständig geleistet. Wir wollen von den dort gegebenen Regeln aus zum Zwecke der weiter folgenden Rechnungen für niedere Argumente n eine Tabelle für die zugehörigen Werte der ψ, χ anlegen:

n	ψ_1	ψ_2	ψ_3	n	χ_1	χ_2
1	−1	1	0	2	0	−1
3	1	1	−1	6	1	0
4	2	0	1	7	−1	0
5	3	1	0	8	−1	1
9	2	0	−1	10	0	−1
12	−2	−2	0	13	1	1
14	0	0	2	17	−2	1
15	−3	1	−1	18	1	1
16	−4	−2	−1	19	2	−2
20	−6	0	1	21	−1	2
23	9	1	−1	24	−2	2
25	−4	−4	0	28	0	−2
26	0	−2	−3	29	3	−3
27	−5	−1	3	30	1	0
31	5	1	3	32	3	1
34	0	−2	3	35	−1	0
36	−4	−2	−1	39	0	−2
37	−7	−1	2	40	−1	1
38	0	4	−2	41	−3	−1
42	0	−4	0	43	−1	−2

Unsere Aufgabe ist nun, für den Fall $q = 11$ die Relationen (8), (9) § 6 explicite zu berechnen. Zu diesem Ende specialisieren wir

zuvörderst die erste Relation (4) § 6 für $q = 11$; es ergiebt sich:

$$(1) \qquad a_{e1}(n)\psi_1(m) + a_{e2}(n)\psi_2(m) + a_{e3}(n)\psi_3(m) = \sum_{\delta} \delta\psi_e\left(\frac{mn}{\delta^2}\right).$$

Hier substituiere man der Reihe nach die drei quadratischen Reste $m = 1, 3, 5$ und findet unter Benutzung der vorstehenden Tabelle das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -a_{e1}(n) + a_{e2}(n) \qquad &= \psi_e(n), \\ a_{e1}(n) + a_{e2}(n) - a_{e3}(n) &= \sum \delta\,\psi_e\left(\frac{3n}{\delta^2}\right), \\ 3a_{e1}(n) + a_{e2}(n) \qquad &= \sum \delta\,\psi_e\left(\frac{5n}{\delta^2}\right). \end{aligned}$$

Durch Auflösung dieses Gleichungssystems findet man Ausdrücke der $a_{ef}(n)$ durch die ψ, aber freilich noch nicht diejenigen Darstellungen (8) § 6, um welche es sich eigentlich handeln soll. Immerhin benutzen wir doch die zunächst für die $a_{ef}(n)$ erhaltenen Formeln, um für die drei ersten in Betracht kommenden Zahlen $n = 1, 3, 4$ die zugehörigen Werte der neun Functionen $a_{ef}(n)$ zu berechnen; man findet:

$$\text{für } n = 1 \quad \begin{cases} a_{11} = 1, & a_{12} = 0, & a_{13} = 0, \\ a_{21} = 0, & a_{22} = 1, & a_{23} = 0, \\ a_{31} = 0, & a_{32} = 0, & a_{33} = 1, \end{cases}$$

$$\text{für } n = 3 \quad \begin{cases} a_{11} = -1, & a_{12} = 0, & a_{13} = 0, \\ a_{21} = 0, & a_{22} = 1, & a_{23} = -2, \\ a_{31} = 0, & a_{32} = -1, & a_{33} = 0, \end{cases}$$

$$\text{für } n = 4 \quad \begin{cases} a_{11} = -2, & a_{12} = 0, & a_{13} = 0, \\ a_{21} = 0, & a_{22} = 0, & a_{23} = 2, \\ a_{31} = 0, & a_{32} = 1, & a_{33} = 1. \end{cases}$$

Nunmehr ziehe man auch die erste Formel (5) § 6 heran und setze in derselben, indem wir sie vielleicht zunächst für $e = 1$ specialisieren, für m nach einander die Werte 1, 3, 4 ein. Wenn wir die eben gefundenen Zahlwerte der a_{ef} sowie die Werte der ψ_e berücksichtigen, entspringen solchergestalt die drei Gleichungen:

$$(2) \qquad \begin{cases} -a_{11}(n) + a_{12}(n) \qquad\qquad = +\psi_1(n), \\ +a_{11}(n) + a_{12}(n) - a_{13}(n) = -\psi_1(n), \\ \;2a_{11}(n) \qquad\qquad + a_{13}(n) = -2\psi_1(n). \end{cases}$$

Die Auflösung derselben ergiebt die gewünschten Ausdrücke für die drei Functionen $a_{1f}(n)$. Die übrigen sechs $a_{ef}(n)$ erledigen sich in

derselben Art, *und wir gewinnen so als die linearen homogenen Ausdrücke der neun arithmetischen Functionen* $a_{ef}(n)$ *in den drei* $\psi_e(n)$:

$$(3)\quad \begin{cases} a_{11}(n) = -\psi_1(n), & a_{12}(n) = 0, & a_{13}(n) = 0, \\ a_{21}(n) = 0, & a_{22}(n) = \psi_2(n), & a_{23}(n) = 2\psi_3(n), \\ a_{31}(n) = 0, & a_{32}(n) = \psi_3(n), & a_{33}(n) = \psi_2(n) + \psi_3(n). \end{cases}$$

Für die quadratischen Reste n kommen ausserdem noch, wie wir wissen, *vier* arithmetische Functionen $b_{gh}(n)$ in Betracht, die wir jetzt noch in $\psi_e(n)$ darzustellen haben. Die Rechnung gestaltet sich infolge der Minderzahl der b noch einfacher, als soeben bei den a, *und man erhält als die linearen Ausdrücke der vier* $b_{gh}(n)$ *durch die* $\psi_e(n)$:

$$(4)\quad \begin{cases} b_{11}(n) = \psi_2(n), & b_{12}(n) = \psi_3(n) \\ b_{21}(n) = 2\psi_3(n), & b_{22}(n) = \psi_2(n) + \psi_3(n). \end{cases}$$

Die Integralrelationen selbst werden daraufhin unter Beibehaltung des Schemas $\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ *im Falle eines quadratischen Restes* n *die Gestalt darbieten:*

$$(5)\quad \begin{cases} \sum_k j_1(R_k(\omega) \mid \alpha) = -\psi_1 \cdot j_1(\omega \mid n\alpha), \\ \sum_k j_2(R_k(\omega) \mid \alpha) = \psi_2 \cdot j_2(\omega \mid n\alpha) + 2\psi_3 \cdot j_3(\omega \mid n\alpha), \\ \sum_k j_3(R_k(\omega) \mid \alpha) = \psi_3 \cdot j_2(\omega \mid n\alpha) + (\psi_2 + \psi_3) \cdot j_3(\omega \mid n\alpha), \\ \sum_k j_1(R_k(\omega) \mid \beta) = \psi_2 \cdot j_1(\omega \mid n\beta) + \psi_3 \cdot j_2(\omega \mid n\beta), \\ \sum_k j_2(R_k(\omega) \mid \beta) = 2\psi_3 \cdot j_1(\omega \mid n\beta) + (\psi_2 + \psi_3) \cdot j_2(\omega \mid n\beta). \end{cases}$$

Wollen wir aber lieber unter R_k ein Repräsentantensystem 11[ter] Stufe vom Schema $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ verstehen, so hat man hier nach bekannten Sätzen nichts weiter zu thun, als in (5) rechter Hand auf ω eine Modulsubstitution V auszuüben, welche mod. 11 der Bedingung

$$\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$$

genügt. — Das Argument n der ψ_e haben wir in (5) der Kürze halber allenthalben fortgelassen.

Im Falle eines quadratischen *Nichtrestes* n treffen wir auf ganz ähnliche Verhältnisse, und wir führen hier die Rechnungen nicht noch

einmal ausführlich durch. Vielmehr genüge die Angabe des fertigen Resultates: *Die Integralrelationen elfter Stufe haben im Falle eines quadratischen Nichtrestes n von* 11 *unter Beibehaltung des Schemas* $\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ *die Gestalt:*

$$(6)\quad \begin{cases} \sum_k j_1(R_k(\omega) \mid \alpha) = 0, \\ \sum_k j_2(R_k(\omega) \mid \alpha) = 4\chi_1 \cdot j_1(\omega \mid n\alpha) + 2\chi_2 \cdot j_2(\omega \mid n\alpha), \\ \sum_k j_3(R_k(\omega) \mid \alpha) = 2\chi_2 \cdot j_1(\omega \mid n\alpha) + (2\chi_1 + \chi_2) \cdot j_2(\omega \mid n\alpha), \\ \sum_k j_1(R_k(\omega) \mid \beta) = \chi_1 \cdot j_2(\omega \mid n\beta) + \chi_2 \cdot j_3(\omega \mid n\beta), \\ \sum_k j_2(R_k(\omega) \mid \beta) = \chi_2 \cdot j_2(\omega \mid n\beta) + (2\chi_1 + \chi_2) \cdot j_3(\omega \mid n\beta). \end{cases}$$

Natürlich repräsentiert hier infolge der wechselnden Werte α, β jedes Gleichungsystem (5), (6) im ganzen 25 Integralrelationen.

§ 8. Vorbemerkungen zur Auswahl einer Basis von Correspondenzen für eine beliebige Primzahlstufe q.

Indem wir zu den Correspondenzen einer beliebigen Stufenzahl q zurückkehren, gilt es, auf Grundlage des vorletzten Paragraphen die Primformdarstellung jener Correspondenzen zu ermöglichen. Wir haben hierbei einfach die Principien der Hurwitz'schen Correspondenztheorie in Anwendung zu bringen. Um genau nach den bezüglichen Vorschriften zu verfahren, hätten wir uns für die Fläche $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ eine Minimalbasis von Correspondenzen zu bilden, in welcher wir hernach jede etwa vorzulegende Modularcorrespondenz nach der allgemeinen Formel (3) p. 551 würden darstellen können. Jedoch wollen wir hier, den particulären für uns vorliegenden Verhältnissen Rechnung tragend, in etwas von jenem allgemeinen Programm abweichen.

Erstlich wollen wir der zu Grunde zu legenden Basis von Correspondenzen nicht irgend welche auf der $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ existierende Correspondenzen einreihen (über die wir ja doch nichts wissen), *sondern wählen zu diesem Zweck einzig Modularcorrespondenzen* q^{ter} *Stufe verschiedener Ordnungen n aus.* Dies hat dann freilich, wie wir noch sehen werden, den Nachteil, dass wir solchergestalt im allgemeinen nicht auf eine *Minimal*basis treffen; doch ist dieser Umstand weiterhin nicht

von Belang. (In der That hätten wir auch bei der allgemeinen Theorie nicht durchaus eine Minimalbasis gebrauchen müssen.)

Des weiteren trennen wir auch hier die Fälle quadratischer Reste n von den Nichtresten; *wir werden nämlich zwei Basen auswählen, deren erste für die Reste, deren andere für die Nichtreste n in Kraft treten soll.* Es trifft sich hierbei, dass wir in jenem Falle gerade λ Correspondenzen, in diesem aber μ zu einer Basis vereinen müssen, λ und μ in der bisher immer gebräuchlichen Bedeutung gemeint. Dies widerstreitet nur scheinbar dem Umstande, dass die sonst immer mit t bezeichnete Anzahl linear-unabhängiger Correspondenzen auf der Fläche $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$, eine festbestimmte ist. Die Sachlage ist einfach die, dass für die Darstellung der Modularcorrespondenzen mit quadratischem Rest n bereits eine Basis von λ unabhängigen Correspondenzen ausreicht. Dabei ist also sicher $\lambda \leq t$; aber es wird gar nicht behauptet, dass λ (oder entsprechend μ im Falle der Nichtreste n) den Maximalbetrag t etwa wirklich erreicht.

Indem wir hier übrigens Correspondenzen verschiedenener Ordnungen n zu einer Basis zusammenstellen wollen, müssen wir vorab noch eine *Bemerkung über die Auswahl der Repräsentantensysteme q^{ter}* Stufe voraussenden. Mögen die beiden Ordnungen n und n' im quadratischen Charakter mod. q übereinstimmen, so sollen die beiden zugehörigen Schemata $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a', & b' \\ c', & d' \end{pmatrix}$ einander mod. q congruent heissen, falls die Bedingung:

$$(1) \qquad a' : b' : c' : d' \equiv a : b : c : d, \text{ (mod. } q)$$

erfüllt ist. Natürlich können wir diese Proportion auch in vier einzelne Congruenzen spalten, indem wir die ganze Zahl:

$$(2) \qquad \varkappa \equiv \pm \sqrt{\frac{n'}{n}}, \text{ (mod. } q)$$

einführen; dann nämlich haben wir zufolge der Congruenzen:

$$ad - bc \equiv n, \quad a'd' - b'c' \equiv n', \text{ (mod. } q)$$

an Stelle von (1) offenbar die vier Congruenzen:

$$(3) \qquad a' \equiv \varkappa a, \; b' \equiv \varkappa b, \; c' \equiv \varkappa c, \; d' \equiv \varkappa d, \text{ (mod. } q)$$

zu setzen. Unsere Verabredung erlaubt uns ersichtlich, *die $\frac{q(q^2-1)}{2}$ Schemata der Ordnung n' auf die Schemata der Ordnung n wechselweise eindeutig zu beziehen*, indem wir eben immer congruente Schemata einander zuordnen. Und nun wird es hernach unsere Massnahme sein, dass wir für die Reste n gewisse λ Correspondenzen *von mod. q con-*

gruenten Schemen zur Basis zusammenstellen, wie wir dann ein Gleiches weiterhin auch für die Nichtreste n ausführen werden.

Zum Vorstehenden sei etwa noch bemerkt, dass im Falle zweier quadratischen Reste n, n' insbesondere $n' \equiv 1 \pmod{q}$ genommen werden mag. Als die unterschiedenen Schemata für die Ordnung n' können wir dann einfach die mod. q incongruenten Modulsubstitutionen ansprechen; auf diese letzteren also werden wir für jeden Rest n vermöge (1) oder (3) die zugehörigen Schemata eindeutig beziehen.

§ 9. Bildung einer Basis von Correspondenzen für den Fall eines quadratischen Restes n*).

Um auf Grund der vorstehend entwickelten Verabredungen zuvörderst für die *quadratischen Reste* n eine Basis von Correspondenzen zusammenzusetzen, verstehen wir unter n und n' zwei unterschiedene Reste von q. Für n gelten unter Zugrundelegung des Schemas $\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ die $(\lambda + \mu) \cdot \frac{q-1}{2}$ Integralrelationen:

$$(1)\quad \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\Phi-1} j_e(R_k(\omega) \mid \alpha) = \sum\limits_{f=1}^{\lambda} a_{ef}(n) j_f(\omega \mid n\alpha) + \text{const.}, \\ \sum\limits_{k=0}^{\Phi-1} j_g(R_k(\omega) \mid \beta) = \sum\limits_{h=1}^{\mu} b_{gh}(n) j_h(\omega \mid n\beta) + \text{const.}, \end{cases}$$

wo wir rechter Hand des ausführlichen die additiven Constanten hinzugesetzt haben. In ganz entsprechender Weise finden wir für die Ordnung n' unter Gebrauch des Schemas $\begin{pmatrix} n', & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ die Relationen:

$$(2)\quad \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\Phi'-1} j_e(R_k'(\omega) \mid \alpha) = \sum\limits_{f=1}^{\lambda} a_{ef}(n') j_f(\omega \mid n'\alpha) + \text{const.}, \\ \sum\limits_{k=0}^{\Phi'-1} j_g(R_k'(\omega) \mid \beta) = \sum\limits_{h=1}^{\mu} b_{gh}(n') j_h(\omega \mid n'\beta) + \text{const.}, \end{cases}$$

wobei zur Abkürzung Φ' für $\Phi(n')$ geschrieben ist.

Vermöge der Verabredung des vorigen Paragraphen wolle man demnächst von R_k' zu einem neuen Repräsentantensystem $\overline{R}_k'$ gehen, dessen Schema eben im Sinne jener Verabredung mit dem in (1) vor-

*) Vergl. hier und für die nächstfolgenden Paragraphen allenthalben die wiederholt genannte Note von Hurwitz in den Leipz. Berichten vom 4. Mai 1885.

liegenden Schema $\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ mod. q congruent ist. Zu diesem Ende haben wir zu setzen:

$$(3) \qquad \varkappa \equiv \sqrt{\frac{n}{n'}}, \quad U(\omega) \equiv \frac{\varkappa\,\omega}{\varkappa^{-1}} \equiv \varkappa^2\omega, \ (\text{mod. } q).$$

Schreiben wir nämlich nun $\bar{R}_k' = R_k' U$, so wird offenbar:

$$\bar{R}_k' \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{n n'}, & 0 \\ 0, & \sqrt{\frac{n'}{n}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \ (\text{mod. } q).$$

Bei der bekannten Wirkung der soeben eingeführten Substitution U auf unsere Integrale $j(\omega \mid \alpha)$, $j(\omega \mid \beta)$ ergiebt sich aus (2):

$$(4) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\Phi'-1} j_e(\bar{R}_k'(\omega) \mid \alpha) = \sum_{f=1}^{\lambda} a_{ef}(n') j_f(\omega \mid n\alpha) + \text{const.}, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\Phi'-1} j_g(\bar{R}_k'(\omega) \mid \beta) = \sum_{h=1}^{\mu} b_{gh}(n') j_h(\omega \mid n\beta) + \text{const.} \end{cases}$$

Der Erfolg ist ersichtlich der, *dass in je zwei einander entsprechenden Relationen* (1) *und* (4) *rechter Hand Integrale stehen, die gegenüber* S *das gleiche Verhalten zeigen.*

Zur Fortsetzung unserer Entwicklung nehmen wir nunmehr für n' der Reihe nach die λ unterschiedenen quadratischen Reste $n_1, n_2, \cdots, n_\lambda$ und bilden für sie alle jedesmal das System der Integralrelationen (4); die λ Repräsentantensysteme schreiben wir dabei kurz $R_k^{(1)}, \cdots, R_k^{(\lambda)}$, während $\Phi_1, \cdots, \Phi_\lambda$ die bezüglichen Teilersummen sein sollen. Für jede Combination e, α bez. g, β haben wir somit λ Integralrelationen, denen wir die zugehörige Relation (1) als $(\lambda + 1)^{\text{te}}$ anreihen. Es ist dann unser Ziel, die zu den Ordnungen $n_1, n_2, \ldots, n_\lambda$ gehörenden Correspondenzen zur Basis ein für alle Mal fest auszuwählen, um in ihr die Correspondenz des beliebigen, anfänglich ausgewählten Restes n darzustellen.

Zu diesem Ende seien $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_\lambda$ gewisse λ, noch nicht näher bestimmte, Constante; wir wollen dann zur einzelnen Relation (1) die λ zugeordneten Relationen der Ordnungen $n_1, \cdots, n_\lambda$, bez. mit $\sigma_1, \cdots, \sigma_\lambda$ multipliciert, hinzuaddieren. Linker Hand werden wir solchergestalt die Ausdrücke erhalten:

$$(5) \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\Phi-1} j_e(R_k(\omega) \mid \alpha) + \sigma_1 \sum_{k=0}^{\Phi_1-1} j_e(R_k^{(1)}(\omega) \mid \alpha) + \cdots + \sigma_\lambda \sum_{k=0}^{\Phi_\lambda-1} j_e(R_k^{(\lambda)}(\omega) \mid \alpha), \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\Phi-1} j_g(R_k(\omega) \mid \beta) + \sigma_1 \sum_{k=0}^{\Phi_1-1} j_g(R_k^{(1)}(\omega) \mid \beta) + \cdots + \sigma_\lambda \sum_{k=0}^{\Phi_\lambda-1} j_g(R_k^{(\lambda)}(\omega) \mid \beta), \end{cases}$$

während sich aus den rechten Seiten der Relationen (1) und (4) als Werte dieser $(\lambda + \mu)\cdot\frac{q-1}{2}$ Ausdrücke die folgenden ergeben:

$$(6)\quad \begin{cases} \text{const.} + \sum_{f=1}^{\lambda} j_f(\omega \mid n\alpha)\cdot\left[a_{ef}(n) + \sum_{i=1}^{\lambda}\sigma_i a_{ef}(n_i)\right], \\ \text{const.} + \sum_{h=1}^{\mu} j_h(\omega \mid n\beta)\cdot\left[b_{gh}(n) + \sum_{i=1}^{\lambda}\sigma_i b_{gh}(n_i)\right]. \end{cases}$$

Nunmehr war das wesentlichste Resultat des § 6, dass die $a_{ef}(n)$, $b_{gh}(n)$ homogene lineare Combinationen der $\psi_1(n), \cdot\cdot, \psi_\lambda(n)$ mit von n unabhängigen Coefficienten sind. Tragen wir daraufhin in (6) die unter (8) p. 615 gegebenen Ausdrücke für a_{ef}, b_{gh} ein, so kommt ersichtlich:

$$(7)\quad \begin{cases} a_{ef}(n) + \sum_{i=1}^{\lambda}\sigma_i a_{ef}(n_i) = \sum_{k=1}^{\lambda}\alpha_{ef}^{(k)}\left\{\psi_k(n) + \sum_{i=1}^{\lambda}\sigma_i\psi_k(n_i)\right\}, \\ b_{gh}(n) + \sum_{i=1}^{\lambda}\sigma_i b_{gh}(n_i) = \sum_{h=1}^{\lambda}\beta_{gh}^{\prime(k)}\left\{\psi_k(n) + \sum_{i=1}^{\lambda}\sigma_i\psi_k(n_i)\right\}. \end{cases}$$

Wenn man hiernach die Constanten $\sigma_1, \cdot\cdot, \sigma_\lambda$ so bestimmen kann, dass die λ Gleichungen:

$$(8)\quad \begin{cases} \sigma_1\psi_1(n_1) + \sigma_2\psi_1(n_2) + \cdots + \sigma_\lambda\psi_1(n_\lambda) = -\psi_1(n), \\ \sigma_1\psi_2(n_1) + \sigma_2\psi_2(n_2) + \cdots + \sigma_\lambda\psi_2(n_\lambda) = -\psi_2(n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma_1\psi_\lambda(n_1) + \sigma_2\psi_\lambda(n_2) + \cdots + \sigma_\lambda\psi_\lambda(n_\lambda) = -\psi_\lambda(n) \end{cases}$$

erfüllt sind, so werden sich die $(\lambda + \mu)\frac{q-1}{2}$ Ausdrücke (6) durchweg auf ihre ersten constanten Glieder zusammenziehen.

Die Zahlen $\sigma_1, \cdot\cdot, \sigma_\lambda$ sind nun durch das Gleichungssystem (8) gerade eindeutig bestimmt, falls wir nur die λ Reste $n_1, \cdot\cdot, n_\lambda$ so auswählten, dass die λ-gliedrige Determinante:

$$(9)\qquad D = |\,\psi_k(n_i)\,|$$

einen von Null verschiedenen Wert hat. Nach p. 580 hat eine derartige Auswahl der $n_1, \cdot\cdot, n_\lambda$ keinerlei Schwierigkeit, *und wir finden daraufhin bei jedem Reste n für die σ gewisse λ lineare Functionen von $\psi_1(n), \psi_2(n), .., \psi_\lambda(n)$, wobei die Coefficienten dieser Functionen von n unabhängige rationale Zahlen mit dem Generalnenner D sind,* insofern doch bei der früher getroffenen Auswahl der $j(\omega \mid \alpha)$ die ψ_k durchgehends ganze Zahlen darstellen. Für die somit bestimmten $\sigma_1, .., \sigma_\lambda$, *die also bei jedem particulären n selbst rationale Brüche mit dem Nenner*

D vorstellen, werden die Ausdrücke (5) mit Constanten identisch; *versteht man demgemäss unter $j(\omega)$ eine beliebige lineare Combination aus den $(\lambda+\mu)\frac{q-1}{2}$ Integralen $j(\omega\mid\alpha)$, $j(\omega\mid\beta)$, so wird für dieses Integral $j(\omega)$ und für unsere rationalen Zahlen σ die Relation gelten:*

$$(10)\quad \sum_{k=0}^{\Phi-1} j(R_k(\omega)) + \sigma_1 \sum_{k=0}^{\Phi_1-1} j(R_k^{(1)}(\omega)) + \cdots + \sigma_\lambda \sum_{k=0}^{\Phi_\lambda-1} j(R_k^{(\lambda)}(\omega)) = \text{const.}$$

Die $(\lambda+1)$ hier zur Geltung kommenden Repräsentantensysteme waren hier zunächst so ausgewählt, dass sie alle mod. q mit $\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ congruent waren. Indem wir aber jetzt in (10) auf ω eine beliebige Modulsubstitution ausüben, wird evident, *dass diese Relation auch für*

$$(11)\qquad R \equiv R^{(1)} \equiv R^{(2)} \equiv \cdots \equiv R^{(\lambda)} \equiv \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} \pmod{q}$$

bestehen bleibt, wobei $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ irgend eines der $\frac{q(q^2-1)}{2}$ unterschiedenen Schemata q^{ter} Stufe ist.

Es bleibt uns endlich noch zu beweisen übrig, dass die Relation (10) unter der Bedingung (11) auch für die sämtlichen *Integrale des Teilungspolygons* gültig bleibt; und um diese Aufgabe jetzt leicht erledigen zu können, hatten wir seinerzeit diese Integrale $j(\omega\mid 0)$ in der charakteristischen Gestalt (11) p. 570 bez. (18) p. 571 durch Combinationen von Integralen $j(\omega\mid\alpha)$, $j(\omega\mid\beta)$ dargestellt. Unter Aufnahme einer ganzen Zahl ν bilden wir uns von den Repräsentantensystemen (11) aus die neuen Systeme:

$$(12)\qquad \bar{R}(\omega) = \frac{-1}{R(\omega)+\nu},\quad \bar{R}^{(i)}(\omega) = \frac{-1}{R^{(i)}(\omega)+\nu},$$

wobei zufolge (11) offenbar für jede ganze Zahl ν die Bedingung

$$\bar{R} \equiv \bar{R}^{(1)} \equiv \cdots \equiv \bar{R}^{(\lambda)}, \pmod{q}$$

erfüllt ist. Dann gilt nach dem gerade erhaltenen Resultate:

$$(13)\quad \sum_{k=0}^{\Phi-1} j\left(\frac{-1}{R_k(\omega)+\nu}\right) + \sum_{i=1}^{\lambda}\left\{\sigma_i \sum_{k=0}^{\Phi_i-1} j\left(\frac{-1}{R_k^{(i)}(\omega)+\nu}\right)\right\} = \text{const.}$$

für *jedes* aus $j(\omega\mid\alpha)$, $j(\omega\mid\beta)$ combinierte Integral $j(\omega)$. Indem wir aber dieses $j(\omega)$ zweckmässig wählen, können wir das einzelne Integral $j(\omega\mid 0)$ des Teilungspolygons zufolge der citierten Entwicklungen in der Gestalt:

$$j(\omega\mid 0) = j\left(\frac{-1}{\omega}\right) + j\left(\frac{-1}{\omega+1}\right) + \cdots + j\left(\frac{-1}{\omega+q-1}\right)$$

darstellen. Der rechten Seite dieser Gleichung folgend, nehme man nunmehr in (13) der Reihe nach $\nu = 0, 1, .., q-1$ und addiere alle so entspringenden q Relationen zu einander. Das Resultat zeigt, dass die Gleichung (10) auch für das in Rede stehende Integral $j(\omega \mid 0)$ gültig bleibt. *Mit den aus* (8) *zu berechnenden rationalen Zahlen* $\sigma_1, .., \sigma_\lambda$ *ist also unter der Voraussetzung von* (11) *die Relation* (10) *unterschiedslos für jedes Integral erster Gattung* q^{ter} *Stufe gültig.*

Durch die Relationen (10) ist für die nach den allgemeinen Vorschriften von p. 550 u. f. zu leistende Darstellung der anfänglich herausgegriffenen Modularcorrespondenz n^{ter} Ordnung in der festgewählten Basis $n_1, n_2, ..., n_\lambda$ der Grund gelegt. Nur besteht, wie wir schon im vorigen Paragraphen andeuteten, gegen jenen allgemeinen Ansatz hier die Abweichung, dass die *Charaktere der Modularcorrespondenz* n^{ter} *Ordnung*, nämlich die Zahlen $\sigma_1, .., \sigma_\lambda$, nicht ganzzahlig sind, sondern allgemein zu reden nur erst rationale Brüche mit dem gemeinsamen Nenner D vorstellen. Aber wenn wir hier etwa nach Art von p. 545 ff. den Reductionsprocess der Correspondenzen-Basis $n_1, .., n_\lambda$ auf eine Minimalbasis zur Ausübung bringen wollten, so würden wir dabei den ausschliesslichen Gebrauch von Modularcorrespondenzen aufgeben müssen. Andrerseits liegt im Gebrauch nichtganzzahliger Charaktere für die weiterhin beabsichtigte Abzählung der Coincidenzen gar kein Hindernis.

Sollen wir die vorstehenden Entwicklungen am Beispiel $q = 11$ illustrieren, so wird es sich wesentlich um die hier eintretende specielle Gestalt des Gleichungssystems (8) drehen. Indem $\lambda = 3$ wird, nehmen wir etwa $n_1 = 3$, $n_2 = 31$, $n_3 = 5$ und haben damit auf Grund der Tabelle p. 616 für $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ die Gleichungen:

$$(14)\qquad \begin{cases} \sigma_1 + 5\sigma_2 + 3\sigma_3 = -\psi_1(n), \\ \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = -\psi_2(n), \\ -\sigma_1 + 3\sigma_2 \qquad = -\psi_3(n). \end{cases}$$

Die Determinante dieses Systems berechnet sich zu $D = 4$, und man gewinnt durch Auflösung von (14) die nachfolgenden Werte:

$$(15)\qquad \begin{cases} 4\sigma_1 = +3\psi_1 - 9\psi_2 - 2\psi_3, \\ 4\sigma_2 = +\psi_1 - 3\psi_2 - 2\psi_3, \\ 4\sigma_3 = -4\psi_1 + 8\psi_2 + 4\psi_3. \end{cases}$$

Die Argumente n der ψ_1, ψ_2, ψ_3 haben wir hier der Kürze halber nicht mit aufgeschrieben.

§ 10. Bildung einer Basis von Correspondenzen für den Fall eines Nichtrestes n von q.

Ist n *quadratischer Nichtrest von* q, so verfahren wir Schritt für Schritt genau so wie im vorigen Paragraphen. Es wird genügen, wenn wir hier das Resultat zusammenfassen: Man wähle irgend welche μ unterschiedene Nichtreste von q aus, nämlich $n_1, \ldots, n_\mu$, die jedoch der Bedingung genügen sollen, dass die μ-gliedrige Determinante:

$$E = |\, \chi_g(n_h) \,| \tag{1}$$

einen von Null verschiedenen Wert hat. Mit Hülfe dieser μ Nichtreste bilde man die μ linearen Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} \tau_1 \chi_1(n_1) + \tau_2 \chi_1(n_2) + \cdots + \tau_\mu \chi_1(n_\mu) = -\chi_1(n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \tau_1 \chi_\mu(n_1) + \tau_2 \chi_\mu(n_2) + \cdots + \tau_\mu \chi_\mu(n_\mu) = -\chi_\mu(n). \end{array}\right. \tag{2}$$

Hier sind natürlich immer $\chi_1, \ldots, \chi_\mu$ die μ Entwicklungsfunctionen der Integrale q^{ter} Stufe $j(\omega \mid \beta)$, und wir verstehen unter n irgend eine beliebige Ordnung, die einen Nichtrest von q darstellt.

Die μ so eingeführten Zahlen $\tau_1, \ldots, \tau_\mu$ lassen sich infolge der Bedingung $E \gtrless 0$ aus (2) eindeutig berechnen, *und zwar findet man für die* τ *lineare homogene Verbindungen von* $\chi_1(n), \ldots, \chi_\mu(n)$ *mit numerischen, von* n *unabhängigen, Coefficienten, die rationale Zahlen mit dem gemeinsamen Nenner* E *vorstellen.* Für jeden Wert n, der Nichtrest von q und natürlich positiv ist, stellen also die $\tau_1, \ldots, \tau_\mu$ selbst *rationale Brüche mit dem gemeinsamen Nenner* E *vor*; alles das folgert man unmittelbar aus dem Umstande, dass die zahlentheoretischen Functionen $\chi(n)$ für alle in Betracht kommenden Werte n selbst ganzzahlige Werte aufweisen.

Wir setzen nun für das Repräsentantensystem n^{ter} Ordnung q^{ter} Stufe das beliebig auszuwählende Schema $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ und mögen (immer unter Benutzung der erweiterten Transformation) die $\Phi(n)$ Repräsentanten $R_0, \ldots, R_{\Phi-1}$ haben. Die Systeme $R_k^{(1)}, R_k^{(2)}, \ldots, R_k^{(\mu)}$ für die Ordnungen $n_1, \ldots, n_\mu$ sollen dann so gewählt sein, dass im Sinne des vorletzten Paragraphen die Congruenz:

$$R \equiv R^{(1)} \equiv \cdots \equiv R^{(\mu)} \equiv \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}, \pmod{q} \tag{3}$$

besteht. *Für jedes Integral* $j(\omega)$ *erster Gattung* q^{ter} *Stufe ist alsdann*

unter Gebrauch der vorbestimmten rationalen Brüche $\tau_1, \ldots, \tau_\mu$ *die Gleichung:*

$$(4)\quad \sum_{k=0}^{\Phi-1} j(R_k(\omega)) + \tau_1 \sum_{k=0}^{\Phi_1-1} j(R_k^{(1)}(\omega)) + \cdots + \tau_\mu \sum_{k=0}^{\Phi_\mu-1} j(R_k^{(\mu)}(\omega)) = \text{const.}$$

unabhängig von ω *in Gültigkeit.* In den durch $R_k^{(1)}, \ldots, R_k^{(\mu)}$ dargestellten μ Modularcorrespondenzen der Ordnungen $n_1, \ldots, n_\mu$ haben wir damit eine *Basis* gewonnen, welche zur Darstellung der Correspondenzen aller übrigen Nichtrest-Ordnungen n geeignet erscheint. —

Um Vorstehendes wieder speciell für $q = 11$ durchzuführen, setzen wir etwa $n_1 = 6$, $n_2 = 2$. Man findet dann mit Hülfe der Tabelle p. 616 ohne weiteres:

$$(5)\qquad \tau_1 = -\chi_1(n), \quad \tau_2 = +\chi_2(n),$$

so dass hier im speciellen die Determinante $E = 1$ wird.

§ 11. Darstellung aller Modularcorrespondenzen q^{ter} Stufe vermöge der Primform in den λ bez. μ Correspondenzen der Basis.

Auf Grund der Ergebnisse der voraufgehenden Paragraphen ist jetzt die Darstellung der Modularcorrespondenzen im Sinne der p. 550 ff. entwickelten Regeln sofort zu leisten.

Indem wieder erstlich die Ordnung n *quadratischer Rest* von q sei, bilden wir uns gerade wie in (4) p. 549 für diese Ordnung n den Primformquotienten:

$$(1)\qquad \Omega(\omega, \omega' \mid \omega_0, \omega_0') = \prod_{k=0}^{\Phi-1} \frac{P(\omega', R_k(\omega))\, P(\omega_0', R_k(\omega_0))}{P(\omega_0', R_k(\omega))\, P(\omega', R_k(\omega_0))}.$$

Hierbei sind ω, ω' zwei variabele Punkte der Fläche $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$, und ω_0, ω_0' sind specielle Lagen dieser Punkte ω, ω'; wegen der Auswahl der Repräsentantensysteme aber behalten wir hier und in der Folge alle Bestimmungen der beiden vorigen Paragraphen bei. Die Modularcorrespondenz n^{ter} Ordnung von dem in (1) zu Grunde gelegten Schema $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ können wir jetzt durch die Gleichung:

$$(2)\qquad \Omega(\omega, \omega' \mid \omega_0, \omega_0') = 0$$

rein darstellen.

Um indessen unsere Correspondenz in der früheren Weise mit Hülfe der λ Correspondenzen der ausgesuchten Basis und einer hinzutretenden algebraischen Function darzustellen, führen wir nach Art der Formel (1) die λ speciellen Primformquotienten ein:

$$(3)\quad \Omega_i(\omega, \omega' \mid \omega_0, \omega_0') = \prod_{k=0}^{\Phi_i - 1} \frac{P(\omega', R_k^{(i)}(\omega))\, P(\omega_0', R_k^{(i)}(\omega_0))}{P(\omega_0', R_k^{(i)}(\omega))\, P(\omega', R_k^{(i)}(\omega_0))}, \quad (i = 1, .., \lambda).$$

Dann ist es eine Folge der für *jedes* Integral j der q^{ten} Stufe gültigen Relation (10) p. 624, *dass die durch:*

$$(4)\qquad F(\omega, \omega' \mid \omega_0, \omega_0') = \Omega^D \Omega_1^{D\sigma_1} \Omega_2^{D\sigma_2} .. \Omega_\lambda^{D\sigma_\lambda}$$

definierte Function, in Abhängigkeit jedes ihrer vier Argumente ω, ω', ω_0, ω_0' *gedeutet, eine* **algebraische** *Modulfunction vorstellt.* Hierbei sind die Exponenten D, $D\sigma_1$, .. zufolge des vorletzten Paragraphen durchgehends *ganze* Zahlen. Durch Auflösung der Gleichung (4) nach Ω ergiebt sich:

$$(5)\qquad \Omega^D(\omega, \omega' \mid \omega_0, \omega_0') = \frac{F(\omega, \omega' \mid \omega_0, \omega_0')}{\Omega_1^{D\sigma_1} \Omega_2^{D\sigma_2} \cdots \Omega_\lambda^{D\sigma_\lambda}}.$$

Wir können demnach (durch Nullsetzen der rechten Seite von (5)) die vorgelegte Correspondenz n^{ter} Ordnung, *nur erst D-fach gezählt*, durch algebraische Functionen und die Ω_1, .., Ω_λ darstellen, sofern wir doch hier überall bei *ganzzahligen* Exponenten der Ω_1, .., Ω_λ bleiben wollen. Um indessen unter Beibehaltung ausschliesslich *ganzzahliger* Exponenten für die *erste* Potenz von Ω eine Darstellung zu bringen, werden wir etwa die zu Grunde zu legende Basis von fest gewählten Correspondenzen erweitern. Indem wir $j_1(\omega \mid \alpha)$, .., $j_\lambda(\omega \mid \alpha)$ im Sinne von p. 582 als *Minimal*basis gewählt denken, können wir eine endliche Anzahl von, sagen wir, ν Systemen zu je λ quadratischen Resten n_1, .., n_λ derart bestimmen, dass die zugehörigen Determinanten $|\psi_k(n_i)|$, die wir D, D', .., $D^{(\nu-1)}$ nennen mögen, lauter nichtverschwindende ganze Zahlen *ohne einen von* 1 *verschiedenen gemeinsamen Teiler* sind. Lag bisher in Formel (5) das erste System n_1, .., n_λ der Basis $[\Omega_1, .., \Omega_\lambda]$ zu Grunde, so mögen wir dasselbe nun der Reihe nach durch die übrigen $(\nu - 1)$ Systeme mit den Determinanten D', .., $D^{(\nu-1)}$ ersetzen. Vom Primformquotienten Ω der vorgelegten Correspondenz n^{ter} Ordnung werden wir dann der Reihe nach die Potenzen:

$$(6)\qquad \Omega^D,\ \Omega^{D'},\ \Omega^{D''},\ \cdots,\ \Omega^{D^{(\nu-1)}}$$

darstellen, und zwar immer in der Gestalt (5) mit Hülfe *ganzzahliger* Exponenten $D\sigma_i$, $D'\sigma_i'$, $\cdots$. Jetzt giebt es nach den Elementen der Zahlentheorie ein System von ν *ganzen* Zahlen t, t', .., $t^{(\nu-1)}$, welche der Bedingung:

$$tD + t'D' + \cdots + t^{(\nu-1)} D^{(\nu-1)} = 1$$

genügen. Wenn man daraufhin die auf die Potenzen (6) von Ω führenden Formeln (5), bez. t-mal, t'-mal, .. genommen, mit einander

multipliciert, *so wird offenbar am Schlusse Ω selbst vermittelst ausschliesslich ganzzahliger Exponenten durch gewisse $\lambda\nu$ specielle Primformquotienten $\Omega_1, \ldots, \Omega_\lambda, \Omega_1', \ldots$ und übrigens eine algebraische Function darstellbar sein.*

Nicht anders verfahren wir im Falle eines *quadratischen Nichtrestes n.* Wir bilden uns hier wieder die Primformquotienten (1) und (3), nennen dieselben jedoch zur bessern Unterscheidung nun $\mathsf{H}(\omega, \omega' \mid \omega_0, \omega_0')$, $\mathsf{H}_1(\omega, \omega' \mid \omega_0, \omega_0'), \cdots$. Dabei soll H zu der beliebig vorgelegten Nichtrest-Ordnung n gehören, $\mathsf{H}_1, \ldots, \mathsf{H}_\mu$ jedoch zu den speciellen Ordnungen $n_1, \ldots, n_\mu$ der ausgewählten Basis. Unter Aufnahme der Bezeichnungen des vorigen Paragraphen haben wir alsdann in

$$(7)\qquad F(\omega, \omega' \mid \omega_0, \omega_0') = \mathsf{H}^E \mathsf{H}_1^{E\tau_1} \mathsf{H}_2^{E\tau_2} \cdots \mathsf{H}_\mu^{E\tau_\mu}$$

eine von vier Punkten der Fläche abhängende *algebraische* Function, worauf wir nun wieder umgekehrt für den unsere Correspondenz darstellenden Ausdruck H in F und $\mathsf{H}_1, \ldots, \mathsf{H}_\mu$ die Gestalt:

$$(8)\qquad \mathsf{H}^E(\omega, \omega' \mid \omega_0, \omega_0') = \frac{F(\omega, \omega' \mid \omega_0, \omega_0')}{\mathsf{H}_1^{E\tau_1} \mathsf{H}_2^{E\tau_2} \cdots \mathsf{H}_\mu^{E\tau_\mu}}$$

gewinnen. — Auf eine (übrigens genau wie soeben bei den Resten n zu vollziehende) Erweiterung der Basis behufs Darstellung der *ersten* Potenz von H gehen wir hier nicht mehr ein, wie wir denn auch weiterhin stets an die Formeln (5) und (8) anknüpfen werden.

Zum Schluss mögen die Formeln (5) und (8) für den Fall $q = 11$ hier fertig hergesetzt werden, was nach den bezüglichen Ergebnissen der beiden vorangehenden Paragraphen unmittelbar geschehen kann. Man findet im Falle eines *Restes n:*

$$(9)\qquad \Omega^4(\omega, \omega' \mid \omega_0, \omega_0') = \frac{F_{+1}(\omega, \omega' \mid \omega_0, \omega_0')}{\Omega_1^{4\sigma_1(n)} \Omega_2^{4\sigma_2(n)} \Omega_3^{4\sigma_3(n)}}$$

und für einen *Nichtrest n:*

$$(10)\qquad \mathsf{H}(\omega, \omega' \mid \omega_0, \omega_0') = \frac{F_{-1}(\omega, \omega' \mid \omega_0, \omega_0')}{\mathsf{H}_1^{-\chi_1(n)} \mathsf{H}_2^{\chi_2(n)}},$$

wobei wir die beiden in Betracht kommenden algebraischen Functionen F noch durch untere Indices ± 1 ausdrücklich als verschieden charakterisierten. Auf der rechten Seite der Formel (9) wolle man an Stelle von $4\sigma_1$, $4\sigma_2$, $4\sigma_3$ die expliciten Werte dieser Ausdrücke durch $\psi_1(n)$, $\psi_2(n)$, $\psi_3(n)$ gesetzt denken, wie sie in den Formeln (15) p. 625 gegeben sind. —

Wie in der allgemeinen Correspondenztheorie, so werden auch hier die Formeln (5) und (8) natürlich ihre wesentliche Bedeutung verlieren, falls n eine der speciellen Zahlen $n_1, \ldots, n_\lambda$ bez. $n_1, \ldots, n_\mu$ wird. Hier nämlich wird, falls z. B. $n = n_1$ sein sollte, das Gleichungs-

system (8) p. 623 die Lösungen $\sigma_1 = -1$, $\sigma_2 = \sigma_3 = \cdots \sigma_\lambda = 0$ liefern; damit zieht sich die Gleichung (5) auf die Gestalt $\Omega = \Omega_1$ zusammen. Diese Gleichung ist aber als eine Identität anzusehen, insofern die ursprünglichen Definitionen von Ω und Ω_1 durch die Primform (Formeln (1) und (3)) einfach identisch sind.

§ 12. Abzählung der Coincidenzen bei den Modularcorrespondenzen q^{ter} Stufe.

Die hauptsächliche Anwendung der Formeln des vorigen Paragraphen soll nun darin bestehen, dass wir aus ihnen die *Coincidenzenanzahlen* $\nu_i(n)$ der Modularcorrespondenzen bestimmen wollen. Der untere Index i bei $\nu_i(n)$ soll sich auf das Schema beziehen, welches ausgewählt wurde; i hat also das Intervall $1, 2, \cdots, \frac{q(q^2-1)}{2}$ zu durchlaufen. Unsere vorgelegte Aufgabe ist übrigens direct durch Specialisation der allgemeinen Überlegung von p. 550 ff. für die hier vorliegenden Verhältnisse zu leisten, und der endgültige Ausdruck, den wir für $\nu_i(n)$ ableiten wollen, wird sich unter die allgemeine Hurwitz'sche Correspondenzformel (8) p. 554 subsumieren.

Wenn wir in den Formeln (1), (3), (4) etc. des vorigen Paragraphen ω' mit ω identisch setzen, so ist immer auf den Ausnahmefall achtzugeben, dass ein einzelner, gerade vorliegender Ausdruck nach der Substitution $\omega' = \omega$ vielleicht identisch verschwindet. Dies tritt für die in Betracht kommenden Primformproducte aber *nur* dann ein, *wenn die Ordnung n ein reines Quadrat ist, und wenn zu gleicher Zeit das Schema* $\begin{pmatrix}\sqrt{n}, & 0\\ 0, & \sqrt{n}\end{pmatrix}$ *vorliegt;* hier liefert in der That die mit zur Geltung kommende Transformation *erster* Ordnung immer einen und nur einen Factor $P(\omega', \omega)$.

Bei dieser Sachlage ist es zwar nicht unbedingt notwendig, aber es bringt doch eine wesentliche Erleichterung der Überlegung mit sich, wenn wir unter die λ quadratischen Reste $n_1, \ldots, n_\lambda$ unserer Basis ein reines Quadrat *nicht* aufgenommen denken. Die Substitution $\omega' = \omega$ liefert dann von dem für das e^{te} Glied der Basis gebildeten Primformquotienten $\Omega_e(\omega, \omega' \mid \omega_0, \omega_0')$ aus eine nicht identisch verschwindende Function von ω, welche sich natürlich bei Beschreibung von Periodenwegen auf der Fläche $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ um Exponentialfactoren ändert. Für diese Function ergiebt sich als Anzahl einfacher Nullpunkte auf der Fläche, vermindert um die Anzahl einfacher Unstetigkeitspunkte, der Betrag:

$$\nu_i(e) - 2\,\Phi(n_e),$$

insofern wir ja hier in der That mit einer Φ-Φ-deutigen Correspondenz zu thun haben. — Diese zuvörderst für die quadratischen Reste n gedachte Überlegung wird man auf die Nichtreste ohne weiteres übertragen; hier tritt übrigens der Annahmefall eines nach der Substitution $\omega' = \omega$ identisch verschwindenden Primfactors gar nicht auf.

Sei jetzt erstlich n *quadratischer Rest* und liege, sofern n ein reines Quadrat ist, doch das Schema $\begin{pmatrix}\sqrt{n}, & 0\\ 0, & \sqrt{n}\end{pmatrix}$ *nicht* vor. Dann liefert die in (4) § 11 gebildete Function F nach der Substitution $\omega' = \omega$ eine eindeutige Modulfunction q^{ter} Stufe von ω, und für diese ist die Anzahl der Nullpunkte auf der Fläche gleich derjenigen der Unstetigkeitspunkte. Dieses letztere Resultat kleidet sich bei der Gestalt der rechten Seite der Formel (4) p. 628 in die Formel:

$$(1)\qquad D[\nu_i(n) - 2\,\Phi(n)] + D\sum_{e=1}^{\lambda}\sigma_e(n)\,[\nu_i(n_e) - 2\,\Phi(n_e)] = 0.$$

Hat man aber zweitens mit dem Ausnahmefalle eines *rein quadratischen n beim Schema* $\begin{pmatrix}\sqrt{n}, & 0\\ 0, & \sqrt{n}\end{pmatrix}$ zu thun, so beziehe man $\nu(n)$ auf diejenige $(\Phi - 1)$-deutige Correspondenz, welche nach Ausschaltung der Transformation erster Ordnung übrig bleibt. Im Ausdruck (1) § 11 nehme man jetzt den betreffenden Factor des Zähler, $P(\omega', \omega)$, heraus, der nach der Substitution $\omega' = \omega + d\omega$ mit dem Differential $d\varpi$ identisch wird. Dagegen darf man im Nenner die beiden auf die erste Ordnung bezüglichen Primfactoren beibehalten, da diese in der That nicht identisch verschwinden. Für den solchergestalt vorgerichteten Ausdruck wird dann auf der Fläche:

$$(2)\qquad \nu(n) - 2\,\Phi(n) + \frac{q^2-1}{2}$$

der Überschuss der Anzahl einfacher Nullpunkte über diejenige einfacher Unstetigkeitspunkte sein. Man wolle bei der Berechnung des Betrages (2) nur beachten, dass jetzt die in den Punkten c der Fläche festliegenden Unstetigkeitspunkte der beiden auf die Ordnung 1 bezüglichen Primfactoren des Nenners nicht mehr durch entsprechende Unstetigkeiten des Zählers compensiert werden; von diesem Umstande rührt das dritte Glied im Ausdruck (2) her. Auf der anderen Seite bemerke man, dass die Function $F(\omega, \omega' \mid \omega_0, \omega_0')$ nach Substitution $\omega' = \omega + d\omega$ und Division mit $d\varpi^D$ eine (im allgemeinen von Null und ∞ verschiedene) *algebraische* Modulform q^{ter} Stufe liefert, für welche nach dem Wertigkeitssatze (p. 363) die Differenz der Anzahl einfacher

Null- und Unstetigkeitspunkte auf der Fläche $\frac{1}{12} D q(q^2-1)$ ist, da wir nämlich mit der Dimension $-2D$ in den ω_1, ω_2 zu thun haben. Indem wir also zusammenfassen, haben wir im vorliegenden Ausnahmefalle die Relation:

$$(3)\quad D[\nu(n)-2\Phi(n)]+D\sum_{e=1}^{\lambda}\sigma_e(n)[\nu(n_e)-2\Phi(n)]=D\cdot\frac{(q-6)(q^2-1)}{12}.$$

Unter Benutzung der Formel für das Geschlecht p der Hauptcongruenzgruppe q^{ter} Stufe (cf. Formel (6) p. 564) schreibt sich übrigens die rechte Seite der letzten Gleichung in die noch etwas einfachere Gestalt $D\cdot(2p-2)$ um.

Die Formeln (1) und (3) lassen sich durch D heben, und wir wollen sie übrigens durch Aufnahme des schon häufig gebrauchten Symbols ε_n in einen einzigen Ausdruck zusammenziehen. Dabei soll $\varepsilon_n=1$ sein, falls das Schema $\begin{pmatrix}\sqrt{n}, & 0\\ 0, & \sqrt{n}\end{pmatrix}$ und ein rein quadratisches n vorliegt; in allen übrigen Fällen sei $\varepsilon_n=0$. *Man hat alsdann im Falle eines quadratischen Restes n für die beim i^{ten} Schema eintretende Coincidenzenanzahl $\nu_i(n)$ den Ausdruck:*

$$(4)\qquad \nu_i(n)=2\Phi(n)-\sum_{e=1}^{\lambda}\sigma_e(n)\,[\nu_i(n_e)-2\Phi(n_e)]+\varepsilon_n\cdot(2p-2).$$

Für die *Nichtreste* n geben wir die Rechnung nicht noch einmal ausführlich; es genügt hier vielmehr die Angabe des Resultates:

$$(5)\qquad \nu_i(n)=2\Phi(n)-\sum_{g=1}^{\mu}\tau_g(n)\,[\nu_i(n_g)-2\Phi(n_g)],$$

welches sich in der That dem Ergebnisse (4) aufs unmittelbarste anschliesst.

Zwecks weiterer Entwicklung der Formeln (4), (5) bemerke man erstlich, dass sich die $\sigma_1(n),\ldots,\sigma_\lambda(n)$ als homogene lineare Functionen von $\psi_1(n),\ldots,\psi_\lambda(n)$ mit von n unabhängigen Coefficienten aus (8) p. 623 bestimmten; zudem waren die numerischen Werte dieser letzteren Coefficienten *rationale Brüche mit dem gemeinsamen Nenner D.* Diese Ausdrücke für die $\sigma_e(n)$ substituiere man nun in (4), wodurch diese Gleichung offenbar die neue Gestalt annimmt:

$$(6)\qquad \nu_i(n)=2\Phi(n)+s_{i1}\psi_1(n)+\cdots+s_{i\lambda}\psi_\lambda(n)+(2p-2)\varepsilon_n.$$

Dabei sind die λ beim i^{ten} Schema auftretenden Coefficienten $s_{i1},\ldots, s_{i\lambda}$, wie man sieht, rationale Brüche, deren Generalnenner höchstens gleich D ist. In ganz entsprechender Weise gewinnen wir von (5) aus für die Nichtreste n die Formel:

(7) $\nu_i(n) = 2\Phi(n) + t_{i1}\chi_1(n) + t_{i2}\chi_2(n) + \cdots + t_{i\mu}\chi_\mu(n)$,

und hier sind die Coefficienten t wieder rationale Brüche, deren Generalnenner gleich E oder gleich einem Teiler dieser ganzen Zahl ist.

Auf Grund früherer Resultate können wir nun über die hier aufgetretenen Coefficienten s, t mehr aussagen, als aus der zunächst voraufgehenden Überlegung hervorgeht. *Sie sind erstlich bei gegebenen q und i eindeutig bestimmt.* Es gilt nämlich z. B. die Formel (6) für *alle* quadratischen Reste $n > 0$, und zwar, wie man sich leicht überzeugt, unter Einschluss der λ Reste $n_1, \ldots, n_\lambda$, welche wir der Basis zu Grunde legten. Sollten wir nun gleichfalls für *alle* Reste n neben (6) auch noch die Gleichung:

$$\nu_i(n) = 2\Phi(n) + s'_{i1}\psi_1(n) + \cdots + s'_{i\lambda}\psi_\lambda(n) + (2p-2)\,\varepsilon_n$$

für das i^{te} Schema haben mit einem Coefficientensystem $s'_{i1}, \ldots$, welches nicht durchweg mit demjenigen der Gleichung (6) übereinstimmt, so würde die für alle Reste n bestehende Gleichung:

$$(s'_{i1} - s_{i1})\psi_1(n) + (s'_{i2} - s_{i2})\psi_2(n) + \cdots + (s'_{i\lambda} - s_{i\lambda})\psi_\lambda(n)$$

offenbar eine lineare Abhängigkeit zwischen den λ Integralen $j_\varrho(\omega \mid \alpha)$ im Gefolge haben. — In derselben Weise zeigt man die eindeutige Bestimmtheit der Coefficienten t_{ig}.

Bei dieser Sachlage werden wir zu genau denselben Coefficienten $s_{i\varrho}$, t_{ig} gelangen, wenn wir an Stelle der in §§ 9, 10 ausgesuchten Basen von irgend welchen anderen ausgingen, die sich vielleicht auf die Reste $n_1', \ldots, n_\lambda'$ und die Nichtreste $n_1', \ldots, n_\mu'$ beziehen. Mögen dabei die Determinanten D, E der bisherigen Entwicklung durch D' und E' ersetzt erscheinen, so werden die Nenner der rationalen Brüche $s_{i\varrho}$ und t_{ig} offenbar auch Teiler von D' und E' sein. Nun konnten wir aber z. B. die Integrale $j_\varrho(\omega \mid \alpha)$ so gewählt denken, dass eine begrenzte Anzahl solcher Determinanten $D, D', \ldots, D^{(\nu-1)}$ angebbar war, welche einen allen gemeinsamen Teiler > 1 nicht mehr aufweisen (cf. p. 582). Halten wir an der damit gemeinten Auswahl der $j(\omega \mid \alpha)$, sowie dann auch der $j(\omega \mid \beta)$, fest, so kommt, wenn wir alles zusammenfassen sollen, das Resultat: *Die Coincidenzenanzahlen $\nu_i(n)$ der Modularcorrespondenzen q^{ter} Stufe gestatten für die quadratischen Reste n die Darstellung:*

(8) $\nu_i(n) = 2\Phi(n) + s_{i1}\psi_1(n) + \cdots + s_{i\lambda}\psi_\lambda(n) + (2p-2)\,\varepsilon_n$,

sowie andrerseits für die quadratischen Nichtreste:

(9) $\nu_i(n) = 2\Phi(n) + t_{i1}\chi_1(n) + \cdots + t_{i\mu}\chi_\mu(n)$;

dabei sind die s und t ganze Zahlen, die von q und i eindeutig abhängen, aber von n unabhängig sind.

Man sieht, wie sich die Gleichungen (8) und (9) unter die allgemeine Hurwitz'sche Correspondenzformel (8) p. 554 subsumieren; dabei spielen nun insbesondere die ganzen Zahlen $\psi_1(n), \ldots, \psi_\lambda(n)$ bez. die $\chi_1(n), \ldots, \chi_\mu(n)$ die Rolle der *Charaktere* der Modularcorrespondenz n^{ter} Ordnung, die wir in der citierten allgemeinen Formel durch $\varkappa_1$, $\varkappa_2, \ldots, \varkappa_t$ bezeichnet hatten.

Die numerischen Werte der ganzen Zahlen s, t könnte man auf dem Wege der bisherigen Entwicklung, nämlich von den Correspondenzen der speciell gewählten Ordnungen $n_1, \ldots, n_\lambda$ bez. $n_1, \ldots, n_\mu$ aus, bestimmen wollen. Solches würde aber eine explicite Betrachtung jener speciellen Correspondenzen nötig machen. Wir ziehen demnach vor, die explicite Bestimmung der ganzen Zahlen s, t hier unerledigt zu lassen, indem wir nämlich im nächsten Kapitel ein indirectes Verfahren zur Bestimmung der s, t kennen lernen werden. Dasselbe soll insbesondere am Specialfall $q = 11$ durchgeführt werden, der auch bisher immer schon zur Erläuterung der allgemeinen Überlegungen diente.

Fünftes Kapitel.

Die Classenzahlrelationen einer beliebigen Primzahlstufe, mit besonderen Ausführungen für $q = 7$ und 11.

Als interessanteste Anwendung der Theorie der Modularcorrespondenzen geben wir hier die Ableitung der Classenzahlrelationen höherer Stufe, denen das vorliegende fünfte Kapitel gewidmet ist. Was die Geschichte dieser Relationen angeht, so haben wir uns einfach auf die Angaben zu beziehen, welche in diesem Betracht oben (p. 202 u. f.) gemacht wurden. Wir bemerkten dort insbesondere, dass die *arithmetische* Bestimmung der Coincidenzenanzahl $\nu(n)$ von Hrn. Gierster bereits im Falle einer beliebigen Primzahlstufe q geleistet war. Aber die functionentheoretische Abzählung war Hrn. Gierster endgültig nur erst in jenen Fällen gelungen, wo eine Correspondenz auf einer Fläche des Geschlechtes $p = 0$, d. i. eine Modular*gleichung* vorlag. In den Fällen $p > 0$ kommen eben jene arithmetischen Functionen $\psi_e(n)$, $\chi_g(n)$ ins Spiel, von denen Hr. Gierster nur erst zwei Einzelbeispiele (cf. p. 204) auf inductivem Wege hatte gewinnen können. Hier war es gerade die Theorie der Integrale erster Gattung, durch welche Hr. Hurwitz die wahre Quelle und die allgemeine Definitionsweise jener Functionen aufdeckte, während er andrerseits durch seine Correspondenztheorie den natürlichen Gedankengang aufwies, Kraft dessen die $\psi_e(n)$, $\chi_g(n)$ als notwendige Glieder in die Classenzahlrelationen eingehen müssen.

Man wird sagen dürfen, dass die Theorie der Classenzahlrelationen in Richtung des ursprünglichen, von Kronecker gegebenen Ansatzes durch die Entwicklungen von Hrn. Hurwitz im wesentlichen zum Abschluss gebracht ist. Kronecker's Art, aus den Jacobi'schen Modulargleichungen Classenzahlrelationen abzuleiten, erschien ja der Verallgemeinerung auf Modulargleichungen höherer Stufen und auf Modularcorrespondenzen ohne weiteres fähig. Indem aber Hr. Hurwitz die Mittel gab, *alle* Modularcorrespondenzen, welche bei der Hauptcongruenzgruppe irgend einer Stufe auftreten, systematisch zu behandeln, lässt sich die Transformationstheorie als Quelle von Classen-

zahlrelationen auch völlig erschöpfen. Insbesondere werden z. B. bei den Stufen $q = 7, 11, 13$, wo noch Hauptmoduln existieren, alle vermöge der letzteren gewonnenen Gierster'schen Relationen (cf. p. 203) durch lineare Combination jener Classenzahlrelationen herstellbar sein, welche man von den Correspondenzen der bezüglichen Hauptcongruenzgruppen aus gewinnen kann. Denn indem wir die durch eine einzelne solche Modulargleichung gegebene Punktcorrespondenz gleich auf der Fläche der zugehörigen Hauptcongruenzgruppe interpretieren, haben wir ersichtlich das Aggregat einer Reihe zugehöriger Modularcorrespondenzen, wenn wir an der Formulierung der letzteren genau im Sinne des vorigen Kapitels festhalten sollen.

Diese allgemeinen Bemerkungen beziehen sich natürlich auf die Gesamtheit aller Stufen, und also auch auf die zusammengesetzten; aber wir müssen bei den folgenden Ausführungen durchaus die durch die voraufgehenden Kapitel gegebene Beschränkung auf Primzahlstufen q innehalten. Überdies setzt die endgültige Aufstellung der Classenzahlrelationen zumal voraus, dass wir für die Functionen $\psi(n)$, $\chi(n)$ auch eine unmittelbar zugängliche *arithmetische* Definition besitzen; und solches haben wir erschöpfend nur bei $q = 7$ und $q = 11$ leisten können. Die Bestimmung der am Schluss des vorigen Kapitels mit s_{ie} und t_{ig} bezeichneten ganzen Zahlen werden wir somit, wie schon damals in Aussicht genommen, nur bei $q = 11$ durchführen.

Wir wollen vorab gleich angeben, dass die arithmetische Bestimmung der Coincidenzenanzahl $\nu(n)$, welches die wesentliche Aufgabe des vorliegenden Kapitels ist, sich im allgemeinen Falle q Schritt für Schritt in derselben Art erledigen lässt, wie im Falle $q = 5$, den wir bereits früher (p. 205 ff.) behandelten.

Endlich sei noch ausdrücklich bemerkt, dass die Theorie der Classenzahlrelationen für uns nur als eine „Anwendung" der Modularcorrespondenzen in Betracht kommt. Wir können demnach die in Rede stehende Theorie in keiner Weise erschöpfend behandeln und müssen insbesondere jene rein arithmetischen Beweismethoden einzelner niederer Classenzahlrelationen unbesprochen lassen, welche von Liouville*) und andrerseits von Kronecker**) herrühren. Nur sei noch betont, dass die Entwicklungen des Textes in ihrer Richtung viel weitertragend sind als zumal der eben erwähnte Ansatz Kronecker's, welch' letzterer

*) Vergl. Liouville's Journal, sér. II, Bd. 12 p. 98, Bd. 13 p. 1 ff., Bd. 14 p. 2, 7, 8, 262, sowie die allgemeineren Auseinandersetzungen in Bd. 3 bis 8 ebenda, insbesondere die Bemerkungen in Bd. 7, p. 44.

**) Siehe die schon p. 203 genannte Abhandlung *„Über bilineare Formen mit vier Variabelen"* Abhandlungen der Berliner Akademie von 1884.

in der That a. a. O. die Theorie der Classenzahlrelationen auf solche Stufenzahlen eingeschränkt wissen will, welche Potenzen von 2 sind. —

§ 1. Vorbereitende Sätze für die arithmetische Bestimmung der Coincidenzenanzahlen $\nu_i(n)$.

Für die Modularcorrespondenz n^{ter} Ordnung q^{ter} Stufe vom i^{ten} Schema sollte $\nu_i(n)$ die Anzahl der Coincidenzen sein. Wir können diesen Betrag $\nu_i(n)$ als Gesamtzahl einfacher Nullpunkte von

$$(1) \qquad h(\omega) = \prod_{k=0}^{\Phi-1}{}' P(\omega, R_k^{(i)}(\omega))$$

auf der Fläche $F_{\frac{1}{2}q(q^2-1)}$ definieren; doch haben wir dabei nur jene Nullpunkte zu zählen, welche durch Coincidenz der beiden Argumente im einzelnen Primfactor (1) entstehen, während die in den Punkten c der Fläche ein für alle Mal festliegenden Nullpunkte der einzelnen Primform (1) ausser Betracht bleiben. In (1) bedeutet natürlich $R_0^{(i)}$ $R_1^{(i)}, \ldots,$ ein Repräsentantensystem vom i^{ten} Schema:

$$(2) \qquad R_k^{(i)}(\omega) \equiv \begin{pmatrix} a_i, & b_i \\ c_i, & d_i \end{pmatrix} \pmod{q},$$

welches wieder für erweiterte Transformation zu bilden ist. Nur soll, wie wir schon festsetzten, bei einem rein quadratischen n im Falle des Schemas $\begin{pmatrix} \sqrt{n}, & 0 \\ 0, & \sqrt{n} \end{pmatrix}$ der eine, Transformation erster Ordnung darstellende, Repräsentant ausgeschlossen bleiben; wir deuteten dies in (1) durch einen oberen Index am Productzeichen an.

Soll nun im Polygon bei $\omega = \omega_0$ ein für uns in Betracht kommender Nullpunkt von $h(\omega)$ liegen, so wird wenigstens für einen Primfactor von (1), etwa für den $(k+1)^{\text{ten}}$, das erste Argument ω mit dem zweiten $R_k^{(i)}(\omega)$ bei $\omega = \omega_0$ relativ äquivalent sein müssen. Indem V eine mod. q mit 1 congruente Modulsubstitution vorstellen soll, werden wir hiermit die Gleichung haben:

$$(3) \qquad V(\omega_0) = R_k^{(i)}(\omega_0), \quad V \equiv 1 \pmod{q}.$$

Im Anschluss daran wollen wir die Bezeichnungsweise einführen:

$$(4) \qquad V^{-1} R_k^{(i)}(\omega) = R(\omega) = \frac{a\omega + b}{c\omega + d},$$

worauf wir für unseren Punkt ω_0 die Gleichung:

$$(5) \qquad \omega_0 = \frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}, \quad ad - bc = n$$

mit der Nebenbedingung:

$$(6) \qquad \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_i, & b_i \\ c_i, & d_i \end{pmatrix} \pmod{q}$$

gewinnen.

Ehe wir den hiermit gewonnenen Ansatz weiter discutieren, sei sogleich festgestellt, in welcher Ordnung der fragliche Factor von $h(\omega)$ bei $\omega = \omega_0$ auf dem Polygon verschwindet. Nach den früheren Sätzen über das Verschwinden der Primform haben wir zu diesem Ende für jeden einzelnen Nullpunkt eine Function $z(\omega)$ zu benutzen, welche die auf dem Polygon oder auch auf der geschlossenen Fläche genommene Umgebung von ω_0 auf einen *einfach bedeckten* Bereich der z-Ebene abbildet. Jener Primfactor verschwindet dann bei $\omega = \omega_0$ gerade so wie:

$$(7) \qquad z(\omega) - z(V^{-1}R_k^{(i)}(\omega)) \quad \text{oder wie } z(\omega) - z(R(\omega)),$$

wenn wir die in (4) eingeführte Bezeichnung brauchen sollen. Wir haben nun etwa zu setzen:

$$(8) \qquad z(\omega) = e^{\frac{2\pi i}{q}\cdot\frac{+\delta\omega-\beta}{-\gamma\omega+\alpha}} \quad \text{resp. } z(\omega) = \omega,$$

je nachdem ω_0 eine rationale Spitze $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ des Polygons ist oder aber ein Punkt im „Innern" desselben. Für den letzteren Fall insbesondere haben wir nach elementarer Rechnung:

$$\omega - R(\omega) = (\omega - \omega_0)[1 - R'(\omega_0)] - \frac{(\omega-\omega_0)^2}{1\cdot 2} R''(\omega_0) + \cdots$$

und beweisen übrigens leicht, dass $R'(\omega)$ für $\omega = \omega_0$ nicht gleich 1 sein kann. Man hat also das Resultat: *Liegt der Punkt ω_0 im „Innern" des Polygons, so verschwindet der in Rede stehende Primfactor dortselbst schlechtweg in erster Ordnung; ist ω_0 die Spitze $\omega_0 = \frac{\alpha}{\gamma}$, so liegt, auf dem Polygon gemessen, ein Nullpunkt der gleichen Ordnung vor, wie bei:*

$$(9) \qquad e^{\frac{2i\pi}{q}\cdot\frac{+\delta\omega-\beta}{-\gamma\omega+\alpha}} - e^{\frac{2i\pi}{q}\cdot\frac{+\delta R(\omega)-\beta}{-\gamma R(\omega)+\alpha}}.$$

Man betrachte nun zunächst allein die im „Innern" des Polygons gelegenen Nullpunkte ω_0. Wir wiesen dem bei ω_0 gelegenen (einfachen) Nullpunkte von $P(\omega, R_k(\omega))$ den der Bedingung (6) genügenden Ansatz (5) zu; wir werden jetzt genauer sagen können, dass dieser Ansatz jenem Nullpunkte von $P(\omega, R_k(\omega))$ auch *eindeutig* zugeordnet ist, *d. h. dass wir nicht noch einen zweiten Ansatz gleicher Art haben, dem wieder eben jener Nullpunkt zugehört.* Letzteres wäre in der That nur dann möglich, wenn wir neben V noch eine zweite mod. q mit 1 congruente Substitution V' hätten, welche, an Stelle von V in (3) eingesetzt, dieser Gleichung ebenfalls genügt. Dann aber wäre:

$$V^{-1}V'(\omega_0) = \omega_0,$$

so dass ω_0 Fixpunkt der mod. q mit 1 congruenten Substitution $V^{-1}V'$ wäre. Elliptische Substitutionen sind aber niemals mod. q mit 1 congruent, und also hat man, wie behauptet $V' = V$.

Mag nun umgekehrt für irgend ein Quadrupel ganzer Zahlen a, b, c, d der Determinante n der Ansatz:

$$(10) \qquad \omega_0 = \frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}, \quad \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_i, & b_i \\ c_i, & d_i \end{pmatrix} \pmod{q}$$

mit einem Punkte ω_0 im „Innern" des Polygons bestehen, so wird demselben ein einfacher Nullpunkt von $h(\omega)$ entsprechen. Denn wir haben hier mit einer Transformation n^{ter} Ordnung vom i^{ten} Schema zu thun, und zu dieser gehört einer unserer Repräsentanten $R_k^{(i)}$. Man wird alsdann mit Hülfe einer Substitution $V \equiv 1 \pmod{q}$ die fragliche Transformation (a, b, c, d) in der Gestalt $VR_k^{(i)}$ darstellen können, womit der volle Anschluss an die Formeln (3) u. f. gewonnen ist. Als erstes Resultat haben wir demnach: *Die Gesamtzahl einfacher im „Innern" des Polygons gelegener Nullpunkte von $h(\omega)$ ist gleich der Anzahl aller unterschiedenen Ansätze* (10) *für Punkte ω_0 des Polygoninnern.*

Irgend welcher Abzug ist hier übrigens auch im Ausnahmefalle eines rein quadratischen n beim Schema $\begin{pmatrix} \sqrt{n}, & 0 \\ 0, & \sqrt{n} \end{pmatrix}$ *nicht* mehr anzubringen. Die im letzteren Falle in Betracht kommende Transformation erster Ordnung kann nämlich keine im „Innern" gelegene Nullpunkte ω_0 liefern, da sie doch eine mod. q mit 1 congruente Modulsubstitution vorstellt.

Wie wir nun alle Ansätze (10) von den ganzzahligen quadratischen Formen (P, Q, R) aus erhalten können, sahen wir für $q = 1$ und $q = 5$ bereits ausführlich im vierten Abschnitt; wir werden jetzt die damaligen Massnahmen ohne weiteres auf den Fall eines beliebigen q übertragen können. Wir sagen sofort folgendermassen:

Erstlich gewinnen wir alle Ansätze (10) mit Punkten ω_0 des Ausgangsdreiecks in der Gestalt:

$$(11) \qquad \omega_0 = \frac{\frac{-Q+\varkappa}{2}\,\omega_0 - R}{P\omega_0 + \frac{Q+\varkappa}{2}}, \quad \Delta = 4PR - Q^2 = 4n - \varkappa^2,$$

wobei $\varkappa$ alle ganzen Zahlen des Intervalls $-2\sqrt{n} < \varkappa < 2\sqrt{n}$ durchlaufen soll, während für (P, Q, R) jedesmal die gesamten reducierten Formen der einzelnen Determinante $D = -\Delta$ zu nehmen sind. Be-

stehe nun das Fundamentalpolygon aus den $\frac{q(q^2-1)}{2}$ Doppeldreiecken $1, V_1, V_2, \ldots$, so werden wir von (11) aus in:

$$(12) \qquad \omega_0 = V_i\left(\frac{\frac{-Q+\varkappa}{2}V_i^{-1}(\omega_0)-R}{PV_i^{-1}(\omega_0)+\frac{Q+\varkappa}{2}}\right)$$

alle für uns in Betracht kommenden Ansätze (10) gewinnen, die wir dann aber noch durch Aufnahme der Congruenzbedingung (10) auf die verschiedenen Schemata zu verteilen haben.

Sollten nun die Ansätze:

$$(13) \qquad \begin{cases} \omega_0 = V_i\left(\dfrac{\frac{-Q+\varkappa}{2}V_i^{-1}(\omega_0)-R}{PV_i^{-1}(\omega_0)+\frac{Q+\varkappa}{2}}\right), \\ \omega_0 = V_k\left(\dfrac{\frac{-Q'+\varkappa'}{2}V_k^{-1}(\omega_0)-R'}{P'V_k^{-1}(\omega_0)+\frac{Q'+\varkappa'}{2}}\right) \end{cases}$$

nach Entwicklung ihrer rechten Seiten auf *dieselbe* Gleichung (10) führen, so müsste jedenfalls ω_0 in beiden Gleichungen (13) dieselbe Bedeutung haben. Aber die beiden mit ω_0 äquivalenten Punkte $V_i^{-1}(\omega_0)$, $V_k^{-1}(\omega_0)$ liegen zugleich innerhalb des Ausgangsdreiecks; schliessen wir also vorab ein mit i oder ϱ äquivalentes ω_0 aus, so ist notwendig $V_i = V_k$ und damit, wie man leicht sieht, $P' = P$, $Q' = Q, \ldots$ — Liegt andrerseits eine Form $(P, 0, P)$ und also ein mit i äquivalenter Punkt ω_0 vor, so hat man stets die beiden Möglichkeiten $V_k = V_i$ und $V_k = V_i T$, und jetzt führen die *zwei* Ansätze:

$$(14) \qquad \omega_0 = V_i\left(\frac{\frac{\varkappa}{2}V_i^{-1}(\omega_0)-P}{PV_i^{-1}(\omega_0)+\frac{\varkappa}{2}}\right), \quad \omega_0 = V_i T\left(\frac{P\cdot TV_i^{-1}(\omega_0)+\frac{\varkappa}{2}}{-\frac{\varkappa}{2}\cdot TV_i^{-1}(\omega_0)+P}\right)$$

zu derselben Gleichung (10). Dass aber die beiden in (14) zur Geltung kommenden Systeme $(P, Q, R; \varkappa)$ stets von einander verschieden sind, zeigten wir schon früher (p. 179) ausführlich. Analoges trifft man bei den Formen (P, P, P), d. i. bei den mit ϱ äquivalenten ω_0, an und hat als Resultat: *Um die Gesamtzahl der im „Innern" des Polygons gelegenen Nullpunkte von $h(\omega)$ zu gewinnen, hat man jede einzelne Formclasse der Determinante $D = -(4n - \varkappa^2)$ so oft zu zählen, als es mod. q incongruente Substitutionen V giebt, welche der Bedingung:*

$$(15)\qquad V\cdot\begin{pmatrix}\frac{-Q+\varkappa}{2}, & -R\\ +P, & \frac{Q+\varkappa}{2}\end{pmatrix}\cdot V^{-1}\equiv\begin{pmatrix}a_i, & b_i\\ c_i, & d_i\end{pmatrix}\ (\mathrm{mod.}\ q)$$

genügen, und die solchergestalt beim einzelnen $\varkappa$ entspringende Anzahl ist über das Intervall $-2\sqrt{n}<\varkappa<+2\sqrt{n}$ zu summieren. Dabei sollen die Classen mit reducierten Formen $(P, 0, P)$ nur $\frac{1}{2}$-fach, diejenigen mit reducierten Formen (P, P, P) nur $\frac{1}{3}$-fach zählen.

Der Fortgang von der Gleichung (12) zur Congruenz (15) bedingt eine grosse Erleichterung unserer weiteren Betrachtung. Man bemerke insbesondere, dass in (15) der Ersatz der reducierten Form (P, Q, R) durch irgend eine äquivalente Form wohl die Reihenfolge, aber nicht die Anzahl der (15) befriedigenden Substitutionen V zu verändern vermag. Es wird also gestattet sein, in (15) bei der nun folgenden Abzählung der Substitutionen V unter (P, Q, R) irgend eine beliebige Form der gerade in Betracht kommenden Classe zu verstehen.

§ 2. Abzählung der Nullpunkte von $h(\omega)$ im Polygoninnern. Zu treffende Fallunterscheidungen I, II, III.

Auf der nun gewonnenen Grundlage gestaltet sich die Abzählung der Nullpunkte von $h(\omega)$ im Polygoninnern, wie wir schon andeuteten, genau so wie seinerzeit (p. 213) im Specialfall $q=5$. Indem wir demnach auch die damaligen Bezeichnungen wieder aufnehmen, schreiben wir das vorzulegende Schema mit Unterdrückung des unteren Index i einfach $\begin{pmatrix}a, & b\\ c, & d\end{pmatrix}$, während wir übrigens $V=\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ setzen. Für das einzelne $\varkappa$ entnehmen wir dann der einzelnen Formclasse der Determinante $-(4n-\varkappa^2)$ nach Belieben (P, Q, R) als repräsentierende Form und schreiben weiter (gerade wie p. 213):

$$(1)\qquad \frac{-Q+\varkappa}{2}=a_1,\quad -R=b_1,\quad P=c_1,\quad \frac{Q+\varkappa}{2}=d_1.$$

Die Congruenz (10) § 1 kleidet sich nun in die Gestalt:

$$(2)\qquad \begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1, & b_1\\ c_1, & d_1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}a, & b\\ c, & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix},\ (\mathrm{mod.}\ q),$$

und unsere Aufgabe ist, nachzusehen, *wie viele modulo q incongruente Substitutionen V dieser Forderung genügen.*

Zu diesem Ende schreibe man unter Aufnahme der Zahl e, die entweder $+1$ oder -1 bedeutet, die Congruenz (2) vor allem explicite:

$$(3)\qquad \left.\begin{cases} \alpha a_1 + \beta c_1 \equiv e(\alpha a + \gamma b), \\ \alpha b_1 + \beta d_1 \equiv e(\beta a + \delta b), \\ \gamma a_1 + \delta c_1 \equiv e(\alpha c + \gamma d), \\ \gamma b_1 + \delta d_1 \equiv e(\beta c + \delta d), \\ \alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \end{cases}\right\} \pmod{q}.$$

Sodann führe man die Fallunterscheidung ein, ob der Teiler σ der gerade vorliegenden Formclasse relativ prim gegen q oder durch q teilbar ist.

Liegt der erste Fall *eines gegen q relativ primen Teilers σ* vor, so können wir die Form (P, Q, R) aus ihrer Classe so auswählen, dass $P = c_1$ selbst relativ prim gegen q ist*). Alsdann ergeben sich für β und δ aus der ersten und dritten Formel (3) die beiden Werte:

$$(4)\qquad \left.\begin{array}{l} \beta \equiv e(\alpha a + \gamma b)\, c_1^{-1} - \alpha a_1 c_1^{-1} \\ \delta \equiv e(\alpha c + \gamma d)\, c_1^{-1} - \gamma a_1 c_1^{-1} \end{array}\right\} \pmod{q},$$

und durch Einsetzung dieser Werte in die drei anderen Congruenzen folgt weiter:

$$(5)\qquad \begin{cases} [(a_1 + d_1) - e(a + d)]\,(a\alpha + b\gamma) \equiv 0, \\ [(a_1 + d_1) - e(a + d)]\,(c\alpha + d\gamma) \equiv 0, \\ \qquad c\alpha^2 + (d - a)\,\alpha\gamma - b\gamma^2 \equiv ec_1. \end{cases}$$

Da n prim gegen q ist, α und γ aber jedenfalls nicht zugleich den Factor q besitzen, so folgt aus den beiden ersten Congruenzen (5) notwendig $a_1 + d_1 \equiv e(a + d)$; und damit kommen diese Congruenzen zugleich zur Erledigung. Insgesamt werden wir also die fünf Congruenzen (3) für den vorliegenden Fall eines gegen q primen Teilers σ durch die vier mit ihnen gleichwertigen:

$$(6)\qquad \left.\begin{cases} a_1 + d_1 \equiv e(a + d), \\ c\alpha^2 + (d - a)\,\alpha\gamma - b\gamma^2 \equiv ec_1, \\ \beta \equiv e(\alpha a + \gamma b) \cdot c_1^{-1} - \alpha a_1 \cdot c_1^{-1}, \\ \delta \equiv e(\alpha c + \gamma d) \cdot c_1^{-1} - \gamma a_1 \cdot c_1^{-1}, \end{cases}\right\} \pmod{q}$$

zu ersetzen haben und gehen auf deren Discussion baldigst ein.

Haben wir mit dem zweiten Falle zu thun, dass nämlich die vorgelegte Formclasse *einen durch q teilbaren Teiler σ* besitzt, so wird offenbar zufolge (1) $a_1 \equiv d_1$, $b_1 \equiv c_1 \equiv 0$ sein. Da überdies $\Delta = 4n - (a_1 + d_1)^2$ durch q teilbar ist, so gelten die Congruenzen:

$$(7)\qquad a_1 \equiv d_1 \equiv \pm\sqrt{n},\quad b_1 \equiv c_1 \equiv 0, \quad \pmod{q}.$$

*) Cf. Dirichlet-Dedekind, *Vorles. über Zahlentheorie*, p. 233 der 3. Aufl.

Die Congruenzen (3) nehmen somit für diesen Fall die Gestalt an:

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha a + \gamma b &\equiv \pm e\alpha\sqrt{n}, \\ \beta a + \delta b &\equiv \pm e\beta\sqrt{n}, \\ \alpha c + \gamma d &\equiv \pm e\gamma\sqrt{n}, \\ \beta c + \delta d &\equiv \pm e\delta\sqrt{n}, \\ \alpha\delta - \beta\gamma &\equiv 1. \end{aligned}\right\} \pmod{q}.$$

Bei der Discussion der Congruenzen (6) und (8) unterscheiden wir nun die nachfolgenden drei Fälle:

I. Δ *relativ prim gegen* q,

II. $\Delta \equiv 0$, *aber wenigstens eine der Zahlen* b, c *prim gegen* q,

III. $\Delta \equiv 0$, *sowohl* b *wie* c *durch* q *teilbar.*

Man setze, dass im Falle III eine Form (P, Q, R) mit einem gegen q primen Teiler und damit die Congruenzen (6) Anwendung finden, so würde sich aus:

$$\Delta = 4n - (a_1 + d_1)^2 \equiv 4n - (a + d)^2 \equiv 0, \quad ad \equiv n, \quad b \equiv c \equiv 0$$

offenbar $a \equiv d \equiv \pm\sqrt{n}$, $b \equiv c \equiv 0$ ergeben, und also würde aus (6) der Voraussetzung entgegen $c_1 \equiv 0$ folgen; die Congruenzen (6) können also in dem in Rede stehenden Falle keine Anwendung finden. Umgekehrt folgt aus den Congruenzen (8) durch Auflösung nach a, b, c, d sofort $a \equiv d \equiv \pm\sqrt{n}$, $b \equiv c \equiv 0$, und da ausserdem $\Delta \equiv 0$ ist, so liegt III vor. *Der Fall* III, *der hiernach auch als der Fall des Schemas* $\begin{pmatrix} \sqrt{n}, & 0 \\ 0, & \sqrt{n} \end{pmatrix}$ *bezeichnet werden kann, kommt gerade für alle Formen* (P, Q, R) *vom Teiler* q *und nur für diese in Betracht.*

§ 3. Fortsetzung: Discussion der Fälle I, II, III.

Discussion des Falles I. Es ist gegenwärtig das Schema $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ von $\begin{pmatrix} \sqrt{n}, & 0 \\ 0, & \sqrt{n} \end{pmatrix}$ verschieden und übrigens so zu wählen, dass $(a + d)^2$ nicht mit $4n$ congruent wird. Zufolge (6) § 2 ist demnächst die Zahl $x \equiv e(a + d)$ auszuwählen; dieselbe ist also auf zwei bez. eine Zahlclasse mod. q eingeschränkt, je nachdem $(a + d)$ prim gegen q oder durch q teilbar ist. *Im ersteren dieser beiden Fälle ist* e *mit* x *bestimmt; im letzteren Falle ist jede Zahl* x *zweimal zu nehmen, nämlich einmal für* $e = +1$, *sodann für* $e = -1$. Des weiteren haben wir die incongruenten Lösungen (α, γ) der Congruenz:

(1) $$c\alpha^2 + (d-a)\alpha\gamma - b\gamma^2 \equiv ec_1, \pmod{q}$$

abzuzählen; es giebt deren aber, sofern (α, γ) und $(-\alpha, -\gamma)$ als nicht verschieden angesehen werden, insgesamt:

(2) $$\tfrac{1}{2}\left[q - \left(\frac{-\Delta}{q}\right)\right].$$

Indem wir den Beweis dieser Behauptung hinausschieben, schliessen wir aus (6) § 2 gleich weiter, dass mit $\varkappa, \alpha, \gamma, e$ auch β und δ eindeutig bestimmt sind. *Es ist sonach im Falle* I *die etwa mit* $\nu'(n)$ *zu bezeichnende Anzahl der im Innern des Polygons gelegenen Nullpunkte von* $h(\omega)$ *gegeben durch:*

(3) $$\nu'(n) = \tfrac{1}{2}\left[q - \left(\frac{-\Delta}{q}\right)\right] \sum_{\varkappa = \pm(a+d)} \mathrm{H}(4n - \varkappa^2),$$

wobei die schon soeben genannte Summationsbedingung des $\varkappa$ *in Formel* (3) *am Summenzeichen angedeutet wurde, während übrigens, wie auch stets in der Folge, die Bedingung*

$$-2\sqrt{n} < \varkappa < 2\sqrt{n}$$

besteht. —

Ehe wir den eben benutzten Hülfssatz über die Anzahl (2) von Lösungen der Congruenz (1) beweisen, mögen gleich die noch ausstehenden Discussionen der Fälle II und III erledigt werden:

Discussion des Falles II. Haben wir ein Schema, für welches $(a+d)^2 \equiv 4n$ ist, ohne dass indessen beide Zahlen b und c durch q teilbar sind, so liegt der Fall II und damit derjenige der Congruenzen (6) § 2 vor. Aus der ersten dieser Congruenzen folgt:

(4) $$\varkappa \equiv e(a+d) \equiv \pm 2\sqrt{n}, \pmod{q},$$

wie denn natürlich der Fall II *nur für quadratische Reste* n von q eintreten kann. Die zweite Congruenz (6) § 2 liefert, je nachdem b oder c prim gegen q ist, die erste oder zweite der nachfolgenden Bedingungen:

(5) $$\left\{\begin{aligned} \left(b\gamma - \frac{d-a}{2}\alpha\right)^2 &\equiv ebP \\ \left(c\alpha + \frac{d-a}{2}\gamma\right)^2 &\equiv ecP \end{aligned}\right\} \pmod{q},$$

und bei ihrer ferneren Discussion haben wir zwei Fälle zu unterscheiden.

Sei erstlich q eine *Primzahl der Gestalt* $q = 4h+1$, so werden b und P bez. c und P im quadratischen Charakter übereinstimmen müssen; sollten übrigens b und c zugleich prim gegen q sein, so würde man aus $(a+d)^2 \equiv 4(ad - bc)$ folgern, dass beide Zahlen b und c im quadratischen Charakter mod. q übereinstimmen. Aus der Eintei-

lung der quadratischen Formen in Geschlechter*) ist bekannt, dass für die einzelne Formclasse die ersten Coefficienten P, sofern sie nicht durch q teilbar sind, im quadratischen Charakter mod. q übereinstimmen. Je nachdem aber $\left(\frac{P}{q}\right) = +1$ oder -1 ist, erteilen wir der Classe den Charakter $+1$ oder -1. *Wir nennen alsdann* $\mathsf{H}_e(\Delta)$ *die Anzahl der Formclassen der Determinante* $-\Delta$ *vom Charakter* e, *so dass*

$$\mathsf{H}_{+1}(\Delta) + \mathsf{H}_{-1}(\Delta),$$

vermehrt um die Anzahl der Formclassen der Determinante $-\Delta$ mit dem Teiler q, die gesamte Anzahl $\mathsf{H}(\Delta)$ liefern wird. Liegt nun aber in (P, Q, R) eine Form von vorschriftsmässigem Charakter vor, so wird (5), wie man leicht abzählt, gerade q unterschiedene Lösungen (α, γ) liefern. Für e ist übrigens in (5) und (4) stets sowohl $+1$ wie -1 zu nehmen, so dass x aus zwei unterschiedenen, durch $\pm 2\sqrt{n}$ angedeuteten Zahlclassen mod. q zu wählen ist. Indem wir also zusammenfassen, *wird die Anzahl* $\nu'(n)$ *der im Innern des Polygons gelegenen Nullpunkte im Falle II bez. durch:*

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} \nu'(n) = q \sum\limits_{x \equiv \pm 2\sqrt{n}}' \mathsf{H}_{+1}(4n - x^2), \\ \nu'(n) = q \sum\limits_{x \equiv \pm 2\sqrt{n}}' \mathsf{H}_{-1}(4n - x^2) \end{cases}$$

gegeben sein, je nachdem b *bez.* c *Rest oder Nichtrest von* q *ist.*

Es bleibt für II der Fall zu besprechen, dass q eine *Primzahl der Gestalt* $q = 4h + 3$ ist. Hier lässt sich e stets und nur in *einer* Weise so auswählen, dass

$$\left(\frac{ebP}{q}\right) = +1, \quad \text{bez.} \left(\frac{ecP}{q}\right) = +1$$

wird; sollten b und c übrigens zugleich prim gegen q sein, so würden sie wieder im quadratischen Charakter übereinstimmen. Nach richtiger Bestimmung von e giebt (5) genau q incongruente Lösungen. Da gegenwärtig in (4) entweder nur das obere oder nur das untere Zeichen gilt, so würde ein Gleiches auch als Summationsbedingung für:

$$\sum_{x \equiv \pm 2\sqrt{n}}' \mathsf{H}(4n - x^2)$$

auszusprechen sein. Inzwischen hat $\mathsf{H}(4n - x^2)$ für zwei nur im Zeichen unterschiedene x gleichen Wert; wir werden also zweckmässiger Weise an der bisherigen Verabredung festhalten, dass $x \equiv 2\sqrt{n}$ und

*) Dirichlet-Dedekind, p. 313 ff. der dritten Aufl.

$\varkappa \equiv -2\sqrt{n}$ zugleich berücksichtigt werden sollen, und müssen dann den Factor $\frac{1}{2}$ vor das Summenzeichen setzen. Indem wir so die Anzahl

$$\frac{1}{2}q \sum_{\varkappa \equiv \pm 2\sqrt{n}} \mathsf{H}(4n - \varkappa^2)$$

erhalten, müssen wir noch bemerken, dass hier zunächst auch die Formclassen vom Teiler q mitgezählt sind, da $\Delta \equiv 0 \pmod{q}$ ist. Die Classenanzahl der Formen von der Determinante $-\Delta$ und vom Teiler q ist aber offenbar durch $\mathsf{H}\left(\frac{\Delta}{q^2}\right)$ angegeben, sofern wir nur festsetzen, *dass hier und in der Folge* $\mathsf{H}(m)$ *stets* $= 0$ *sein soll, sobald das Argument von* H *keine ganze Zahl ist.* Von der zuletzt angegebenen Summe wird daraufhin den Betrag:

$$\frac{1}{2}q \sum_{\varkappa \equiv \pm 2\sqrt{n}} \mathsf{H}\left(\frac{4n - \varkappa^2}{q^2}\right)$$

in Abzug zu bringen sein. *Die Anzahl* $\nu'(n)$ *der im Innern des Polygons gelegenen Nullstellen ist bei* $q = 4h + 3$ *im Falle II hiernach gegeben durch:*

$$(7) \qquad \nu'(n) = \frac{1}{2}q \sum_{\varkappa \equiv \pm 2\sqrt{n}} \left[\mathsf{H}(4n - \varkappa^2) - \mathsf{H}\left(\frac{4n - \varkappa^2}{q^2}\right)\right].$$

Discussion des Falles III. In dem noch bleibenden Falle III des Schemas $a \equiv d \equiv \sqrt{n}$, $b \equiv c \equiv 0$ kommen die Congruenzen (7) und (8) § 2 zur Verwendung. Hier also wird $\varkappa = a_1 + d_1 \equiv \pm 2\sqrt{n}$, und es ist dann e mit $+1$ oder -1 zu identificieren, je nachdem in $\varkappa \equiv \pm 2\sqrt{n}$ das obere oder untere Zeichen gewählt ist. Da hiernach in (8) § 2 rechter Hand $\pm e = 1$ wird, so sind diese Congruenzen zufolge $a \equiv d \equiv \sqrt{n}$, $b \equiv c \equiv 0$ für alle $\frac{1}{2}q(q^2 - 1)$ incongruenten Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ erfüllt. Da wir nun hier gerade mit den Formen des Teilers q zu thun haben, *so wird im Falle* III *die Anzahl* $\nu'(n)$ *der im Innern des Polygons gelegenen Nullpunkte von* $h(\omega)$ *gegeben sein durch:*

$$(8) \qquad \nu'(n) = \frac{q(q^2-1)}{2} \sum_{\varkappa \equiv \pm 2\sqrt{n}} \mathsf{H}\left(\frac{4n - \varkappa^2}{q^2}\right).$$

Hiermit ist die Anzahl der in das Polygoninnere entfallenden Nullpunkte von $h_i(\omega)$ in allen Fällen gegeben.

§ 4. Beweis des Hülfssatzes über die Anzahl incongruenter Lösungen einer Congruenz zweiten Grades.

Es bleibt noch übrig, die in (2) § 3 gemachte Angabe über die Gesamtzahl incongruenter Auflösungen der Congruenz (1) daselbst zu beweisen. Wir betrachten zu dem Ende allgemein die Anzahl incongruenter Lösungen (x, z) der Congruenz:

$$(1) \qquad Ax^2 + Bxz + Cz^2 \equiv m, \quad (\text{mod. } q),$$

wobei wir nur das Eine voraussetzen wollen, dass die Determinante $D = B^2 - 4AC$ der in (1) linker Hand stehenden Form prim gegen q sei*).

Man mache nun erstlich die Annahme, dass wenigstens eine der Zahlen A, C prim gegen q ist; man darf dann voraussetzen, A sei diese gegen q prime Zahl, und substituiere daraufhin:

$$2Ax + Bz \equiv y, \quad 4Am \equiv M, \; (\text{mod. } q).$$

Die Congruenz (1) geht alsdann offenbar über in die transformierte Gestalt:

$$(2) \qquad y^2 - Dz^2 \equiv M \; (\text{mod. } q),$$

und es entsprechen einander die Lösungen von (1) und (2) eindeutig.

Die Anzahlen der Lösungen für zwei verschiedene Zahlen M, die jedoch im quadratischen Charakter mod. q übereinstimmen, sind nun offenbar mit einander identisch. Nennt man demnach σ_0 die Zahl der Lösungen von (2) für $M \equiv 0$, σ_{+1} diejenige für einen Rest M und σ_{-1} die für einen Nichtrest, so hat man die Gleichung:

$$(3) \qquad \sigma_0 + \frac{q-1}{2} \cdot (\sigma_{+1} + \sigma_{-1}) = q^2.$$

Die Zahl σ_0 als Anzahl incongruenter Lösungen von $y^2 \equiv Dz^2$ ist nun leicht zu bestimmen. Ist D Nichtrest, so giebt's nur die eine Lösung $y \equiv z \equiv 0$; ist D Rest, so kommen noch weitere $2q - 2$ Lösungen hinzu. Man hat demnach:

$$\sigma_0 = 1 + (q-1)\left[1 + \left(\frac{D}{q}\right)\right],$$

und also folgt aus Gleichung (3):

$$(4) \qquad \sigma_{+1} + \sigma_{-1} = 2\left[q - \left(\frac{D}{q}\right)\right].$$

Um weiter σ_{+1} zu bestimmen, wählen wir $M = 1$ und haben die Congruenz zu discutieren:

---

*) Diese Bedingung ist für die in der Congruenz (1) § 3 vorliegende Determinante $D = -\Delta$ thatsächlich erfüllt.

(5) $$y^2 - 1 \equiv Dz^2 \pmod{q}.$$

Hier kommen erstlich die beiden Lösungen $(1, 0)$, $(-1, 0)$ in Betracht, sodann für $\left(\frac{-D}{q}\right) = 1$ noch die beiden Lösungen $\left(0, \pm\sqrt{-D^{-1}}\right)$. Nennt man demnach τ_{+1} die Anzahl derjenigen Lösungen von (5), bei denen weder y noch z durch q teilbar ist, so wird:

(6) $$\sigma_{+1} = 3 + \left(\frac{-D}{q}\right) + \tau_1.$$

Zur Bestimmung von τ_1 aber stellen wir den Satz auf: *Unter den* $\frac{q-3}{2}$ *von* 1 *verschiedenen Resten* y^2 *giebt es*

(7) $$\tfrac{1}{4}\left[q - 4 - \left(\frac{-1}{q}\right)\right],$$

denen wieder ein Rest voraufgeht, so dass den übrigen

(8) $$\frac{q-3}{2} - \tfrac{1}{4}\left[q - 4 - \left(\frac{-1}{q}\right)\right] = \tfrac{1}{4}\left[q - 2 + \left(\frac{-1}{q}\right)\right]$$

ein Nichtrest vorangeht. Man bemerke nämlich, dass die Reste jener ersteren Art gerade die in der Gestalt:

(9) $$y^2 \equiv \left(\frac{\zeta + \zeta^{-1}}{2}\right)^2, \pmod{q}$$

darstellbaren Zahlen sind, wie man leicht zeigt. Hier wird das gleiche y^2 nun immer durch die vier Zahlen:

(10) $$\zeta,\ -\zeta,\ \zeta^{-1},\ -\zeta^{-1}$$

geliefert, und auszuschliessen sind $\zeta \equiv 0$, $\equiv \pm 1$, sowie eventuell $\zeta \equiv \pm\sqrt{-1}$, d. i. im ganzen $4 + \left(\frac{-1}{q}\right)$ Werte; für die übrigen ζ ist alsdann ein Identischwerden zweier Zahlen (10) ausgeschlossen, womit sich die soeben angegebenen Anzahlen (7) und (8) ergeben. Die Anwendung auf Formel (5) liefert den Zahlwert von τ_1 und damit

$$\text{für } \left(\frac{D}{q}\right) = +1,\quad \sigma_{+1} = 3 + \left(\frac{-D}{q}\right) + q - 4 - \left(\frac{-1}{q}\right),$$

$$\text{für } \left(\frac{D}{q}\right) = -1,\quad \sigma_{+1} = 3 + \left(\frac{-D}{q}\right) + q - 2 + \left(\frac{-1}{q}\right).$$

Nimmt man hier endlich noch auf die Identität:

$$\left(\frac{-D}{q}\right) - \left(\frac{-1}{q}\right)\left(\frac{D}{q}\right) = 0$$

sowie auf die Formel (4) Rücksicht, *so ergiebt sich als Anzahl incongruenter Lösungen von* (1) *für ein gegen* q *primes* m:

(11) $$\sigma_{+1} = \sigma_{-1} = q - \left(\frac{D}{q}\right).$$

Nachträglich bestätigt man noch leicht direct, dass dieses Resultat uneingeschränkt auch im zunächst ausgeschlossenen Falle $A \equiv C \equiv 0$ bestehen bleibt.

Bei der Anwendung auf die Congruenz (1) § 3 hat man jetzt nur noch zu beachten, dass $D = -\Delta$ zu setzen ist, dass daselbst c_1 prim gegen q ist, und dass endlich je zwei Lösungen (α, γ) und $(-\alpha, -\gamma)$ nicht als verschieden gelten sollen. Die in (2) § 3 angegebene Anzahl incongruenter Lösungen ergiebt sich daraufhin in der That aus der eben bewiesenen allgemeinen Regel (11).

§ 5. Abzählung der in den Polygonspitzen gelegenen Nullpunkte von $h(\omega)$.

Nach Erledigung der inneren Punkte des Polygons bleibt uns nun die zweite Aufgabe zu lösen, die Anzahl der Nullpunkte unseres Primformproductes $h(\omega)$ in den Polygonspitzen zu bestimmen; diese Anzahl mögen wir etwa durch $\nu''(n)$ bezeichnen. Wir unterziehen etwa die Spitze $\omega_0 = \frac{\alpha}{\gamma}$ der Untersuchung und gehen dabei wieder genau denselben Weg, wie seinerzeit bei $q = 5$ (cf. p. 224).

Das Wichtigste ist wie damals so auch hier, dass wir das Repräsentantensystem $R_0, R_1, \ldots$ des Schemas $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ in einer für die Untersuchung am Punkte $\frac{\alpha}{\gamma}$ besonders geeigneten Gestalt aussuchen können. Zu diesem Ende wählen wir erstlich eine Modulsubstitution:

$$(1) \qquad \omega' = v(\omega) = \frac{+\delta\omega - \beta}{-\gamma\omega + \alpha},$$

deren α und γ eben mit dem Zähler resp. Nenner des vorgelegten rationalen Wertes ω_0 identisch sind. Es wird dann jedenfalls:

$$(2) \qquad \frac{A_k v(\omega) + B_k}{D_k}, \quad \text{mit } A_k D_k = n, \quad 0 \leqq B_k < D_k$$

ein Repräsentantensystem erster Stufe für erweiterte Transformation sein. Man hat demnächst nur noch für den einzelnen Ausdruck (2) eine Modulsubstitution V_k in solcher Weise herauszugreifen, dass

$$(3) \qquad R_k(\omega) = \frac{a_k\omega + b_k}{c_k\omega + d_k} = V_k\left(\frac{A_k v(\omega) + B_k}{D_k}\right) \equiv \frac{a\omega + b}{c\omega + d}, \quad (\text{mod. } q)$$

zutrifft; erst dann haben wir ein Repräsentantensystem n^{ter} Ordnung q^{ter} Stufe vom richtigen Schema. Natürlich ist damit die Substitution V_k nur erst mod. q bestimmt. Übrigens wird es hier nun ausdrücklich zu beachten sein, dass in dem Producte:

$$h(\omega) = \prod_k{}' P(\omega, R_k(\omega)) \tag{4}$$

für rein quadratisches n beim Schema $\begin{pmatrix}\sqrt{n}, & 0\\ 0, & \sqrt{n}\end{pmatrix}$ der eine auf die erste Ordnung bezügliche Repräsentant ausgelassen werden sollte.

Mag jetzt der $(k+1)^{te}$ Repräsentant $R_k(\omega)$ für $\omega_0 = \frac{\alpha}{\gamma}$ mit $\frac{\alpha}{\gamma}$ selbst relativ äquivalent sein, so können wir die in (3) aufgenommene Modulsubstitution V_k gleich so gewählt denken, dass $\frac{\alpha}{\gamma} = R_k\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ ist. Der betreffende Primfactor (4) — nennen wir ihn P_k — wird dann auf dem Polygon gerade in derselben Art verschwinden wie:

$$e^{\frac{2\pi i}{q} v(\omega)} - e^{\frac{2\pi i}{q} vV_k\left(\frac{Av(\omega)+B}{D}\right)}, \tag{5}$$

was aus (9) p. 638 unmittelbar folgt. Man kann offenbar sagen, P_k werde gerade so zu Null wie:

$$e^{\frac{2\pi i}{q}\omega'} - e^{\frac{2\pi i}{q} vV_k\left(\frac{A\omega'+B}{D}\right)} \tag{6}$$

bei $\omega' = i\infty$ auf dem Polygon. Da nun $vV_k\left(\frac{A\omega'+B}{D}\right)$ zufolge der Voraussetzung für $\omega' = i\infty$ selbst $= i\infty$ wird, so ist die Modulsubstitution vV_k notwendig eine Potenz von S:

$$vV_k = S^\nu. \tag{7}$$

Der Ausdruck (6) geht daraufhin über in:

$$e^{\frac{2\pi i}{q}\omega'} - e^{\frac{2\pi i}{q}\left(\frac{A\omega}{D} + \frac{B}{D} + \nu\right)} \tag{8}$$

und liefert hiernach die Regel: *P_k wird bei $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ im Polygon in der Ordnung 1 oder $\frac{A}{D}$ verschwinden, je nachdem $A \geqq D$ oder $A < D$ ist.*

Ein Bedenken an der Allgemeingültigkeit dieses Satzes könnte höchstens für $A = D = \sqrt{n}$, also bei rein quadratischem n entstehen, insofern hier durch Identischwerden der beiden Glieder (8) ein Verschwinden höherer als erster Ordnung involviert sein könnte. Inzwischen werden die beiden Glieder (8) stets und nur dann einander gleich, wenn neben $A = D = \sqrt{n}$ noch die beiden Bedingungen $B = 0$ und $\nu \equiv 0$ (mod. q) erfüllt sind. In diesem Falle aber ist offenbar:

$$V_k \equiv v^{-1}, \quad v^{-1}\left(\frac{\sqrt{n}\,v(\omega)}{\sqrt{n}}\right) = R_k(\omega) = \frac{\sqrt{n}\,\omega}{\sqrt{n}},$$

so dass es sich gerade um den vorhin bereits ausgeschlossenen Re-

präsentanten erster Ordnung handeln würde. Unser Bedenken ist also gegenstandslos. —

Wir schliessen nun folgendermassen weiter: Damit P_k im Punkte $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ verschwindet, war erforderlich, dass

$$\frac{\alpha}{\gamma} \text{ und } R_k\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) = \frac{a_k\alpha + b_k\gamma}{c_k\alpha + d_k\gamma} \tag{9}$$

relativ äquivalente Spitzen sind. Rechnet man aber (unter ausführlicher Schreibweise der Modulsubstitutionen V_k und v) die Gleichung (3) d. i.

$$\begin{pmatrix} a_k, & b_k \\ c_k, & d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_k, & \beta_k \\ \gamma_k, & \delta_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A, & B \\ 0, & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +\delta, & -\beta \\ -\gamma, & +\alpha \end{pmatrix}$$

aus, so ergiebt sich:

$$a_k\alpha + b_k\gamma = \alpha_k A, \quad c_k\alpha + d_k\gamma = \gamma_k A,$$

woraus zu schliessen ist, dass die auf den linken Seiten dieser beiden Gleichungen stehenden Zahlen den grössten gemeinsamen Teiler A haben. Die Forderung der relativen Äquivalenz der Spitzen (9) kleidet sich also in die Gestalt:

$$a_k\alpha + b_k\gamma \equiv eA\alpha, \quad c_k\alpha + d_k\gamma \equiv eA\gamma, \ (\text{mod. } q), \tag{10}$$

wo e entweder $= +1$ oder gleich -1 ist. Hier darf man $a_k, b_k, \ldots$ zufolge der Congruenz (3) offenbar direct durch die Zahlen $a, b, \ldots$ des vorgelegten Schemas ersetzen, so dass die Bedingungen (10) die neue Form annehmen:

$$\left.\begin{aligned} (a - eA)\,\alpha + b\gamma \equiv 0 \\ c\alpha + (d - eA)\gamma \equiv 0 \end{aligned}\right\} (\text{mod. } q). \tag{11}$$

Es bleibt hierbei die Zahl B ganz ausser Betracht; mit einem verschwindenden Factor P_k finden wir deren also immer gleich D, indem ja B bei stehenden A, D ein volles Restsystem mod. D zu durchlaufen hat. Mit Rücksicht auf den obigen Satz über die Multiplicität der Nullpunkte in den Spitzen folgt sonach: *Bei gegebenem Schema wird jeder möglichen Lösung von* (11) *in ganzen Zahlen* A, α, γ, *von denen die erste ein Teiler von* n *ist, während die letzteren auf das Intervall* $0, 1, \ldots, q-1$ *einzuschränken sind und nicht zugleich durch* q *teilbar sein sollen, in der Spitze* $\frac{\alpha}{\gamma}$ *ein* D*-facher oder* A*-facher Nullpunkt entsprechen, je nachdem* $A \gtrless D$ *oder* $A < D$ *ist.*

Bevor wir zur Discussion der Congruenzen (11) schreiten, definieren wir ein weiterhin zur Verwendung kommendes zahlentheoretisches Symbol. Gerade wie bei $q = 5$ (cf. p. 225) schreiben wir:

$$(12)\qquad X_\nu(n) = \sum_{A<D,\, A\equiv\pm\nu} A + \varepsilon_n^{(\nu)}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{n},$$

wobei sich die Summe, wie in der Formel selbst angedeutet, auf alle Teiler A von n bezieht, die kleiner als $\sqrt{n}$ sind und der Congruenz $A\equiv\pm\nu$ (mod. q) genügen; $\varepsilon_n^{(\nu)}$ soll $=1$ sein für rein quadratisches n, falls zugleich $\nu\equiv\pm\sqrt{n}$ ist; sonst soll stets $\varepsilon_n^{(\nu)}=0$ gesetzt werden*).

Wir wenden uns jetzt zur Discussion der Congruenzen (11). Für das Zusammenbestehen dieser beiden Congruenzen ist hinreichend und notwendig:

$$(13)\quad (a-eA)(d-eA)-bc\equiv n-eA(a+d)+A^2\equiv 0,\ (\text{mod. } q).$$

Indem wir hier einerseits durch A heben, kommt:

$$(14)\qquad A+D\equiv e(a+d),\quad (\text{mod. } q);$$

andererseits finden wir durch Auflösung von (13) für A und D:

$$(15)\quad 2eA\equiv a+d\pm\sqrt{-\Delta},\quad 2eD\equiv a+d\mp\sqrt{-\Delta},\quad (\text{mod. } q),$$

wo entweder nur die oberen oder nur die unteren Zeichen gelten; Δ ist dabei in der gewohnten Bedeutung $\Delta\equiv 4n-(a+d)^2$ gebraucht. Durch Einsetzung des Wertes (15) von A in (11) gewinnen endlich die für α und γ zu discutierenden Congruenzen die Gestalt:

$$(16)\qquad \left.\begin{array}{l}(a-d\mp\sqrt{-\Delta})\,\alpha+2b\gamma\equiv 0\\ 2c\alpha+(d-a\mp\sqrt{-\Delta})\,\gamma\equiv 0\end{array}\right\}\ (\text{mod. } q).$$

Die oberen und unteren Zeichen in (15) und (16) entsprechen einander dabei überall.

Man unterscheide nun wieder die drei Fälle des § 2 (p. 643) und setze demnach erstlich voraus:

I. Δ *relativ prim gegen* q.

Notwendige Bedingung dafür, dass in diesem Falle überhaupt Lösungen A, α, γ eintreten, ist, dass $-\Delta$ quadratischer Rest von q ist. Trifft dies zu, so wird (16) für jede der beiden Zeichencombinationen genau $\frac{1}{2}(q-1)$ incongruente Lösungen (α, γ) haben, da wir die Lösungen (α, γ) und $(-\alpha, -\gamma)$ als nicht verschieden anzusehen haben, und da für keine der beiden Vorzeichencombinationen die vier

*) In den Arbeiten der Herren Gierster und Hurwitz ist das in (12) eingeführte Symbol stets U genannt. Da aber voraufgehend mit U in der Regel Modulsubstitutionen gemeint sind, so schien im vorliegenden Texte die Bezeichnung (12) rätlicher, welche sich auch gleichmässig an die verwandten Teilersummen $\Phi(n)$, $\Psi(n)$ anschliesst.

Coefficienten der für α, γ vorgeschriebenen Congruenzen (16) zugleich verschwinden. Für die erste Zeichencombination ist

$$(17) \qquad eA \equiv \frac{a+d+\sqrt{-\Delta}}{2}, \quad eD \equiv \frac{a+d-\sqrt{-\Delta}}{2}, \quad (\text{mod. } q),$$

für die zweite dagegen gilt

$$(18) \qquad eA \equiv \frac{a+d-\sqrt{-\Delta}}{2}, \quad eD \equiv \frac{a+d+\sqrt{-\Delta}}{2}, \quad (\text{mod. } q).$$

Wenden wir nun die vorhin aus (11) abgeleitete Regel über die Multiplicität der Nullpunkte von $h(\omega)$ an, so ergiebt sich für jede der gefundenen $\frac{1}{2}(q-1)$ Spitzen $\frac{\alpha}{\gamma}$ ein Nullpunkt der Ordnung:

$$(19) \qquad \sum_{A \leq \sqrt{n}} A + \sum_{A > \sqrt{n}} D = \sum_{A < \sqrt{n}} A + \sum_{D < \sqrt{n}} D,$$

wo A und D einmal die Congruenzen (17) sodann aber (18) befriedigen müssen. Der Wert dieses Betrages (19) drückt sich mit Hülfe des Zeichens (12) offenbar gerade in der Gestalt aus:

$$2\,\mathrm{X}_{\frac{a+d+\sqrt{-\Delta}}{2}}(n) \quad \text{bez. } 2\,\mathrm{X}_{\frac{a+d-\sqrt{-\Delta}}{2}}(n),$$

je nachdem (17) oder (18) vorliegt. Da wir nun im ganzen $\frac{1}{2}(q-1)$ Spitzen zu berücksichtigen haben, so entspringt für den Fall I als Resultat: *Ist Δ Nichtrest von q, so besitzt $h(\omega)$ in den Polygonspitzen gar keine Nullpunkte. Ist hingegen Δ Rest, so verschwindet $h(\omega)$ in den Polygonspitzen in der Gesamtordnung:*

$$(20) \qquad \nu'' = (q-1)\,\mathrm{X}_{\frac{a+d+\sqrt{-\Delta}}{2}}(n) + (q-1)\,\mathrm{X}_{\frac{a+d-\sqrt{-\Delta}}{2}}(n).$$

II. $\Delta \equiv 0$ (mod. q), *aber wenigstens eine der Zahlen b, c prim gegen q.*

Die Congruenzen (16) werden jetzt insgesamt durch $\frac{1}{2}(q-1)$ verschiedene Zahlenpaare α, γ befriedigt, und es sind, da $a + d \equiv 2\sqrt{n}$ wird, die der Bedingung $A \equiv \pm\sqrt{n}$ genügenden Teiler A von n heranzuziehen. Indem wir wieder die Summen (19) zu bilden haben, *wird im Falle* II, *der jedenfalls nur für quadratische Reste n von q eintritt, die Gesamtzahl der Nullpunkte von $h(\omega)$ in den Spitzen:*

$$(21) \qquad \nu'' = (q-1)\,\mathrm{X}_{\sqrt{n}}(n).$$

III. $\Delta \equiv 0, \ b \equiv c \equiv 0,$ (mod. q).

Da bei den Congruenzen (III) zugleich $a \equiv d \equiv \sqrt{n}$ zutrifft, so werden jetzt die Congruenzen (16) von den gesamten $\frac{1}{2}(q^2-1)$ incongruenten Zahlenpaaren α, γ erfüllt. Zu bemerken ist nur noch, dass im Falle des hier vorliegenden Schemas bei rein quadratischen n

der eine der $\Phi(n)$ Factoren von $h(\omega)$ auszulassen ist. Indem man hierauf Rücksicht nimmt und ε_n in der früheren Bedeutung (p. 632) gebraucht, *ergiebt sich als Gesamtzahl der in den Spitzen gelegenen Nullpunkte von* $h(\omega)$ *im Falle* III:

$$v'' = (q^2 - 1)\left[X_{\sqrt{n}}(n) - \tfrac{1}{2}\varepsilon_n\right].\text{*)} \tag{22}$$

§ 6. Zusammenstellung der Resultate über die Anzahl $v(n)$. Der Specialfall $n = 1$.

Durch Zusammenfügung der in § 2 und 3 bestimmten Anzahlen $v'(n)$ mit den eben gefundenen Zahlen $v''(n)$ hat man die Gesamtzahl $v(n)$ einfacher Nullpunkte von $h(\omega)$ auf dem Polygon herzustellen.

Es erscheint hierbei für die auf das Schema $\begin{pmatrix}\sqrt{n}, & 0\\ 0, & \sqrt{n}\end{pmatrix}$ bezogenen Formeln zweckmässig, an Stelle der für die Formeln des § 2 und 3 bisher festgehaltenen Summationsbedingung $-2\sqrt{n} < \varkappa < 2\sqrt{n}$ die nachfolgende zu setzen:

$$-2\sqrt{n} \leqq \varkappa \leqq +2\sqrt{n}. \tag{1}$$

Daraufhin ist natürlich zu definieren, was man unter den Symbolen H mit dem Argumente 0 verstehen will; und in diesem Betracht wollen wir festsetzen, dass:

$$\mathrm{H}(0) = -\tfrac{1}{12}, \quad \mathrm{H}_{+1}(0) = \mathrm{H}_{-1}(0) = 0 \tag{2}$$

sein soll.

Für die Formeln (3), (6) und 7 in § 3 hat die Neuerung (1) eine Änderung nicht im Gefolge; nur an Stelle der Formel (8) des genannten Paragraphen wird

$$v'(n) = \frac{q(q^2-1)}{2}\sum_{\varkappa}^{\pm 2\sqrt{n}} \mathrm{H}\left(\frac{4n-\varkappa^2}{q^2}\right) + \varepsilon_n \cdot \frac{q(q^2-1)}{12}$$

treten. Fügen wir hier, um $v(n)$ zu berechnen, gleich den bezüglichen Betrag (22) § 5 hinzu, so kommt unter Rücksicht auf die für das Geschlecht der Hauptcongruenzgruppe q^{ter} Stufe geltende Formel:

$$p = \frac{(q+2)(q-3)(q-5)}{24}$$

als Zusatzglied für die rein quadratischen n:

---

*) Dass sich die Formel (24) p. 228, welche für $q = 5$ gilt, nicht direct unter Formel (22) des Textes subsumiert, hat seinen Grund in dem Umstande, dass seinerzeit bei $q = 5$ vermöge der damals gewählten Entwicklung immer zwei bez. vier Spitzen in besonderer Untersuchung vorweggenommen waren.

$$(3)\qquad \varepsilon_n\cdot\left(\frac{q(q^2-1)}{12}-\frac{q^2-1}{2}\right)=\varepsilon_n\cdot\frac{(q^2-1)(q-6)}{12}=\varepsilon_n\cdot(2p-2).$$

Wir stellen nun die Werte für die Coincidenzenanzahl $\nu(n)$ der Modularcorrespondenz, wie sie sich jeweils durch Zusammenfügen der beiden Zahlen ν' und ν'' ergeben, tabellarisch zusammen:

I. Δ *relativ prim gegen* q.

1) $\left(\frac{-\Delta}{q}\right)=+1$,

$$\nu(n)=\frac{q-1}{2}\sum_{x\equiv\pm(a+d)}\mathsf{H}(4n-x^2)+(q-1)\left[\mathsf{X}_{\frac{a+d+\sqrt{-\Delta}}{2}}+\mathsf{X}_{\frac{a+d-\sqrt{-\Delta}}{2}}\right],$$

2) $\left(\frac{-\Delta}{q}\right)=-1$,

$$\nu(n)=\frac{q+1}{2}\sum_{x\equiv\pm(a+d)}\mathsf{H}(4n-x^2).$$

II. $\Delta\equiv 0$, b *oder* c *relativ prim gegen* q.

1) $q=4h+1$, $\left(\frac{b}{q}\right)$ oder $\left(\frac{c}{q}\right)=+1$,

$$\nu(n)=q\sum_{x\equiv\pm 2\sqrt{n}}\mathsf{H}_{+1}(4n-x^2)+(q-1)\mathsf{X}_{\sqrt{n}},$$

2) $q=4h+1$, $\left(\frac{b}{q}\right)$ oder $\left(\frac{c}{q}\right)=-1$,

$$\nu(n)=q\sum_{x\equiv\pm 2\sqrt{n}}\mathsf{H}_{-1}(4n-x^2)+(q-1)\mathsf{X}_{\sqrt{n}},$$

3) $q=4h+3$,

$$\nu(n)=\tfrac{1}{2}q\sum_{x\equiv\pm 2\sqrt{n}}\left[\mathsf{H}(4n-x^2)-\mathsf{H}\left(\frac{4n-x^2}{q^2}\right)\right]+(q-1)\mathsf{X}_{\sqrt{n}}.$$

III. $\Delta\equiv 0$, b *und* c *durch* q *teilbar*.

$$\nu(n)=\frac{q(q^2-1)}{2}\sum_{x\equiv\pm 2\sqrt{n}}\mathsf{H}\left(\frac{4n-x^2}{q^2}\right)+(q^2-1)\mathsf{X}_{\sqrt{n}}+\varepsilon_n\cdot(2p-2).$$

Nebenbei bemerke man, dass die bisherigen Entwicklungen des vorliegenden Kapitels nirgends von der Voraussetzung Gebrauch machen, dass notwendig $n>1$ ist. Setzt man aber $n=1$, so wird:

$$(4)\qquad h(\omega)=P\left(\omega,\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right),$$

und es ist die hier als zweites Argument von P auftretende Modul-

substitution irgendwie, nur nicht gerade $\equiv 1 \pmod{q}$ anzunehmen. *Die Zahl $\nu(1)$ wird dann angeben, wieviele Fixpunkte die dieser Modulsubstitution zugehörige Transformation der Fläche $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ in sich besitzt.*

Um aber $\nu(1)$ vermöge der vorstehenden Betrachtungen zu bestimmen, merke man für die hierbei in Betracht kommenden Werte der zahlentheoretischen Functionen X, H an:

$$X_1 = \tfrac{1}{2},\quad H(3) = \tfrac{1}{3},\quad H(4) = \tfrac{1}{2}; \tag{5}$$

weitere Zahlen X_ν oder H werden nicht benötigt. Wie man übrigens leicht nachweist, wird in vorstehender Tabelle für $n = 1$ nur im Falle II der Wert $X_{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$ zur Geltung kommen, während die Glieder X unter I verschwinden. Der Summationsbuchstabe $\varkappa$ ist auf die Werte $0, \pm 1, \pm 2$ eingeschränkt, und es ist $-\Delta \equiv (\alpha + \delta)^2 - 4$.

Ist nun $\Delta \equiv 0$, so ist $\alpha + \delta \equiv \pm 2$, und es liegt eine Operation der Periode q vor. Für ν erhalten wir darauf übereinstimmend bei allen drei in II unterschiedenen Bedingungen:

$$\nu = \frac{q-1}{2},\quad (\alpha + \delta \equiv \pm 2). \tag{6}$$

Ist hingegen $(\alpha + \delta)^2 - 4$ nicht durch q teilbar, so liefert I:

$$\nu(1) = \frac{1}{2}\left[q - \left(\frac{-\Delta}{q}\right)\right] \sum_{\varkappa \equiv \pm(\alpha+\delta)} H(4 - \varkappa^2). \tag{7}$$

Ein von Null verschiedenes ν erhalten wir somit nur noch, falls entweder $\alpha + \delta \equiv 0$, $-\Delta \equiv -4$ oder $\alpha + \delta \equiv \pm 1$, $-\Delta \equiv -3$ ist; und zwar ergiebt sich:

$$\nu = \frac{1}{2}\left[q - \left(\frac{-\Delta}{q}\right)\right] 2\,H(4) = \frac{1}{2}\left[q - \left(\frac{-1}{q}\right)\right] \text{ für } \alpha + \delta \equiv 0, \tag{8}$$

$$\nu = \frac{1}{2}\left[q - \left(\frac{-\Delta}{q}\right)\right] 2\,H(3) = \frac{1}{3}\left[q - \left(\frac{-3}{q}\right)\right] \text{ für } \alpha + \delta \equiv \pm 1. \tag{9}$$

In (8) haben wir mit den Substitutionen der Periode zwei in (9) mit denjenigen der Periode drei zu thun.

Alle diese für ν erhaltenen Werte sind in der That mit den aus I p. 437 u. f. bekannten Anzahlen der Fixpunkte in voller Übereinstimmung.

§ 7. Die beiden Systeme der Classenzahlrelationen 7ter Stufe.

Durch Gleichsetzung der auf zweifachem Wege (functionentheoretisch und arithmetisch) ausgedrückten Zahlen $\nu(n)$ entspringen nun-

mehr diejenigen Zahlengleichungen, welche wir als *Classenzahlrelationen* q^{ter} *Stufe* zu bezeichnen haben. Wir wollen bei ihrer Aufstellung wieder den inductiven Weg gehen und vorab den niedersten hier überhaupt in Betracht kommenden Fall, nämlich $q = 7$, erledigen. Zu diesem Ende werden wir die Tabelle des vorigen Paragraphen mit den Resultaten aus § 5 des vorigen Kapitels (p. 610 u. f.) zu combinieren haben.

Die einfachste Gestalt zeigen die Classenzahlrelationen 7ter Stufe im Falle der *Nichtreste* n von 7, da wir nämlich dann nur mit gewöhnlichen Correspondenzen der speciellen Wertigkeit 0 zu thun haben; die functionentheoretische Abzählung der Coincidenzen liefert hier also stets $\nu = 2\Phi(n)$. Für die arithmetische Abzählung kommt entweder Formel (I, 1) oder (I, 2) der Tabelle des vorigen Paragraphen zur Verwendung, je nach dem Werte von $(a + d)$. Man wird aber alle Werte $(a + d)$, welche mod. 7 zu unterscheiden sind, dadurch gewinnen können, dass man:

$$a + d \equiv \sqrt{-\varkappa n} \pmod{7} \tag{1}$$

setzt und für $\varkappa$ nach einander die Werte $0, 1, 2, 4$ einträgt. Es wird alsdann $-\Delta \equiv -n(\varkappa + 4)$, so dass für $\varkappa \equiv 1, 2$ die Formel (I, 2), für $\varkappa \equiv 0, 4$ aber die Formel (I, 1) zur Verwendung zu bringen ist.

Bevor wir die Classenzahlrelationen wirklich hinschreiben, leiten wir noch eine Gleichung ab, welche die jetzt in Betracht kommenden Zahlsymbole $X(n)$ betrifft. Wir haben deren hier drei, nämlich X_1, X_2, X_4, und es bestehen zufolge der Definition der X die Gleichungen:

$$X_1 + X_2 + X_4 = \sum_{A < \sqrt{n}}{}' A,$$

$$\Phi - (X_1 + X_2 + X_4) = \sum_{A < \sqrt{n}}{}' D.$$

Nehmen wir also das Symbol $\Psi(n)$ in der früheren Bedeutung (p. 184):

$$\Psi(n) = \sum_{A < \sqrt{n}}{}' (D - A) \tag{2}$$

wieder auf, so ergiebt sich als Identität:

$$\Phi - \Psi = 2(X_1 + X_2 + X_4), \tag{3}$$

und diese werden wir gleich benutzen. — Bei der Schreibweise der Summen in den nachfolgenden Relationen gestatten wir uns übrigens noch die unwesentliche Abkürzung:

$$(4) \qquad \sum_{n\,\cdot\,\pm\sqrt{-\pi n}} = \sum_{\sqrt{-\pi n}} = \sum_{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{-n}}.$$

Als System der Classenzahlrelationen siebenter Stufe für die quadratischen Nichtreste n von 7 ergiebt sich nun:

$$(5) \qquad \begin{cases} 2\sum_{\sqrt{-n}} \mathrm{H}(4n - x^2) = \Phi(n), \\ 2\sum_{4\sqrt{-n}} \mathrm{H}(4n - x^2) = \Phi(n), \\ 3\sum_{0} \mathrm{H}(4n - x^2) = 2\Phi(n) - 12\,\mathrm{X}_{\sqrt{-n}}(n), \\ 3\sum_{2\sqrt{-n}} \mathrm{H}(4n - x^2) = 2\Phi(n) - 6\,\mathrm{X}_{2\sqrt{-n}}(n) - 6\,\mathrm{X}_{4\sqrt{-n}}(n). \end{cases}$$

Die letzte Relation lässt sich vermöge der Gleichung (3) noch in die neue Gestalt umsetzen:

$$(6) \qquad 3\sum_{2\sqrt{-n}} \mathrm{H}(4n - x^2) = 3\Psi(n) - \Phi(n) + 6\,\mathrm{X}_{\sqrt{-n}}(n).$$

Diesen vier Relationen siebenter Stufe reihen sich weitere *fünf* für die *quadratischen Reste n* von 7 an. Man schreibe hier:

$$(7) \qquad a + d \equiv \sqrt{\pi n}, \quad (\text{mod. } 7)$$

und nehme wieder für π die Werte 0, 1, 2, 4. Die Formel (I, 1) der Tabelle kommt dann nur für $\pi = 1$ zur Verwendung, die Formel (I, 2) aber für $\pi = 0, 2$; für $\pi = 4$ endlich hat man nach einander die beiden Formeln (II, 3) und (III) zu verwenden. Dieses letzteren Umstandes halber haben wir jetzt eine Relation mehr als bei den Nichtresten n. Auf der anderen Seite haben wir für $\pi = 0, 1, 2$ die Formel (11) p. 611 der functionentheoretischen Abzählung zu verwenden, und zwar entsprechen den Werten $\pi = 0, 1, 2$ die Werte $k = 4, 2, 0$ der citierten Formel, wie man nach den damals gegebenen Regeln leicht feststellt. Für $\pi = 4$ ist Formel (II, 3) gleichfalls mit (11) p. 611 zu combinieren, wobei $k = 3$ zu nehmen ist; dagegen kommt bei $\pi = 4$ und Formel (III) der unter (10) p. 610 gegebene Wert für v in Betracht.

Nach Abschluss der hiermit skizzierten Zwischenrechnung gewinnt man als *System der Classenzahlrelationen siebenter Stufe für den Fall der quadratischen Reste n von* 7 die nachfolgenden fünf Gleichungen:

$$(8)\quad \begin{cases} 2\sum\limits_{0}' \mathsf{H}(4n-x^2) = \Phi(n) + \psi(n), \\ 2\sum\limits_{4\sqrt{n}}' \mathsf{H}(4n-x^2) = \Phi(n) - \psi(n), \\ 3\sum\limits_{\sqrt{n}}' \mathsf{H}(4n-x^2) = 3\Psi(n) - \Phi(n) + 6\,\mathsf{X}_{\sqrt{n}}(n), \\ 7\sum\limits_{2\sqrt{n}}' \left[\mathsf{H}(4n-x^2) - \mathsf{H}\left(\frac{4n-x^2}{49}\right)\right] = 4\Phi(n) - 12\,\mathsf{X}_{\sqrt{n}}(n) + 2\psi(n), \\ 84\sum\limits_{2\sqrt{n}}' \mathsf{H}\left(\frac{4n-x^2}{49}\right) = \Phi(n) - 24\,\mathsf{X}_{\sqrt{n}}(n) - 3\psi(n). \end{cases}$$

Bei der dritten unter diesen Gleichungen wurde übrigens von der Identität (3) Gebrauch gemacht. Das Glied $\psi(n)$ ist hier überall die von den Integralen erster Gattung gelieferte Entwicklungsfunction siebenter Stufe. —

Um die Relationen (5), (8) an einem Beispiele zu verificieren, stellen wir folgende Tabelle der Anfangswerte von $\mathsf{H}(m)$ zusammen, die auch späterhin noch zur Verwendung kommen soll:

(9)

m	3	4	7	8	11	12	15	16	19
H	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1	$\frac{4}{3}$	2	$\frac{3}{2}$	1
m	20	23	24	27	28	31	32	35	36
H	2	3	2	$\frac{4}{3}$	2	3	3	2	$\frac{5}{2}$

Nehmen wir nun beispielsweise $n = 9$, so kommen die Relationen (8) in Betracht, und es ist:

$$\Phi(9) = 13, \quad \Psi(9) = 8, \quad \mathsf{X}_{\sqrt{9}}(9) = \tfrac{1}{2}, \quad \psi(9) = -3.$$

Die erste Formel (8) giebt daraufhin $4\,\mathsf{H}(36) = \Phi(9) + \psi(9) = 10$, was mit der Tabelle (9) übereinstimmt. —

Die Gleichungen (5) und (8) konnten, wie schon in der Einleitung zum vorliegenden Kapitel gesagt wurde, in dem Sinne als die beiden „Systeme“ der Classenzahlrelationen siebenter Stufe bezeichnet werden, als sich *jede* überhaupt bei Transformation 7ter Stufe erreichbare Classenzahlrelation als lineare Combination der Relationen (5) bez. (8) darstellen lassen muss. Hier subsumiert sich zumal auch die Classenzahlrelation erster Stufe, und wir wollen sie z. B. im Falle eines Restes n aus den fünf Relationen (8) durch Combination herstellen. Bezeichnen wir die linken Seiten dieser Relationen kurz durch $G_1, \ldots, G_5$, so wird die Combination:

$$42\,G_1 + 84\,G_2 + 56\,G_3 + 24\,G_4 + 2\,G_5$$

zufolge leichter Rechnung $168 \sum \mathrm{H}(4n - x^2)$, d. i. das 168-fache der linken Seite der Classenzahlrelation erster Stufe (9) p. 184 ergeben. Als Bestätigung unserer Behauptung erhalten wir aber aus der entsprechenden Combination der rechten Seiten (8):

$$42(\Phi + \psi) + 84(\Phi - \psi) + 56(3\Psi - \Phi + 6\mathrm{X}_{\sqrt{n}}) + 24(4\Phi - 12\mathrm{X}_{\sqrt{n}} + 2\psi) + 2(\Phi - 24\,\mathrm{X}_{\sqrt{n}} - 3\psi) = 168(\Phi + \Psi),$$

d. i. in der That die 168-fache rechte Seite der Classenzahlrelation erster Stufe*).

§ 8. Allgemeiner Ansatz für die Classenzahlrelationen q^{ter} Stufe.

Um bei der allgemeine Primzahlstufe q wenigstens den Ansatz für die zugehörigen Classenzahlrelationen zu gewinnen, müssen wir auf die p. 620 gegebene Verabredung betreffs der Congruenz der Repräsentantensysteme q^{ter} Stufe zurückgreifen. Sind n und n' zwei Transformationsgrade, die im quadratischen Charakter mod. q übereinstimmen, so sollen die beiden für die Repräsentantensysteme zu Grunde zu legenden Schemata $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a', & b' \\ c', & d' \end{pmatrix}$ im Sinne der damaligen Verabredung einander congruent sein. Es findet dann insbesondere die Congruenz statt:

$$\frac{(a' + d')^2}{n'} \equiv \frac{(a + d)^2}{n}, \quad (\text{mod. } q); \tag{1}$$

und indem wir den gemeinsamen Wert der linken und rechten Seite dieser Congruenz etwa wieder π nennen, löst sich (1) auf in:

$$a + d \equiv \sqrt{n\pi}, \quad a' + d' \equiv \sqrt{n'\pi}, \quad (\text{mod. } q). \tag{2}$$

Man nehme nun zuvörderst wieder den einfacheren Fall der quadratischen *Nichtreste* n. Da werden wir die Zahl π der Reihe nach mit 0 und mit den $\frac{1}{2}(q-1)$ Nichtresten von q identificieren müssen, so dass insgesamt $\frac{1}{2}(q+1)$ Werte π in Betracht kommen. Der Wert $\pi \equiv 4$ ist nicht darunter, und eben dieserhalb wird $-\Delta \equiv n(\pi - 4)$

*) Die beiden Systeme der Classenzahlrelationen 7ter Stufe wurden (in etwas anderer Bezeichnungsweise) bereits vollständig von Hrn. Gierster angegeben (in den Mathem. Annalen Bd. 22 p. 198, 1883); es war dies der erste Fall, bei welchem Hr. Gierster die im Texte mit $\psi(n)$ bezeichnete zahlentheoretische Function, wie wiederholt bemerkt wurde, erfahrungsweise in der richtigen Art definierte. Die im Texte befolgte Ableitung der Relationen 7ter Stufe wurde von Hrn. Hurwitz in Bd. 25 der Mathem. Annalen (1884) entwickelt.

gegen q relativ prim sein, so dass nur der Fall I der Tabelle § 6 zur Geltung kommt. Mögen jetzt des näheren durch π_1 allgemein diejenigen Zahlen π bezeichnet werden, für welche $\pi - 4$ quadratischer Rest von q wird, und durch π_2 diejenigen mit einem Nichtrest $(\pi - 4)$. Für den arithmetischen Ausdruck von $\nu(n)$ kommt alsdann bei einer Zahl π_1 die Formel (I, 2) der Tabelle des § 6 zur Verwendung, bei einer Zahl π_2 aber Formel (I, 1).

Durch Angabe der Zahl π ist das Schema des Repräsentantensystems nur erst beschränkt, aber noch nicht eindeutig bestimmt. Um also die functionentheoretische Abzählung von p. 633 in Anwendung zu bringen, müssen wir unter den verschiedenen, zu diesem π gehörenden Schemen ein einzelnes auswählen; und indem wir ja für alle Nichtreste n die Repräsentantensysteme mit diesem Schema congruent wählen, liefert Formel (9) p. 633 ein Resultat der functionentheoretischen Bestimmung von $\nu(n)$, das wir in die Gestalt setzen:

$$\nu(n) = 2\Phi(n) + t_{\pi,1}\chi_1(n) + \cdots + t_{\pi,\mu}\chi_\mu(n).$$

Das Wichtige ist nun, dass jede andere Auswahl unter den zu π gehörenden Schemen wiederum zu eben diesem System ganzer Zahlen $t_{\pi,i}$ zurückführen muss; denn es ist der arithmetische Ausdruck von $\nu(n)$ von dieser Auswahl unabhängig, und zwischen den $\chi_1(n), \ldots, \chi_\mu(n)$ kann keine für *alle* Nichtreste n gültige lineare Identität bestehen. *Wir haben also für die Nichtreste n insgesamt nur $\frac{q+1}{2}$ verschiedene Zahlsysteme $t_{\pi,i}$,* und nicht etwa $\frac{q(q^2-1)}{2}$, wie wir im vorigen Kapitel zuvörderst annehmen mussten.

Die fertigen Ansätze der $\frac{q+1}{2}$ Classenzahlrelationen q^{ter} Stufe für die quadratischen Nichtreste n sind nun, wie man leicht combiniert:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{q+1}{2}\sum\limits_{\sqrt{\pi_1 n}} \mathrm{H}(4n - x^2) = 2\Phi(n) + t_{\pi_1,1}\chi_1(n) + \cdots + t_{\pi_1,\mu}\chi_\mu(n), \\ \dfrac{q-1}{2}\sum\limits_{\sqrt{\pi_2 n}} \mathrm{H}(4n - x^2) = 2\Phi(n) + t_{\pi_2,1}\chi_1(n) + \cdots + t_{\pi_2,\mu}\chi_\mu(n) \\ \qquad -(q-1)\left[\mathrm{X}_{\frac{1}{2}\sqrt{\pi_2 n}+\frac{1}{2}\sqrt{n(\pi_2-4)}}(n) + \mathrm{X}_{\frac{1}{2}\sqrt{\pi_2 n}-\frac{1}{2}\sqrt{n(\pi_2-4)}}(n)\right]. \end{cases}$$

Auf den linken Seiten dieser Gleichungen haben wir von der in (4) § 7 eingeführten abkürzenden Schreibweise der Summationsbedingungen Gebrauch gemacht.

Etwas mannigfaltiger gestaltet sich das System der Classenzahlrelationen q^{ter} Stufe für die quadratischen *Reste* n von q. Wir setzen

hier zunächst gerade wie vorhin an:

$$a + d \equiv \sqrt{\varkappa n}, \quad -\Delta \equiv n(\varkappa - 4), \text{ (mod. } q)$$

und müssen nun $\varkappa$ nach einander mit 0 und den $\frac{1}{2}(q-1)$ Resten von q identisch nehmen. Indem wir den Wert $\varkappa \equiv 4$ vorab ausschliessen, mögen wir die $\frac{1}{2}(q-1)$ übrigen $\varkappa$ durch $\varkappa_1$ oder $\varkappa_2$ bezeichnen, je nachdem $(\varkappa - 4)$ Nichtrest bez. Rest von q ist. Von diesen Zahlen $\varkappa$ aus erhalten wir dann $\frac{1}{2}(q-1)$ Classenzahlrelationen der beiden ersten unter (4) anzugebenden Typen. Für $\varkappa \equiv 4$ wird Δ durch q teilbar, und nun kommen die Fälle (II) und (III) der Tabelle des § 6 zur Geltung. Erstlich der Fall (III) liefert für alle n eine Relation, die man an dritter Stelle unter (4) angegeben findet. Dagegen erfordert der Fall (II) die Unterscheidung, ob $q = 4h + 1$ oder $4h + 3$ ist, und hierauf beziehen sich die Angaben, welche sogleich unter (5) und (6) folgen. Bezüglich der ganzzahligen Coefficienten s gelten ganz analoge Bemerkungen, wie über die t bei den Nichtresten n; *man hat* $\frac{q+5}{2}$ *bez.* $\frac{q+3}{2}$ *unterschiedene Zahlsysteme* s, *je nachdem* $q = 4h + 1$ *oder* $= 4h + 3$ *ist.*

Das System der Classenzahlrelationen q^{ter} *Stufe für die quadratischen Reste* n *ist hiernach das folgende:*

I. $\frac{q+1}{2}$ *Relationen, die für alle* n *existieren:*

$$(4)\begin{cases} \dfrac{q+1}{2}\cdot\sum\limits_{\sqrt{\pi_1 n}} \mathsf{H}(4n - x^2) = 2\Phi(n) + s_{\pi_1,1}\psi_1(n) + \cdots + s_{\pi_1,\lambda}\psi_\lambda(n), \\ \dfrac{q-1}{2}\cdot\sum\limits_{\sqrt{\pi_2 n}} \mathsf{H}(4n - x^2) = 2\Phi(n) + s_{\pi_2,1}\psi_1(n) + \cdots + s_{\pi_2,\lambda}\psi_\lambda(n) \\ \qquad\qquad -(q-1)\left[\mathsf{X}_{\frac{1}{2}\sqrt{\pi_2 n}+\frac{1}{2}\sqrt{n(\pi_2-4)}}(n) + \mathsf{X}_{\frac{1}{2}\sqrt{\pi_2 n}-\frac{1}{2}\sqrt{n(\pi_2-4)}}(n)\right], \\ \dfrac{q(q^2-1)}{2}\cdot\sum\limits_{2\sqrt{n}} \mathsf{H}\left(\dfrac{4n^{*}-x^2}{q^2}\right) = 2\Phi(n) - (q^2-1)\,\mathsf{X}_{\sqrt{n}}(n) \\ \qquad\qquad + s_1\psi_1(n) + \cdots + s_\lambda\psi_\lambda(n). \end{cases}$$

II. *Zwei nur bei* $q = 4h + 1$ *eintretende Relationen:*

$$(5)\begin{cases} q\cdot\sum\limits_{2\sqrt{n}} \mathsf{H}_{+1}(4n - x^2) = 2\Phi(n) - (q-1)\,\mathsf{X}_{\sqrt{n}}(n) \\ \qquad\qquad + s_1^{(+1)}\psi_1(n) + \cdots + s_\lambda^{(+1)}\psi_\lambda(n), \\ q\cdot\sum\limits_{2\sqrt{n}} \mathsf{H}_{-1}(4n - x^2) = 2\Phi(n) - (q-1)\,\mathsf{X}_{\sqrt{n}}(n) \\ \qquad\qquad + s_1^{(-1)}\psi_1(n) + \cdots + s_\lambda^{(-1)}\psi_\lambda(n). \end{cases}$$

III. *Eine nur für $q = 4h - 1$ eintretende Relation:*

$$(6)\quad \frac{1}{2} q \cdot \sum_{3\sqrt{n}} \left[\mathsf{H}(4n - x^2) - \mathsf{H}\left(\frac{4n - x^2}{q^2}\right)\right] = 2\,\Phi(n) - (q-1)\,X_{\sqrt{n}}(n) + s_1^{(0)}\psi_1(n) + \cdots + s_\lambda^{(0)}\psi_\lambda(n).$$

Die unterschiedenen Coefficientensysteme s haben wir hier stets durch untere oder obere Indices auseinander gehalten.

Die wirkliche Bestimmung der Coefficienten s oder t der einzelnen Classenzahlrelation wird man jetzt dadurch ausführen können, dass man in die betreffende Relation λ bez. μ particuläre Werte n einträgt und das solcherweise entspringende Gleichungssystem nach den s bez. t auflöst. Es soll dies jetzt noch am Beispiele $q = 11$ durchgeführt werden.

§ 9. Fertige Gestalt der beiden Systeme der Classenzahlrelationen elfter Stufe.

Nach den Regeln des vorigen Paragraphen haben wir bei $q = 11$ *sechs* Classenzahlrelationen für die Nichtreste n und *sieben* für die Reste; in jenen Relationen werden die zwei Entwicklungsfunctionen elfter Stufe $\chi_1(n)$, $\chi_2(n)$ zur Geltung kommen, in diesen die drei Functionen $\psi_1(n)$, $\psi_2(n)$, $\psi_3(n)$.

Um wieder mit den *Nichtresten* n zu beginnen, so haben wir bei ihnen die im vorigen Paragraphen durch π bezeichnete Zahl der Reihe nach mit 0, 2, 6, 7, 8, 10 zu identificieren, und zwar kommt insbesondere für π_1 und π_2:

$$(1)\qquad \pi_1 \equiv 2, 7, 8 \text{ und } \pi_2 \equiv 0, 6, 10, \pmod{11}.$$

Nehmen wir z. B. $\pi_1 \equiv 2$, so wird aus (3) § 8 folgen:

$$(2)\qquad 6 \sum_{3\sqrt{-n}} \mathsf{H}(4n - x^2) = 2\,\Phi(n) + t_1\chi_1(n) + t_2\chi_2(n).$$

Man trage in diese Gleichung nach einander $n = 2$ und $n = 6$ ein, wodurch mit Hülfe der Tabelle von p. 616 die beiden Gleichungen entspringen:

$$12\,\mathsf{H}(4) = 6 = 6 - t_2, \quad 12\,\mathsf{H}(23) = 36 = 24 + t_1\text{ *)};$$

dieselben liefern $t_1 = 12$, $t_2 = 0$. Damit ist der Ansatz (2) fertig bestimmt, und man wird die erhaltene Relation jetzt leicht durch Eintragung der weiteren Specialwerte $n = 7, 8, \cdots$ bestätigen. — Control-

*) Wegen der Werte H sehe man die Angaben (9) p. 659.

rechnungen, wie die hiermit angedeutete, wird man selbstverständlich auch bei der Bestimmung der übrigen Relationen immer wieder anbringen können.

Ohne noch weitere Zwischenrechnungen durchzuführen, möge jetzt sogleich *das System der Classenzahlrelationen elfter Stufe für irgend einen Nichtrest n* angegeben werden; *man findet:*

$$(3)\left\{\begin{aligned}
3\sum_{3\sqrt{-n}}\mathrm{H}(4n-x^2) &= \Phi(n)+6\chi_1(n),\\
3\sum_{5\sqrt{-n}}\mathrm{H}(4n-x^2) &= \Phi(n)+3\chi_2(n),\\
3\sum_{9\sqrt{-n}}\mathrm{H}(4n-x^2) &= \Phi(n)+3\chi_2(n),\\
5\sum_{0}\mathrm{H}(4n-x^2) &= 2\Phi(n)-20\,\mathrm{X}_{\sqrt{-n}}(n)-4\chi_1(n)-4\chi_2(n),\\
5\sum_{\sqrt{-n}}\mathrm{H}(4n-x^2) &= 2\Phi(n)-10\,\mathrm{X}_{3\sqrt{-n}}(n)-10\,\mathrm{X}_{4\sqrt{-n}}(n)\\
&\quad -4\chi_1(n)-4\chi_2(n),\\
5\sum_{4\sqrt{-n}}\mathrm{H}(4n-x^2) &= 2\Phi(n)-10\,\mathrm{X}_{5\sqrt{-n}}(n)-10\,\mathrm{X}_{9\sqrt{-n}}(n)\\
&\quad -4\chi_1(n)-4\chi_2(n).
\end{aligned}\right.$$

Will man durch Combination dieser Gleichungen die Classenzahlrelation erster Stufe gewinnen, so ist noch die Identität zu benutzen:

$$(4)\qquad 2(\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_3+\mathrm{X}_9+\mathrm{X}_5+\mathrm{X}_4)=\Phi-\Psi,$$

welche der bei der siebenten Stufe geltenden Relation (3) p. 657 genau analog ist. Übrigens führt dann die Combination:

$$10G_1+10G_2+10G_3+3G_4+6G_5+6G_6,$$

wie man leicht ausrechnet, zur Classenzahlrelation erster Stufe hin; dabei sind unter $G_1, G_2, \ldots$ die Gleichungen (3) der Reihe nach verstanden.

Zur Ableitung der sieben bei den *Resten n* eintretenden Relationen hat man $\varkappa$ der Reihe nach gleich 0, 1, 3, 9, 5, 4 zu setzen, und zwar ist des näheren:

$$(5)\qquad \pi_1\equiv 0,\ 1,\ 3,\ \text{sowie}\ \pi_2\equiv 9,\ 5,\ (\text{mod. } 11).$$

Zu den π_1 gehören drei Relationen vom ersten Typus (4) § 8, zu den π_2 aber zwei vom zweiten Typus (4) § 8. Weiter ist sodann noch $\pi=4$ zu nehmen, und für diesen Wert tritt die einzelne Relation

(6) § 8 sowie die dritte Relation (4) § 8 ein. Ohne uns jetzt noch weiter bei den Zwischenrechnungen aufzuhalten, *geben wir hier sogleich das fertige System der Classenzahlrelationen elfter Stufe für die Reste* n *von* 11 *an:*

$$
(6)\left\{\begin{aligned}
3\sum_{0}{}' \mathrm{H}(4n-x^2) &= \Phi(n)+\psi_1(n)+3\psi_2(n),\\
3\sum_{\sqrt{n}}{}' \mathrm{H}(4n-x^2) &= \Phi(n)-\psi_1(n)+3\psi_3(n),\\
3\sum_{5\sqrt{n}}{}' \mathrm{H}(4n-x^2) &= \Phi(n)+\psi_1(n)+3\psi_3(n),\\
\frac{5}{2}\sum_{3\sqrt{n}}{}' \mathrm{H}(4n-x^2) &= \Phi(n)-5\,\mathrm{X}_{5\sqrt{n}}(n)-5\,\mathrm{X}_{9\sqrt{n}}(n)\\
&\qquad -\psi_2(n)-2\psi_3(n),\\
\frac{5}{2}\sum_{4\sqrt{n}}{}' \mathrm{H}(4n-x^2) &= \Phi(n)-5\,\mathrm{X}_{3\sqrt{n}}(n)-5\,\mathrm{X}_{4\sqrt{n}}(n)\\
&\qquad -\psi_2(n)-2\psi_3(n),\\
330\sum_{9\sqrt{n}}{}' \mathrm{H}(4n-x^2) &= \Phi(n)-60\,\mathrm{X}_{\sqrt{n}}(n)+5\psi_1(n)\\
&\qquad -21\psi_2(n)-12\psi_3(n),\\
\frac{11}{2}\sum_{9\sqrt{n}}{}' \left[\mathrm{H}(4n-x^2)-\mathrm{H}\left(\frac{4n-x^2}{121}\right)\right] &= 2\,\Phi(n)-10\,\mathrm{X}_{\sqrt{n}}(n)\\
&\qquad -\psi_1(n)+2\psi_2(n)-2\psi_3(n).
\end{aligned}\right.
$$

Die Combination, welche hier auf die Classenzahlrelation erster Stufe führt, wird durch:

$$55\,G_1+110\,G_2+110\,G_3+132\,G_4+132\,G_5+G_6+60\,G_7$$

gegeben *).

Betreffs der zusammengesetzten Stufenzahlen, die wir nicht mehr behandeln, mögen wir hier etwa noch die auf $n=8$ bezüglichen

*) An Classenzahlrelationen 11[ter] Stufe hat Hr. Gierster (Math. Ann. Bd. 22) *eine* für die Reste n und gleichfalls *eine* für die Nichtreste vermöge seiner Betrachtung der Hauptmoduln ableiten können. Dieselben stellen solche Verbindungen der Relationen des Textes vor, in denen Symbole ψ oder χ nicht vorkommen. Ausserdem giebt Hr. Gierster als wahrscheinlich bestehend eine solche Relation 11[ter] Stufe an, in der die Function ψ_1 auftritt. Das vollständige System unserer Relationen ist von Hrn. Hurwitz in den Leipziger Berichten vom 15. Dec. 1884 ohne Beweis mitgeteilt. Die Bezeichnungen des Textes sind gegenüber den dortigen ein wenig modificiert.

Entwicklungen von Hurwitz (in Crelle's Journ. Bd. 99, 1885) erwähnen, welche sich an eine schon gelegentlich genannte Untersuchung Kronecker's (in den Berliner Monatsber. vom 19. April 1875) anschliessen. Die Classenzahlrelationen der achten Stufe werden dort indessen auf ganz anderem Wege, nämlich durch analytische Umformung der Reihenentwicklungen für gewisse cubische Verbindungen der ϑ-Nullwerte ϑ_0, ϑ_2, ϑ_3, gewonnen. Diese Entwicklungen bleiben ihrer Natur nach ausserhalb unserer vorliegenden Darstellung.

Sechstes Kapitel.

Von der algebraischen Darstellung der Modularcorrespondenzen.

Im zweiten Kapitel des vorigen Abschnitts haben wir die Aufgabe, algebraische Correspondenzen auf einer Riemann'schen Fläche F_n auch wirklich mit *algebraischen* Hülfsmitteln darzustellen, immerfort hinausgeschoben. Algebraische Functionen $F(x, y \mid \xi, \eta)$ von vier Flächenpunkten, mit denen wir damals stets arbeiteten, wurden dort in der That nur erst vermöge der transcendenten Primform definiert. Aber bei diesen transcendenten Darstellungen kam das eigentliche algebraische Gesetz, das der einzelnen Correspondenz zu Grunde liegt, noch nicht explicite zur Evidenz. Wir werden demnach jetzt den einzelnen Flächenpunkt mit Hülfe eines bestimmt gewählten Systems algebraischer Functionen oder Formen fixieren und dann nach den *algebraischen Relationen zwischen diesen bestimmten Functionen je zweier correspondierenden Flächenpunkte* suchen.

Nachdem wir in den ersten Paragraphen einige allgemeine hierauf bezügliche Erörterungen vorausgeschickt haben, gehen wir dann sogleich zur algebraischen Darstellung der Modularcorrespondenzen über. Doch beschränken wir hierbei unser Untersuchungsgebiet von vornherein, indem wir nur einige besonders naheliegende Classen von Modularcorrespondenzen besprechen wollen. In der That werden wir explicite nur die Γ_{168} der siebenten Stufe, sowie die ausgezeichneten Gruppen Γ_{96} und Γ_{384} der Stufen 8 und 16 betrachten.

Bei der Γ_{168} werden zufolge der „Einfachheit" der Gruppe G_{168} alle Verhältnisse die durchsichtigste Gestalt annehmen, so dass zur Erläuterung der bei der algebraischen Darstellung der Modularcorrespondenzen eintretenden Gesichtspunkte die Γ_{168} das zweckmässigste Beispiel abgiebt. Indem wir dasselbe etwas ausführlicher besprechen wollen, werden wir hier am Ende des zweiten Bandes zu eben jenem algebraischen Gebilde F_{168} des Geschlechtes $p = 3$ zurückgeführt, dessen ausführliche Theorie den Abschluss von Bd. I bildete.

Die beiden Gruppen Γ_{96} und Γ_{384} sind in historischer Hinsicht für

unsere neuen Fragen die interessantesten. Indem wir nämlich behufs algebraischer Fixierung des einzelnen Flächenpunktes die Modulsysteme $\sqrt{k}, \sqrt{k'}$ bez. $\sqrt[4]{k}, \sqrt[4]{k'}$ zur Benutzung heranziehen, werden die Relationen zwischen je zwei correspondierenden Flächenpunkten gerade diejenigen *irrationalen Modulargleichungen* liefern, bei denen wir schon oben p. 154 ff. ausführlich verweilten. Wie wir schon damals angaben, beziehen sich auf diese Relationen der Transformationstheorie neben den früheren Entwicklungen von Legendre, Jacobi, Gützlaff namentlich auch die neueren von Schröter, Krause u. A. Indem wir hier also mit einem viel behandelten Gegenstande zu thun haben, muss es von allgemeinem Interesse sein, *dass von unserer Theorie der Modularcorrespondenzen aus jene irrationalen Gestalten der Jacobi'schen Modulargleichungen die naturgemässe Aufklärung ihres eigentlichen Wesens fanden*, wie wir dies schon p. 156 erörterten*). — Aber auch umgekehrt können wir vermöge der algebraischen Hülfsmittel, welche uns zur Hand sein werden, von den ausgezeichneten Gruppen Γ_{96}, Γ_{384} aus eine *systematische Behandlung der irrationalen Jacobi'schen Modulargleichungen* anbahnen. Die hiermit bezeichnete Aufgabe hat für die Γ_{384} Hr. E. Fiedler**) in seiner inhaltreichen Leipziger Dissertation (von 1885) behandelt. Aus der letzteren werden wir weiterhin zahlreiche Einzelresultate anführen, während wir zum Zwecke aller principiellen Überlegungen, wie schon bemerkt, lieber an die Gruppe Γ_{168} anknüpfen. —

§ 1. Darstellung einer algebraischen Function zweier Flächenpunkte x, y durch algebraische Functionen von x oder y allein.

Die beiden Punkte ξ und η dachten wir bei der einzelnen Function $F(x, y \mid \xi, \eta)$ beliebig, aber fest gewählt, so dass F nur noch als Function der beiden Stellen x, y zu betrachten ist. Wir bezeichnen sie in diesem Sinne durch $F(x, y)$ und mögen in $F(x, y)$ bei stehendem y eine m-wertige algebraische Function von x besitzen, bei stehendem x aber eine μ-wertige algebraische Function von y. Mit Rücksicht auf die Verwendung, welche wir von $F(x, y)$ zu machen

*) Vergl hierzu die oft genannte Programmnote von Klein, *Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen,* Math. Ann. Bd. 17 (1879), sowie die gleichfalls schon gelegentlich genannte Notiz von Hurwitz, *Zur Theorie der Modulargleichungen,* Göttinger Nachrichten von 1883.

**) *Über eine besondere Classe irrationaler Modulargleichungen der elliptischen Functionen,* abgedruckt in der Vierteljahrsschrift der Züricher Naturforschenden Gesellschaft Band 30.

haben, führen wir jetzt die sehr beschränkende Annahme ein, dass die Unstetigkeitspunkte von F, als Function von x, unabhängig von der besonderen Lage des y sein mögen, und zwar sollen sie etwa bei $\xi_1, \ldots, \xi_m$ liegen; entsprechend sollen die Unstetigkeitspunkte von F, als Function von y gedeutet, unabhängig vom besonderen Werte des x bei $\eta_1, \ldots, \eta_\mu$ liegen. Weitere Voraussetzungen machen wir über F nicht und werden uns übrigens hernach thatsächlich überzeugen, dass die über $F(x, y)$ getroffenen Festsetzungen bei den Functionen F der Correspondenztheorie wenigstens in einigen, weiterhin zu bezeichnenden, Fällen zutreffen.

Um eine algebraische Darstellung der von x und y algebraisch abhängenden Function F der Fläche anzubahnen, gehen wir auf den Riemann-Roch'schen Satz zurück. Zufolge desselben wird bei stehendem y die Function $F(x, y)$ homogen und linear mit von x unabhängigen Coefficienten in $(m - p + \tau + 1)$ speciellen Functionen darstellbar sein, deren einzelne m-wertig ist und an den m Stellen $\xi_1, \ldots, \xi_m$ unstetig wird. Es ist aber möglich, dass für die Darstellung unserer besonderen Function $F(x, y)$ gar nicht alle

$$m - p + \tau + 1$$

linear unabhängigen algebraischen Functionen mit den Unstetigkeitspunkten $\xi_1, \ldots, \xi_m$ erforderlich sind. Im letzteren Falle werden wir die Anzahl der wirklich zu brauchenden Functionen möglichst gering nehmen und mögen etwa mit den s Functionen $\psi_1(x), \ldots, \psi_s(x)$ gerade ausreichen, wobei also:

$$s \leqq m - p + \tau + 1 \tag{1}$$

ist. Dank unserer Annahme, dass die Lage der Unstetigkeitspunkte $\xi_1, \ldots, \xi_m$ von dem besonderen Werte y unabhängig sein soll, haben wir so für jedes y eine Darstellung:

$$F(x, y) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) + \cdots + c_s\psi_s(x) \tag{2}$$

unserer Function F von x, *wobei die $\psi_i(x)$ die schon genannten Functionen von x allein sind, während die $c_1, \ldots, c_s$ nur noch allein von y abhängig sein werden.*

Man bemerkt nun sofort, dass $c_1, \ldots, c_s$ algebraische Functionen der Stelle y sein müssen. Um die c aber als solche aus (2) explicite zu berechnen, tragen wir in diese Gleichung nach einander für x die s speciellen Stellen $x_1, \ldots, x_s$ ein, die nur so ausgewählt sein mögen, dass die s-gliedrige Determinante $|\psi_k(s_i)|$ von Null verschieden ist. Letztere Forderung wird leicht erfüllbar sein, da die

$\psi_1(x), \ldots, \psi_s(x)$ ein System linear-unabhängiger Functionen der Fläche sind. Die s Gleichungen:

$$F(x_i, y) = c_1\psi_1(x_i) + c_2\psi_2(x_i) + \cdots + c_s\psi_s(x_i)$$

werden wir nun nach den Unbekannten $c_1, \ldots, c_s$ auflösen können und finden letztere solchergestalt explicite als Functionen von y allein dargestellt, wobei als Unstetigkeitspunkte derselben offenbar $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\mu$ fungieren. Setzt man daraufhin $c_k = \chi_k(y)$, *so ergiebt sich für* $F(x, y)$ *die Darstellung:*

$$(3) \qquad F(x, y) = \psi_1(x)\chi_1(y) + \psi_2(x)\chi_2(y) + \cdots + \psi_s(x)\chi_s(y)$$

durch die Functionen $\psi_k(x)$ *und* $\chi_k(y)$ *von* x *bez.* y *allein.*

Man bemerke, dass in Formel (3) auch die s Functionen $\chi(y)$ von einander linear-unabhängig sein müssen. Wäre nämlich etwa χ_s eine lineare Verbindung der voraufgehenden $(s-1)$ Functionen, so hätten wir leicht ersichtlich auch in Formel (2) bereits mit $(s-1)$ Functionen ψ reichen müssen, unserer Annahme zuwider. Bei dieser Sachlage wären wir zur ganzen Zahl s notwendig auch dann geführt worden, wenn wir die Betrachtung nicht mit den $\psi_k(x)$, sondern mit den $\chi_k(y)$ begonnen hätten. *Die ganze Zahl* s *ist somit unserer Function* $F(x, y)$ *eindeutig zugeordnet und giebt einen eigentümlichen Charakter dieser Function zweier Flächenpunkte an;* natürlich bestehen nun zugleich die beiden Bedingungen:

$$(4) \qquad \begin{cases} s \leq m - p + \tau + 1, \\ s \leq \mu - p + \tau' + 1, \end{cases}$$

wo τ die Anzahl linear-unabhängiger Formen φ ist, die zugleich in den m Punkten $\xi_1, \ldots, \xi_m$ verschwinden, während τ' die gleiche Bedeutung für $\eta_1, \ldots, \eta_\mu$ besitzt*). —

Die Darstellung der $\psi_k(x)$, $\chi_k(y)$ durch speciell gewählte algebraische Functionen oder auch algebraische Formen der Fläche werden wir jetzt nach den bezüglichen Regeln im ersten Kapitel des vorliegenden Abschnittes leisten. Nach p. 488 können wir erstlich $\psi_1(x)$ als Quotient:

$$(5) \qquad \psi_1(x) = \frac{G_1^{(\nu)}(x_1, x_2)}{G_0^{(\nu)}(x_1, x_2)}$$

zweier ganzen algebraischen Formen der gleichen Dimension ν darstellen; dabei werden sich unter den $n\nu$ Nullpunkten von G_0 auf der F_n insbesondere die m Punkte $\xi_1, \ldots, \xi_m$ finden, so dass $n\nu \geq m$ ist.

*) Vergl. für die bisherige Entwicklung Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie,* Bd. I vierte Abteilung, Kap. VIII.

Trifft hierbei das Ungleichheitszeichen zu, so mögen die $(n\nu - m)$ ferneren Nullpunkte von G_0 etwa $\xi_{m+1}, \ldots, \xi_{n\nu}$ genannt werden. Neben G_0 und G_1 führen wir alsdann noch die $(s-1)$ weiteren ganzen Formen:

$$G_i^{(\nu)}(x_1, x_2) = \psi_i(x) \cdot G_0^{(\nu)}(x_1, x_2) \tag{6}$$

für $i = 2, \cdots, s$ ein. — Ein entsprechender Ansatz knüpft sich an die $\chi(y)$, wo wir zu ganzen Formen der Dimension ν' geführt werden mögen; zum Unterschiede gegen (6) bezeichnen wir letztere Formen durch $H_0(y_1, y_2), \ldots, H_s(y_1, y_2)$. —

Nunmehr führe man *die von zwei Stellen x und y der F_n abhängende ganze algebraische Form:*

$$\Phi(x_1, x_2 \mid y_1, y_2) = F(x, y) \cdot G_0(x_1, x_2) \cdot H_0(y_1, y_2) \tag{7}$$

ein. Dieselbe wird in den beiden Variabelenreihen die Dimensionen ν bez. ν' zeigen; sie wird auf der Fläche nirgends unendlich werden und in Anbetracht des Verschwindens zunächst das Verhalten von $F(x, y)$ zeigen; ausserdem aber kommen als Function von x die $(n\nu - m)$ festen (d. i. von y unabhängigen) Nullpunkte $\xi_{m+1}, \ldots, \xi_{n\nu}$ hinzu und als Function von y gewisse $(n\nu' - \mu)$ feste Nullpunkte $\eta_{\mu+1}, \ldots, \eta_{n\nu'}$. *Für die somit construierte Form Φ aber ergiebt die vorangehende Deduction unmittelbar die Darstellung:*

$$\Phi(x_i \mid y_i) = G_1 H_1 + G_2 H_2 + \cdots + G_s H_s. \tag{8}$$

Für die Darstellung der einzelnen Formen G, H könnten wir nun weiter jene Regeln in Anwendung bringen, die früher (p. 489) allgemein in dieser. Hinsicht entwickelt wurden. Wir würden also vorab eine Minimalbasis ganzer Formen der Fläche F_n auszuwählen haben, um in dieser jede einzelne Form G, H in der bekannten Gestalt darzustellen.

Ganz analoge Betrachtungen knüpfen sich an die Darstellung von $F(x, y)$, falls wir die ternäre Formentheorie auf Grundlage einer ebenen Curve C_n gebrauchen wollen. Doch setzen wir hierbei der Einfachheit halber gleich voraus, dass die Grundcurve C_n singularitätenfrei sei, eine Annahme, die auch den allgemeinen Entwicklungen p. 497 ff. zu Grunde liegt; einzig dieser specielle Fall wird späterhin Verwendung finden.

Wir verfahren nun folgendermassen: Auf der C_n stellen wir erstlich wieder $\psi_1(x)$ als Quotienten zweier ganzen Formen:

$$\psi_1(x) = \frac{g_1^{(\nu)}(x_1, x_2, x_3)}{g_0^{(\nu)}(x_1, x_2, x_3)} \tag{9}$$

der Dimension ν dar, wobei wir natürlich diese ganze Zahl ν möglichst

niedrig gewählt denken. Die „Curve" $g_0(x_i)=0$ wird alsdann auf der C_n erstlich die m Punkte $\xi_1, \ldots, \xi_m$ ausschneiden, ausserdem aber $(\nu n - m)$ weitere Punkte $\xi_{m+1}, \ldots, \xi_{n\nu}$; natürlich kann auch der besonders einfache Fall eintreten, dass $n\nu = m$ wird, wo alsdann ausser den $\xi_1, \ldots, \xi_m$ neue Schnittpunkte der C_n mit $g_0=0$ nicht eintreten. Neben g_0, g_1 haben wir jetzt noch die weiteren ganzen Formen $g_0\psi_2, \ldots, g_0\psi_s$ auf der C_n, welche nach p. 501 wieder ganze homogene Verbindungen ν^{ter} Dimension von x_1, x_2, x_3 sind; wir bezeichnen dieselben mit $g_2, \ldots, g_s$. Die Behandlung der $\chi(y)$ geht denselben Weg, und hier möge insbesondere die „Curve" der ν'^{ten} Ordnung $h_0(y_i)=0$ auf der C_n neben den μ Punkten $\eta_1, \ldots, \eta_\mu$ noch die $(n\nu' - \mu)$ weiteren $\eta_{\mu+1}, \ldots, \eta_{n\nu'}$ ausschneiden. Nach Analogie von (7) wird man demnächst *die ganze, doppeltternäre Form der Dimensionen ν bez. ν' in den beiden Variabelenreihen:*

$$\Phi(x_1, x_2, x_3 \mid y_1, y_2, y_3) = F(x, y) \cdot g_0(x_i) h_0(y_i) \tag{10}$$

herstellen und hat alsdann für diese Form die explicite Darstellung:

$$\Phi(x_i \mid y_i) = g_1(x_i) h_1(y_i) + g_2(x_i) h_2(y_i) + \cdots + g_s(x_i) h_s(y_i) \tag{11}$$

in rationaler ganzer Gestalt durch die x_i und y_i. Natürlich haben wir bei stehendem Punkte y bez. x der C_n in $\Phi=0$ die Gleichung einer algebraischen Curve der Ordnung ν bez. ν', wobei das eine Mal die x_i, das andere Mal die y_i die laufenden Coordinaten sind, und wir gewinnen betreffs des Durchschnitts dieser Curve mit der Grundcurve C_n das Resultat: *Bei stehendem y schneidet die Curve $\Phi=0$ auf der C_n erstlich die Nullpunkte von $F(x, y)$, für diesen Punkt y als Function von x betrachtet, aus, überdies aber werden noch $(n\nu - m)$ feste, d. i. von y unabhängige Punkte ausgeschnitten.* (Zufolge unserer Annahme, dass ν möglichst niedrig gewählt sein soll, lassen sich übrigens diese hinzukommenden Nullpunkte nicht etwa dadurch verringern, dass man bei den $g_k(x_i)$ einen gemeinsamen, in den x_i rationalen Factor absondern könnte.) *Entsprechend wird $\Phi=0$, bei stehendem x in den y_i gedeutet, erstlich wieder die betreffenden Nullpunkte von F ausschneiden, ausserdem aber noch die $(n\nu' - \mu)$ Punkte $\eta_{\mu+1}, \ldots,$ deren Lage von x unabhängig ist.*

Natürlich könnten wir nun auch die auf eine Raumcurve des R_3, des R_4 u. s. w. gegründete Formentheorie zur expliciten Darstellung der rechten Seite von (3) benutzen. Indessen finden derlei Entwicklungen weiterhin doch keine Anwendung und brauchen demnach hier nicht weiter besprochen zu werden.

§ 2. Von der Darstellung der algebraischen Correspondenzen durch algebraische Gleichungen*).

Unter den Functionen $F(x, y \mid \xi, \eta)$ der Correspondenztheorie sind es nur die *bei den gewöhnlichen Correspondenzen einer positiven Wertigkeit* auftretenden F, bei denen die im vorigen Paragraphen über F gemachten Voraussetzungen zutreffen; dabei sind die nullwertigen Correspondenzen denjenigen von positiver Wertigkeit zuzurechnen. Man wolle sich nämlich vermöge der transcendenten Darstellung des F überzeugen, dass die Unstetigkeitspunkte von F, als Function von x angesehen, sowohl bei singulären, wie bei negativ-wertigen Correspondenzen keineswegs von y unabhängig sind; hier also trifft die wesentliche Voraussetzung der Entwicklung des vorigen Paragraphen nicht ein. Wir werden demnach zuvörderst einzig von den Correspondenzen einer Wertigkeit $w \geqq 0$ handeln und für deren Darstellung übrigens gleich die ternäre auf eine singularitätenfreie ebene C_n gegründete Formentheorie benutzen, da nur dieser Fall weiterhin zur Geltung kommt.

Nach den Regeln (10), (11) des vorigen Paragraphen lässt sich eine *null- oder positiv-wertige* α-β-*deutige Correspondenz* stets durch Nullsetzen einer bi-ternären rationalen ganzen Form $\Phi(x_1, x_2, x_3 \mid y_1, y_2, y_3)$ darstellen, welche homogen von den Dimensionen ν bez. ν' in den beiden Variabelenreihen sei. Dabei ergiebt sich mit Rücksicht auf die betreffenden Entwicklungen von p. 537 für den Durchschnitt der Grundcurve mit dem durch Nullsetzen von Φ entspringenden Gebilde das Resultat: *Bei stehendem Punkte x der Grundcurve werden auf derselben durch die in den y gedeutete Curve $\Phi(x, y) = 0$ ausgeschnitten:*

1) *die α dem x correspondierenden Punkte y,*
2) *w-fach gezählt der Punkt x selbst, wenn w die Wertigkeit bedeutet,*
3) *gewisse δ' feste, von x unabhängige, Punkte.*

Dabei wird man die letztere Anzahl δ' aus der Gleichung:

$$(1) \qquad n\nu' = \alpha + w + \delta'$$

berechnen können. Andererseits aber folgt: *Bei stehendem Punkte y der Grundcurve C_n werden durch die in x gedeutete Curve $\Phi(x, y) = 0$ auf C_n ausgeschnitten:*

1) *die β dem Punkte y correspondierenden Punkte x,*
2) *w-fach gezählt jener Punkt y selbst,*
3) *gewisse δ feste, d. i. von y unabhängige, Punkte.*

*) Siehe hierzu § 9 der auch in Kap. 2 zu Grunde gelegten Arbeit von Hurwitz über algebraische Correspondenzen und das Correspondenzprincip.

Für die Anzahl δ kann man dann entsprechend der Formel (1) die nachfolgende Gleichung bilden:

$$n\nu = \beta + w + \delta. \tag{2}$$

Die Auswahl der δ bez. δ' festen Schnittpunkte ist, nach Zahl und Lage, bis zum gewissen Grade der Willkür anheimgestellt. Aus den Überlegungen des vorigen Paragraphen ergiebt sich in diesem Betracht folgendes: Für irgend einen *speciellen* Punkt y der C_n lege man durch die β correspondierenden Punkte x eine Curve, welche die C_n zugleich in y selbst w-fach trifft. Eine derartige Curve C_ν wird sich, bei hinreichend hoch gewählter Ordnung ν, stets auf mannigfaltige Art auswählen lassen. Irgend eine particulär gewählte C_ν wird dann noch fernere δ Punkte auf C_n ausschneiden, wobei ja im speciellen auch $\delta = 0$ sein kann. Jedenfalls aber werden diese δ Punkte auch für *alle übrigen* y als feste Zusatzpunkte fungieren können; denn im vorigen Paragraphen waren mit der Fixierung einer einzelnen unter den Formen $g_0, g_1, \ldots, g_s$ offenbar alle übrigen eindeutig bestimmt. — Ganz unabhängig davon, wie wir die soeben genannten δ Punkte fixiert haben mögen, werden wir nunmehr die zweite Reihe der δ' Zusatzpunkte dadurch nach Zahl und Lage auswählen, dass wir bei speciellem x irgend eine $C_{\nu'}$ beliebig herausgreifen, welche die α zugeordneten Punkte auf der C_n ausschneidet, ausserdem aber im Punkte x selbst die Grundcurve w-fach trifft. Wir werden diese Überlegung weiter unten an Beispielen ins einzelne durchzuführen haben.

Um die algebraische Darstellung negativ-wertiger und singulärer Correspondenzen zu ermöglichen, werden wir, wie wir hier beiläufig ausführen, die Auflösung des *Umkehrproblems* benutzen können. Sei eine ganz beliebige Correspondenz auf unserer Riemann'schen Fläche vorgelegt, und seien die zugehörigen p Integralrelationen gegeben durch:

$$\sum_{r=1}^{\alpha} j_i(y_r) = \sum_{k=1}^{p} \pi_{ik} j_k(x) + c_i, \tag{3}$$

wobei also nähere Angaben über die π_{ik}, c_i gar nicht vorliegen sollen. Man setze alsdann ein erstes System von p Gleichungen an:

$$\sum_{l=1}^{p} j_i(y_l^{(1)}) = -\sum_{k=1}^{p} \pi_{ik} j_k(x) - w_1 j_i(x) + d_i, \tag{4}$$

wo w_1 eine ganze positive Zahl oder Null sein soll, die $d_1, \ldots, d_p$ aber Constante bedeuten. Auf Grund der Lösbarkeit des Umkehrproblems kann man für jeden Punkt x aus (4) ein System von p zugehörigen Punkten $y_1^{(1)}, \ldots, y_p^{(1)}$ angeben und wolle insbesondere die

Constanten d_i so gewählt denken, dass nicht gerade der unbestimmte Fall des Umkehrproblems vorliegt. In ganz analoger Weise setzen wir jetzt ein zweites System zu p Gleichungen:

$$(5) \qquad \sum_{l=1}^{p} j_i(y_l^{(2)}) = -\sum_{k=1}^{p} \pi_{ik} j_k(x) - w_2 j_i(x) + e_i$$

an, wo w_2 wieder eine ganze Zahl $\geqq 0$ ist und für die Constanten e_i die gleiche Bemerkung gilt wie für die d_i. Zudem mögen wir diese Constanten so ausgewählt denken, dass nicht für alle x ein Punkt aus der Reihe $y_1^{(1)}, \ldots, y_p^{(1)}$ auch in der anderen Reihe $y_1^{(2)}, \ldots, y_p^{(2)}$ sich findet.

Die Anwendung der hiermit durchgeführten Massnahme auf unser Problem, die zu (3) gehörende Correspondenz durch algebraische Gleichungen darzustellen, ergiebt sich nun so: Indem man einmal die Gleichungen (3) und (4), sodann aber (3) und (5) combiniert, ergeben sich die beiden neuen Relationen:

$$(6) \qquad \sum_{r=1}^{\alpha} j_i(y_r) + \sum_{l=1}^{p} j_i(y_l^{(1)}) = -w_1 j_i(x) + c_i + d_i,$$

$$(7) \qquad \sum_{r=1}^{\alpha} j_i(y_r) + \sum_{l=1}^{p} j_i(y_l^{(2)}) = -w_2 j_i(x) + c_i + e_i,$$

deren jede infolge der wechselnden Werte $i = 1, 2, \cdots, p$ insgesamt p Integralrelationen vertritt. Lassen wir nun dem Punkte x der Fläche die $(\alpha + p)$ Punkte $y_1, \ldots, y_\alpha, y_1^{(1)}, \ldots, y_p^{(1)}$ correspondieren, so lehrt (6), dass wir damit eine gewöhnliche α_1-β_1-deutige Correspondenz der Wertigkeit $w_1 \geqq 0$ gewonnen haben, wobei insbesondere $\alpha_1 = \alpha + p$ ist. Diese Correspondenz können wir nach den im Anfang des Paragraphen entwickelten Regeln durch eine Gleichung $\Phi_1 = 0$ darstellen. Aber indem wir jetzt zweitens dem Punkte x die $(\alpha + p)$ Stellen $y_1, \ldots, y_\alpha, y_1^{(2)}, \ldots, y_p^{(2)}$ entsprechen lassen, gewinnen wir eine neue gewöhnliche Correspondenz von der Wertigkeit $w_2 \geqq 0$, die wir durch $\Phi_2 = 0$ darstellen mögen.

Hier wird nun von Vorteil, dass zufolge unserer obigen Verabredung betreffs der d_i, e_i die beiden Punktreihen $y_1^{(1)}, \ldots, y_p^{(1)}$ und $y_1^{(2)}, \ldots, y_p^{(2)}$ gemeinsame Punkte im allgemeinen nicht aufweisen. Wollen wir überdies, was uns ja freisteht, eine der beiden Zahlen w_1, w_2 mit Null identisch nehmen sowie bei der Bildung der Formen Φ_1, Φ_2 Sorge tragen, dass die δ_1 Zusatzpunkte bei Φ_1 von den δ_2 Zusatzpunkten von Φ_2 durchgehends verschieden sind und ebenso die δ_1' Punkte von den δ_2', so ergiebt sich offenbar das Resultat: *Die ganz*

beliebig aufgegriffene Correspondenz (3) *der* F_n *lässt sich stets in dem Sinne rein durch zwei algebraische Gleichungen:*

$$(8)\qquad \begin{cases} \Phi_1(x_1, x_2, x_3 \mid y_1, y_2, y_3) = 0, \\ \Phi_2(x_1, x_2, x_3 \mid y_1, y_2, y_3) = 0 \end{cases}$$

darstellen, dass bei stehendem Punkte x *(bez.* y*) die gemeinsamen Schnittpunkte der beiden Curven* (8) *mit der Grundcurve* C_n *genau die* α *(bez.* β*) zugeordneten Punkte sind.*

Unsere weiter folgenden Betrachtungen sollen sich übrigens nicht mehr auf den hiermit formulierten allgemeinsten Fall beziehen; sie sollen vielmehr allein noch die null- und positiv-wertigen Correspondenzen betreffen, zu deren Darstellung eine einzelne Gleichung $\Phi = 0$ genügt.

§ 3. Von der Willkür der im Falle einer nicht-negativen Wertigkeit eintretenden Gleichung $\Phi(x_i \mid y_i) = 0$.

Die unter (11) § 1 geleistete formentheoretische Darstellung von $F(x, y)$ auf ternärer Grundlage müssen wir jetzt noch weiter durchbilden. Doch nehmen wir dabei gleich die speciellen Voraussetzungen der null- oder positiv-wertigen Correspondenzen wieder auf; wird doch dieser Fall künftig allein zur Anwendung gelangen.

Es sei also eine Correspondenz einer Wertigkeit $w \geq 0$ gegeben, die α-β-deutig sei. Wir werden dann in der vorhin beschriebenen Weise durch Benutzung zweier speciellen Punkte $x = \xi$ und $y = \eta$ zwei Reihen von δ bez. δ' Zusatzpunkten ausfindig machen, um daraufhin unsere Correspondenz in gleichfalls schon bezeichneter Art durch eine algebraische Gleichung:

$$(1)\qquad \Phi(x_1, x_2, x_3 \mid y_1, y_2, y_3) = 0$$

darzustellen. Hier bemerke man nun, dass der rationale Ausdruck $\Phi(x_i \mid y_i)$ selbst nach Festlegung der $\delta + \delta'$ Zusatzpunkte im allgemeinen noch keineswegs eindeutig bestimmt ist. Man bilde nämlich, wenn $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ die Gleichung der Grundcurve C_n ist, von Φ aus die neue Form:

$$(2)\qquad \Phi'(x_i \mid y_i) = c \cdot \Phi(x_i \mid y_i) + f(x_i) \cdot \gamma_1(x_i \mid y_i) + f(y_i) \cdot \gamma_2(x_i \mid y_i),$$

wo c eine von Null verschiedene Constante ist, die γ_1, γ_2 aber solche in jeder Variabelenreihe homogene ganze Ausdrücke sind, dass die rechte Seite von (2) Homogeneität in den x_i sowie in den y_i zeigt. Derartige mit f verschwindende Zusatzglieder werden wir ja stets anbringen können, sobald $\nu > n$ oder auch nur $\nu' > n$ ist. Offenbar

aber wird durch $\Phi' = 0$ unsere Correspondenz in genau derselben Weise dargestellt wie durch $\Phi = 0$.

Sollen wir nun — immer bei festgehaltenen $\delta + \delta'$ Zusatzpunkten — die Gleichung (1) als eine zugehörige *Correspondenzgleichung* benennen, so lässt sich diese Gleichung, wie wir gerade sahen, in den genannten Fällen $\nu > n$ bez. $\nu' > n$ in sehr verschiedener Weise auswählen. Wir müssen aber geradezu fragen, welches die allgemeinste Gestalt der Correspondenzgleichung bei Gebrauch jener einmal gewählten Zusatzpunkte ist. In diesem Betracht gilt nun der wichtige Satz: *Die linke Seite der allgemeinsten zugehörigen Correspondenzgleichung ist in dem particulär gewählten Ausdruck Φ stets in der Gestalt* (2) *darstellbar.*

Zum Beweise dieses Satzes dürfen wir uns nicht darauf berufen, dass die Regeln des § 1 zur Bildung der Correspondenzgleichung immer nur auf ein in der Gestalt (2) darstellbares Φ' zu führen vermögen. Es könnte ja vielmehr sein, dass wir auf ganz anderem Wege für unsere Correspondenz samt jenen $\delta + \delta'$ Zusatzpunkten eine Darstellung vermöge einer Form $\Phi'(x_i \,|\, y_i)$ erhalten könnten, welche eben nicht die Ausdrucksweise (2) gestattet. Wir müssen demnach hier etwas weiter ausholen und wählen zuvörderst, einer sehr gewöhnlichen Operationsweise der Theorie der ternären Formen auf algebraischen Curven folgend, unter allen von Φ aus in der Gestalt (2) erreichbaren Formen eine ganz bestimmte aus*).

Bei dieser Untersuchung bemerken wir vorab, dass unser vorhin formulierter Satz ganz unabhängig von der Auswahl des Coordinatendreiecks x_i ist. Dieserhalb dürfen wir annehmen, dass die Ecke $x_2 = x_3 = 0$ *nicht* auf der C_n gelegen ist. Dann aber wird sich die Gleichung der C_n in die Gestalt bringen lassen:

$$(3) \qquad x_1^n = g(x_1, x_2, x_3),$$

wo rechter Hand x_1 nicht mehr in n^{ter} Potenz vorkommt. Indem wir nun im Ausdruck Φ, sofern überhaupt $\nu \geqq n$ ist, x_1^n irgendwo durch $g(x_i)$ ersetzen, haben wir offenbar nach Art von (2) dem Φ ein additives Glied angehängt, welches f als Factor enthält. Diese Operation des Ersatzes von x_1^n durch $g(x_i)$ lässt sich nun öfter wiederholen, und wir können solcherweise von x_1 alle höheren als $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenzen zum Ausfall bringen. In gleicher Weise können wir auch von y_1 alle

---

*) Siehe wegen des Folgenden die bezügliche Entwicklung in der p. 668 genannten Dissertation von Fiedler. Die betreffenden Überlegungen sind übrigens genau der Deductionsweise nachgebildet, welche Hr. Nöther beim Beweise seines bekannten Fundamentalsatzes der ternären Algebra angewandt hat (cf. Math. Ann. Bd. 7).

Potenzen mit einem Exponenten $\geqq n$ entfernen. Wenn wir also vorübergehend (1) dann als *Normalgestalt der Correspondenzgleichung* bezeichnen sollen, *falls sich in* Φ *von* x_1 *und* y_1 *höchstens die* $(n-1)$ *ersten Potenzen finden*, so ist evident, *dass die beliebig aufgegriffene Correspondenzgleichung* $\Phi(x_i \mid y_i) = 0$ *entweder selbst schon die Normalgestalt besitzt**) *oder doch vermöge der Regel* (2) *in diese Gestalt überführbar ist.*

Jetzt aber gilt zweitens der Satz: *Die linke Seite der Normalgestalt unserer Correspondenzgleichung ist bis auf einen constanten Factor eindeutig bestimmt.* Um diesen neuen Punkt unserer Deduction darzuthun, wollen wir der Bequemlichkeit halber nicht-homogene Schreibweise anwenden, indem wir setzen:

$$\frac{x_1}{x_3} = w, \quad \frac{x_2}{x_3} = z, \quad \frac{y_1}{y_3} = w', \quad \frac{y_2}{y_3} = z'. \tag{4}$$

Die Form Φ, welche die Normalgestalt darbiete, liefere dann die Function:

$$\Psi(w, z \mid w', z') = x_3^{-\nu} y_3^{-\nu'} \Phi(x_i \mid y_i), \tag{5}$$

welche letztere von zwei Stellen (w, z) und (w', z') der Fläche algebraisch abhängt. Für diese Function aber gilt die Entwicklung:

$$\Psi(w, z \mid w', z') = \sum_{\sigma, \tau} w^\sigma z^\tau g_{\sigma, \tau}(w', z'), \tag{6}$$

wobei für den ersten der Summationsbuchstaben, σ, die Ungleichung $0 < \sigma < n$ besteht; w und z sind endlich durch die irreducibele Relation $f(w, z) = 0$ verbunden, in welcher w bis auf die n^{te} Potenz ansteigt.

Man setze nun, es gäbe noch eine zweite Normalgestalt Φ' für unsere Correspondenzgleichung, so wird die zugehörige Function:

$$\Psi'(w, z \mid w', z') = \sum_{\sigma, \tau} w^\sigma z^\tau g'_{\sigma, \tau}(w', z') \tag{7}$$

für *jedes* besondere, in Übereinstimmung mit $f = 0$ gewählte, Wertsystem $w' = w_0'$, $z' = z_0'$ eine nur noch von dem einen Punkte (w, z) abhängende algebraische Function der F_n darstellen, welche mit $\Psi(w, z \mid w_0', z_0')$ in Bezug auf alle Null- und Unstetigkeitspunkte genau übereinstimmt. Die beiden Functionen:

$$\Psi(w, z \mid w_0', z_0'), \quad \Psi'(w, z \mid w_0', z_0')$$

sind demnach bis auf einen constanten Factor c mit einander identisch. Aber eine algebraische Function des durch $f(w, z) = 0$ definierten Ge-

*) Dies tritt insonderheit stets dann ein, wenn zugleich $\nu < n$ und $\nu' < n$ ist.

bildes lässt sich als lineare ganze Function von $w, w^2, \ldots, w^{n-1}$, mit rationalen Functionen von z als Coefficienten, bekanntlich nur in *einer einzigen* Weise darstellen (cf. p. 490). Es folgt somit, dass für jede einzelne Combination σ, τ der *Zahlwert* $g'_{\sigma,\tau}(w_0', z_0')$ gleich dem mit jener Constanten c multiplicierten *Zahlwerte* $g_{\sigma,\tau}(w_0', z_0')$ ist. Da aber w_0', z_0' eine beliebige Lösung von $f = 0$ darstellten, so ist die Identität der algebraischen Function $g'_{\sigma,\tau}(w, z)$ mit $c g_{\sigma,\tau}(w, z)$ erwiesen. Nun finden sich in den Ausdrücken g', g (zufolge der Normalgestalt) von w nur die Potenzen $w, \ldots, w^{n-1}$; es wird also geradezu der rationale *Ausdruck* $g_{\sigma,\tau}$ durch Multiplication mit c in den Ausdruck $g'_{\sigma,\tau}$ übergehen.

Indem wir zur homogenen Schreibweise zurückgehen, ergiebt sich in der That der Ausdruck $\Phi(x_i \mid y_i)$ in der Normalgestalt als bis auf einen Factor c eindeutig bestimmt. Da aber jede unserer Correspondenzgleichungen durch die Massnahme (2) in die Normalgestalt übergeführt werden konnte, so ist endlich erwiesen, *dass nach einmal ausgewählten $\delta + \delta'$ Zusatzpunkten jede mögliche Correspondenzgleichung aus einer unter ihnen nach der Regel* (2) *ableitbar ist.* Speciell aber ergiebt sich: *Ist $\nu < n$ und zugleich $\nu' < n$, so giebt es bis auf einen constanten Factor nur eine Form $\Phi(x_i \mid y_i)$, welche, mit Null identisch gesetzt, unsere Correspondenz in bezeichneter Weise darstellt.*

§ 4. Auswahl der drei speciellen im folgenden zu behandelnden Classen von Modularcorrespondenzen.

Nach den voraufgehenden allgemeinen Entwicklungen wenden wir uns nunmehr zur algebraischen Darstellung einiger besonderen Modularcorrespondenzen. Dabei werden wir sogleich eine sehr weit gehende Beschränkung unserer Untersuchung eintreten lassen, indem wir erstlich behufs wirklicher Bildung der Correspondenzgleichungen immer die *ternäre*, auf eine ebene C_n gegründete, Formentheorie benutzen wollen, während wir andererseits nur sogenannte *Schnittsystem-Correspondenzen* aufnehmen mögen. Wir bezeichnen aber eine α-β-deutige algebraische Correspondenz als eine Schnittsystem-Correspondenz, *falls dieselbe durch eine einzelne Gleichung $\Phi(x_i \mid y_i) = 0$ der Dimensionen $\frac{\alpha}{n}$ bez. $\frac{\beta}{n}$ in den Variabelenreihen rein dargestellt werden kann.* Hierin liegt eine doppelte Beschränkung unseres Untersuchungsgebietes: Einmal nämlich muss $w = 0$ sein, *d. h. wir haben unsere Beispiele unter den nullwertigen Correspondenzen auszusuchen;* sodann muss es möglich sein, *ohne Zuhülfenahme irgend welcher δ bez. δ' Zusatzpunkte die Gleichung $\Phi = 0$*

zu bilden. Über diese beiden Gesichtspunkte haben wir sogleich ausführliche Discussionen anzustellen.

Wie man weiss, lässt sich das Polygon jeder Untergruppe Γ_μ durch zweckmässige Auswahl zugehöriger Moduln auf eine ebene C_* eindeutig beziehen. Aber wir wissen, dass in keiner Weise bei allen Gruppen die erweiterte Transformation n^{ter} Ordnung zu $\Phi(n)$-$\Phi(n)$-deutigen Correspondenzen führt (unter $\Phi(n)$ stets die Teilersumme von n verstanden). Indem wir vielmehr selbstverständlich sofort Γ_μ als *Congruenzgruppe* annehmen, möge sie überdies in der gesamten Modulgruppe *ausgezeichnet* sein, damit wir von vornherein jenen mühsamen Untersuchungen über Reducibilität der Transformationsgleichungen aus dem Wege gehen, die uns früher (p. 86 ff.) ausführlich beschäftigten.

Endlich aber wolle man bemerken, dass wir seiner Zeit bei den Modulargleichungen der Ikosaederirrationalität ζ guten Vorteil aus gewissen *invariantentheoretischen* Schlussweisen zogen, welche letztere auf dem Umstande basierten, dass ζ sich gegenüber allen Modulsubstitutionen linear reproducierte. Wollen wir auch hier im ternären Gebiete derartige Hülfsmittel der Invariantentheorie in möglichst weitem Umfange zur Verwendung bringen, so müssen wir die Curve C_* so auswählen können, dass sie den μ bezüglich Γ_μ inäquivalenten Modulsubstitutionen gegenüber μ *Collineationen* in sich erfährt.

Und nun kennen wir überhaupt nur *drei* Gruppen Γ_μ, welche die bis jetzt geforderten Eigenschaften in sich vereinen; es sind:

1) *die Hauptcongruenzgruppe siebenter Stufe* Γ_{168} *mit dem Modulsystem der* z_α,

2) *die ausgezeichnete* Γ_{96} *achter Stufe mit dem (nicht-homogen geschriebenen) System* $\sqrt[4]{\lambda}$, $\sqrt[4]{1-\lambda}$,

3) *die ausgezeichnete* Γ_{384} *der sechzehnten Stufe mit dem Modulsystem* $\sqrt[8]{\lambda}$, $\sqrt[8]{1-\lambda}$.

Auf diese drei Gruppen soll unsere Untersuchung somit eingeschränkt bleiben, wie wir ja schon in der Einleitung zum vorliegenden Kapitel andeuteten. Die zugehörigen Curven gehören für die Fälle 1), 2) der vierten, im Falle 3) der achten Ordnung an; ihre Gleichungen sind:

1) Für die Γ_{168}:

$$z_1^3 z_4 + z_4^3 z_2 + z_2^3 z_1 = 0; \tag{1}$$

2) für die Γ_{96}:

$$z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 = 0, \tag{2}$$

wo:

$$\sqrt[4]{\lambda} : \sqrt[4]{1-\lambda} : \frac{1+i}{\sqrt{2}} = z_1 : z_2 : z_3; \tag{3}$$

3) für die Γ_{384}:

(4) $$z_1^8 + z_2^8 + z_3^8 = 0,$$

wobei gesetzt ist:

(5) $$\sqrt[8]{\lambda} : \sqrt[8]{1-\lambda} : e^{\frac{\pi i}{8}} = z_1 : z_2 : z_3.$$

Die Gestalt der Collineationsgruppe der Curve (1) ist uns von früher her sehr bekannt (vergl. z. B. I p. 705); die Collineationsgruppen G_{96} und G_{384} sind aus den Gleichungsformen (2) und (4) unmittelbar ableitbar und die Zuordnung der ternären Substitutionen zu den Modulsubstitutionen entspringt leicht aus dem Verhalten von λ gegenüber den Erzeugenden S und T*). Die Entwicklungen der vorangehenden Paragraphen aber finden auf unsere Curven C_4, C_4, C_8 deshalb ohne weiteres Anwendung, *weil letztere sämtlich singularitätenfrei sind.* Dass dies aber der Fall ist, ergiebt sich aus dem Umstande, dass in allen drei Fällen die Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z_3} = 0$$

durch keinen Punkt (z_i) zugleich erfüllt sein können.

Für alle principiellen Überlegungen benutzen wir, wie gleichfalls bereits in der Einleitung erwähnt, fortan die Curve C_4 der Γ_{168} und geben die parallel gehenden Resultate für die Γ_{96} und Γ_{384} meist nur ohne Beweis an. Die ausführliche Behandlung der zur Γ_{96} und zur Γ_{384} gehörenden Correspondenzen findet man in der p. 668 ausführlich genannten Arbeit von E. Fiedler, die Untersuchung der Modularcorrespondenzen siebenter Stufe ist erst letzthin vom Herausgeber durchgeführt worden**).

§ 5. Aussonderung der nullwertigen Correspondenzen bei den Gruppen Γ_{168}, Γ_{96} und Γ_{384}.

Wir haben den Begriff der Schnittsystem-Correspondenzen vorhin so gefasst, dass dieselben stets nullwertig sein sollten. Es ist sonach unsere erste Aufgabe, für die einzelne der drei ausgewählten Gruppen Γ_μ diejenigen Ordnungen n anzugeben, deren zugehörige Modularcorrespondenzen thatsächlich die Wertigkeit $w = 0$ aufweisen.

Indem wir mit der Γ_{168} siebenter Stufe beginnen, werden wir nach p. 606 jedenfalls *für alle quadratischen Nichtreste n* von 7 mit nullwertigen Modularcorrespondenzen zu thun haben. Bei den quadra-

---

*) Cf. Fiedler, l. c. pag. 20 u. f.

**) Siehe darüber auch die vorläufige Notiz *„Zur Theorie der Modularcorrespondenzen"* in den Göttinger Nachrichten vom 5. März 1892.

tischen *Resten* n ist aber die Bedingung für nullwertige Correspondenzen die, dass die ganze Zahl $\psi_1(n)$, die wir p. 583 durch die Formeln (5) und (6) definierten, mit Null identisch ist. Dies wird insbesondere stets dann der Fall sein, wenn für das vorgelegte n eine Darstellung:

$$(1) \qquad 4n = \xi^2 + 7\eta^2$$

in ganzen Zahlen ξ, η überhaupt nicht existiert, und wir wollen die Untersuchung soweit führen, dass wir die Reste n *ohne* eine Darstellung (1) wirklich erschöpfend charakterisieren. Die hierzu nötige Überlegung, welche wir nur kurz angeben, ist übrigens ihren wesentlichen Punkten nach in den Elementen der Zahlentheorie wohlbekannt*).

Man nehme erstlich an, dass für das vorgelegte n eine Darstellung (1) thatsächlich existiere, und benenne den grössten gemeinsamen Teiler der darstellenden Zahlen ξ, η durch τ. Es wird dann $4n$ offenbar durch τ^2 teilbar sein, und indem wir schreiben:

$$(2) \qquad \xi = \xi_0\tau, \quad \eta = \eta_0\tau, \quad \text{folgt: } \frac{4n}{\tau^2} = \xi_0^2 + 7\eta_0^2.$$

Die Zahl η_0 ist relativ prim gegen $\frac{4n}{\tau^2}$ (weil sonst τ nicht der grösste gemeinsame Teiler von ξ, η wäre), und infolge dessen können wir schreiben:

$$(3) \qquad -7 \equiv \left(\frac{\xi_0}{\eta_0}\right)^2, \quad \left(\text{mod. } \frac{4n}{\tau^2}\right),$$

so dass sich als erstes Resultat ergiebt: *Soll eine Darstellung von $4n$ in der Gestalt (1) möglich sein, so muss wenigstens ein quadratischer Teiler τ^2 von $4n$ existieren, für welchen -7 quadratischer Rest von $\frac{4n}{\tau^2}$ ist.*

Man nehme jetzt umgekehrt die hiermit formulierte Forderung als erfüllt an und wird dann eine ganze Zahl m angeben können, welche der Congruenz:

$$(4) \qquad -7 \equiv m^2, \quad \left(\text{mod. } \frac{4n}{\tau^2}\right)$$

genügt. Diese Zahl m wird man zudem als *ungerade* annehmen dürfen; denn falls $\frac{4n}{\tau^2}$ gerade ist, wird ja zufolge (4) sicher $m \equiv 1$ (mod. 2) sein; ist hingegen $\frac{4n}{\tau^2}$ ungerade, so darf man m mod. 2 beliebig wählen. Demnächst schreibe man die Congruenz (4) in die Gleichung um:

$$(5) \qquad -7 = m^2 - l \cdot \frac{4n}{\tau^2} = m^2 - 4\frac{l}{\sigma^2} \cdot \frac{\sigma^2 n}{\tau^2},$$

wobei wir $\sigma = 1$ setzen, falls bereits n durch τ^2 teilbar ist, während

*) Man vergl. z. B. Dirichlet-Dedekind, *Zahlentheorie* (3[te] Aufl.) p. 143.

sonst $\sigma = 2$ sein soll. Im letzteren Falle ist τ notwendig gerade, und $\frac{4n}{\tau^2}$ ist entweder ungerade oder das Doppelte einer ungeraden Zahl; eben deshalb wird für $\sigma = 2$ zufolge $m \equiv 1 \pmod{2}$ die Zahl l durch 4 teilbar sein. In jedem Falle haben wir sonach in:

$$(6) \qquad (P, Q, R) = \left(\frac{l}{\sigma^2}, m, \frac{\sigma^2 n}{\tau^2}\right)$$

eine *ganzzahlige binäre quadratische Form der Determinante* $D = -7$ gewonnen.

Von hier aus ist es nun leicht einzusehen, dass die Bedingung, -7 sei Rest von $4n\tau^{-2}$, auch hinreichend für die Existenz einer Darstellung (1) ist. Man erinnere sich nämlich, dass es nur *eine* Classe von Formen (P, Q, R) der Determinante $D = -7$ giebt. Dieserhalb wird die in Gleichung (6) vorliegende Form mit der reducierten Form $(1, 1, 2)$ äquivalent sein, und es giebt insbesondere zwei ganze Zahlen x, y, welche der Bedingung genügen:

$$(7) \qquad \frac{\sigma^2 n}{\tau^2} = x^2 + xy + 2y^2.$$

Setzt man daraufhin:

$$2x + y = \xi_0, \; y = \eta_0, \; \frac{\xi_0 \tau}{\sigma} = \xi, \; \frac{\eta_0 \tau}{\sigma} = \eta,$$

so genügen die beiden ganzen Zahlen ξ, η thatsächlich der Bedingung (1). Wir haben somit das Resultat gewonnen: *Stets und nur dann wird es wenigstens eine Darstellung* (1) *geben, wenn ein solcher quadratischer Teiler* τ^2 *von* $4n$ *existiert, dass* -7 *quadratischer Rest von* $4n\tau^{-2}$ *ist.*

Der letzteren Bedingung können wir aber noch einen einfacheren arithmetischen Ausdruck verleihen. Wir zerlegen zu diesem Ende n in seine Primfactoren $n = q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} \ldots$ und bringen dann ein paar Sätze aus der Theorie der quadratischen Reste in Anwendung. Verstehen wir unter q einen Primfactor von n der Gestalt:

$$(8) \qquad q = 7h + 3 \text{ oder } = 7h + 5 \text{ oder } = 7h + 6,$$

so wird erstlich zufolge des Reciprocitätsgesetzes:

$$\left(\frac{-7}{q}\right) = \left(\frac{q}{7}\right) = -1$$

sein. Die höchste in n eingehende Potenz q^ν von q wird demnach im quadratischen Teiler τ^2 von $4n$ enthalten sein müssen, weil sonst q noch in $4n\tau^{-2}$ enthalten wäre, worauf alsdann -7 nicht quadratischer Rest von $4n\tau^{-2}$ sein könnte. Der Exponent ν von q muss demgemäss eine gerade Zahl sein. Trifft die somit formulierte Be-

dingung für alle jene Primfactoren von n ein, die eine der Gestalten (8) haben, so wird man τ^2 so wählen können, dass die ganze Zahl $4n\tau^{-2}$ nur noch quadratische *Reste* q von 7 zu Primteilern hat. Dann aber wird wiederum nach bekannten Sätzen aus der Theorie der quadratischen Reste -7 Rest von $4n\tau^{-2}$ sein*).

Indem wir dieses Ergebnis benutzen bez. umkehren, erhalten wir als Antwort auf die eingangs aufgeworfene Frage: *Wir haben nullwertige Modularcorrespondenzen siebenter Stufe n^{ter} Ordnung*

1) *für alle quadratischen Nichtreste n,*

2) *für alle diejenigen quadratischen Reste n, in denen wenigstens eine mod. 7 mit 3 oder 5 oder 6 congruente Primzahl q in ungerader (höchster) Potenz enthalten ist.*

Analog, aber noch einfacher gestaltet sich die gleiche Untersuchung für den Fall der Γ_{96}, wo die in Betracht kommende Entwicklungsfunction $\chi(n)$ durch die Formeln (11) und (12) p. 591 definiert ist. Die Ordnung n ist jetzt ungerade, und es gilt zu entscheiden wann Darstellungen $n = \xi^2 + 4\eta^2$ nicht möglich sind. Dabei kommt uns wieder zu statten, dass es für die Determinante $D = -4$ nur *eine* Formclasse giebt (cf. I p. 249), und wir finden leicht das Resultat: *Die zur n^{ten} Ordnung gehörenden Modularcorrespondenzen der Γ_{96} sind nullwertig, falls wenigstens eine Primzahl der Gestalt $(4h+3)$ existiert, deren höchste in n aufgehende Potenz einen ungeraden Exponenten aufweist.*

Es soll auch noch das Resultat angeführt werden, welches Hr. Fiedler im dritten Kapitel seiner gen. Abhandlung für die Gruppe Γ_{384} durch ausführliche Darlegung bewiesen hat. Reduciert man in

$$n = q_1^{\nu_1} \cdot q_2^{\nu_2} \cdot q_3^{\nu_3} \cdots$$

alle Exponenten ν modulo 2 auf ihre kleinsten, nicht negativen Reste, so möge dabei n in n_0 übergehen, eine Zahl, die dann quadratische Teiler > 1 nicht mehr aufweist. Da n ungerade ist, so werden sich die Primfactoren von n oder n_0 mod. 8 auf die vier Zahlclassen 1, 3, 5, 7 verteilen, und es mögen die in diese vier Classen entfallenden Anzahlen von Primfactoren der Zahl n_0 bez. durch a, b, c, d bezeichnet sein. *Man hat alsdann nullwertige Correspondenzen:*

$$\begin{aligned}
&\textit{bei } n = 8h+1, \textit{ falls } c+d > 0,\ b+d > 0,\\
&\textit{bei } n = 8h+3, \textit{ falls } c+d > 0,\\
&\textit{bei } n = 8h+5, \textit{ falls } b+d > 0,
\end{aligned}$$

während bei $n = 8h+7$ stets nullwertige Correspondenzen vorliegen.

---

*) Siehe Dirichlet-Dedekind, l. c. pag. 87.

Die vorstehenden Erörterungen bezogen sich durchweg auf *erweiterte* Transformation n^{ter} Ordnung; die Correspondenzen, für welche unsere Angaben gelten, sind sonach stets dann reducibel, wenn n quadratische Teiler > 1 aufweist. Man kann fragen, was sich über die Wertigkeit der *irreducibelen* Correspondenzen n^{ter} Ordnung aussagen lässt, wenn jene reducibele Correspondenz zufolge der voraufgehend entwickelten Regeln nullwertig ist. Aber es waren die für das Auftreten nullwertiger Correspondenzen an die Zahl n zu stellenden Bedingungen ganz unabhängig von etwaigen quadratischen Factoren des n. War demnach die reducibele Correspondenz n^{ter} Ordnung nullwertig, so muss das gleiche von den „reducibelen" Correspondenzen *aller* Ordnungen $\frac{n}{\tau^2}$ gelten, wo τ^2 die quadratischen Teiler von n durchläuft. Es folgt hieraus leicht, *dass beim einzelnen n mit den reducibelen Modularcorrespondenzen immer auch die irreducibelen nullwertig sind.*

§ 6. Allgemeines über Schnittsystem-Correspondenzen. Aussonderung derselben bei den Curven C_4 und C_8 der Gruppen Γ_{96}, Γ_{384}.

Unter den nullwertigen Correspondenzen haben wir jetzt zweitens diejenigen auszusondern, welche auf den drei Curven des § 4 im Sinne von p. 679 Schnittsystem-Correspondenzen sind. Hierbei ist eine wichtige Bemerkung vorauszuschicken: *Während die Wertigkeit eine von rationaler Transformation ganz unabhängige Eigenschaft einer Correspondenz ist, hängt es selbstverständlich durchaus von der particulären Auswahl der Curve C_m ab, ob auf derselben die einzelne nullwertige Correspondenz eine Schnittsystem-Correspondenz wird oder nicht.* Das Beispiel der Γ_{168} bestätige dies, indem wir einmal $n = 3$ sodann $n = 5$ nehmen; im ersten Falle haben wir eine 4-4-deutige, im letzteren eine 6-6-deutige Correspondenz, und beide Male liegt die Wertigkeit $w = 0$ vor. Bei der Γ_{168} hatten wir nun neben der C_4 der z_α noch die Curve C_6 der A_α kennen gelernt; es wird aber die Correspondenz für $n = 3$ nur dann eine Schnittsystem-Correspondenz, falls wir die ebene C_4 zu Grunde legen, und entsprechend liefert der fünfte Grad für die Raumcurve C_6 eine Schnittsystem-Correspondenz. Die betreffenden Gleichungen nehmen unter zweckmässiger Auswahl der Schemata die folgenden besonders einfachen Formen an:

$$n = 3, \quad y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_4 z_4 = 0,$$
$$n = 5, \quad B_0 A_0 + B_1 A_1 + B_2 A_2 + B_4 A_4 = 0,$$

wie wir hier ohne Beweis anführen. Dass aber die 4-4-deutige Correspondenz auf der C_6 keine Schnittsystem-Correspondenz sein kann,

und ebenfalls nicht die 6-6-deutige Correspondenz auf der C_4, versteht sich von selbst. Aus den eben mitgeteilten Formeln kann man übrigens nach I p. 731 schliessen, dass die Correspondenzgleichung für $n = 3$ auf der C_6 die Dimensionen $\nu = \nu' = 2$ in den A_i und B_i darbieten wird, während andrerseits die einfachste Correspondenzgleichung für $n = 5$ auf der C_4 nach den nämlichen Formeln die Dimension 3 in den z wie den y besitzt.

Nach diesen vorläufigen Bemerkungen kehren wir zu den drei Curven C_4, C_4, C_8 unserer drei Gruppen Γ_μ zurück und haben hier den Satz: *Ist beim einzelnen n auf der C_m eine unter den μ zugehörigen Modularcorrespondenzen eine Schnittsystem-Correspondenz, so sind es gleich alle μ*; denn sie alle entstehen aus einer unter ihnen dadurch, dass man bei unveränderter einen Variabelenreihe auf die andere alle μ ternären Substitutionen der zugehörigen G_μ ausübt. Bei Inversion geht aber die einzelne unserer Correspondenzen stets in eine der μ gleichberechtigten über: *Haben wir also eine Schnittsystem-Correspondenz für laufende Coordinaten x, so auch für y.* Nehmen wir Beides zusammen, so folgt aus den Regeln der §§ 2 und 3: *Bei einer nullwertigen Ordnung n haben wir auf der C_m stets und nur dann mit Schnittsystem-Correspondenzen zu thun, falls es für einen Punkt z der C_m gelingt, die $\Phi(n)$ correspondierenden Punkte durch eine Curve der Ordnung $\frac{1}{m}\Phi(n)$ auf der C_m auszuschneiden.* Bei diesen $\Phi(n)$ der particulären Stelle z_i correspondierenden Punkten der C_m dürfen wir aber nach dem, was voraufgeht, das Schema der Transformation n^{ter} Ordnung beliebig auswählen.

Wir führen nun die Untersuchung zuvörderst für die Curven C_4 und C_8 der Γ_{96} und Γ_{384} zu Ende und wählen hier als particuläre Punkte z unter Rückgang auf die ursprünglichen Polygone deren Spitzen $\omega = i\infty$. Die $\Phi(n)$ zugeordneten Punkte sind für beliebiges ω, wenn wir das schon p. 607 gebrauchte Schema benutzen sollen, bei unseren Gruppen Γ_{96}, Γ_{384} bez. gegeben durch:

$$(1) \qquad \omega' = \frac{A\omega + 8B}{D}, \quad \omega' = \frac{A\omega + 16B}{D}.$$

Für $\omega = i\infty$ kommen somit sowohl bei der C_4 wie bei der C_8 sämtliche $\Phi(n)$ zugeordnete Punkte an eben jener Stelle $\omega = i\infty$ zur Coincidenz.

Nun sind bei der Werteverteilung von $\sqrt[4]{\lambda}$, $\sqrt[4]{1-\lambda}$ auf der C_4 der Γ_{96} der Spitze $\omega = i\infty$ die Coordinaten zugeordnet:

$$z_1 : z_2 : z_3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} : 1 : 0,$$

und die in diesem Punkte an die C_4 zu legende Tangente ist durch

$$z_1 - \frac{1+i}{\sqrt{2}} z_2 = 0$$

gegeben. Dieselbe schneidet die C_4, wie man leicht feststellen wird, in *vier* zusammenfallenden Punkten. Man bemerke auf der anderen Seite, dass die Teilersumme $\Phi(n)$ für die Ordnungen n mit nullwertigen Correspondenzen stets durch 4 teilbar ist. Man braucht, um dies zu sehen, nur auf die Formel (6) p. 47 zurückzugehen, wobei in Betracht kommt, dass alle Zahlen $\frac{n}{\tau^2}$ wenigstens *einen* Primfactor der Gestalt $q = 4h + 3$ aufweisen. — Indem wir zusammenfassen, werden in allen bei uns vorliegenden Fällen die $\Phi(n)$ der Stelle $\omega = i\infty$ auf der C_4 correspondierenden Punkte y thatsächlich rein ausgeschnitten, nämlich durch die Curve $\left(y_1 - \frac{1+i}{\sqrt{2}} y_2\right)^{\frac{1}{4}\Phi(n)}$ der Ordnung $\frac{1}{4}\Phi(n)$.

Bei der zur Gruppe Γ_{384} gehörenden Curve C_8 treffen wir auf ganz ähnliche Verhältnisse. Hier entspricht der Spitze $\omega = i\infty$ ein Punkt z unserer Curve achter Ordnung, dessen Tangente, $z_1 - e^{\frac{\pi i}{8}} z_2 = 0$, die Curve in acht consecutiven Punkten schneidet. Auf der anderen Seite geht aus den am Schlusse des vorigen Paragraphen gewonnenen Bedingungen der Wertigkeit $w = 0$ hervor, dass bei den für uns in Betracht kommenden n stets $\Phi(n)$ durch 8 teilbar ist (cf. Fiedler l. c. p. 66). Fassen wir also gleich als Schlussresultat zusammen: *Alle im vorigen Paragraphen für die Gruppen Γ_{96} und Γ_{384} angegebenen nullwertigen Modularcorrespondenzen erweisen sich auf den Curven C_4 bez. C_8 als Schnittsystem-Correspondenzen.*

§ 7. Aussonderung der Schnittsystem-Correspondenzen bei der C_4 der Gruppe Γ_{168}.

Etwas umständlicher gestaltet sich die Behandlung der Frage, wann sich eine nullwertige Correspondenz siebenter Stufe auf der C_4 der z_α als Schnittsystem-Correspondenz darstellen lässt. Als Repräsentantensystem werden wir, wie sonst stets, dasjenige vom Schema $\begin{pmatrix} n, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}$ bevorzugen, welches hier gegeben ist durch:

$$(1) \qquad \omega' = V_D\left(\frac{A\omega + 7B}{D}\right), \quad V_D \equiv \begin{pmatrix} D, 0 \\ 0, D^{-1} \end{pmatrix} \pmod{7}.$$

Nehmen wir nun wieder als particulären Punkt z die Spitze $\omega = i\infty$, so werden sich ersichtlich die $\Phi(n)$ correspondierenden Punkte auf jene

drei Stellen c der Curve vierter Ordnung verteilen, welche in dem Bilde des reellen Curvenzuges (I p. 702, Fig. 103) die drei Ecken des Coordinatendreiecks der z_α abgeben. Diese drei Punkte wurden in der citierten Figur c_1, c_3, c_5 genannt, und es wird $V_D(i\infty)$ den ersten, zweiten oder dritten dieser Punkte ergeben, je nachdem

$$D \equiv \pm 1, \quad \equiv \pm 2 \quad \text{oder endlich} \equiv \pm 4 \pmod{7}$$

ist. Verstehen wir hiernach unter $\varphi_\nu(n)$ die Summe aller Teiler von n, welche $\equiv \pm \nu$ modulo 7 sind, so ergiebt sich: *Die $\Phi(n) = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_4$ der Stelle c_1 correspondierenden Punkte der Curve vierter Ordnung verteilen sich auf die Stellen c_1, c_3, c_5; und zwar entfallen auf c_1 im ganzen φ_1, auf c_3 ebenso φ_2, auf c_5 endlich φ_4 Punkte.*

Als erste Bedingung für das Eintreten einer Schnittsystem-Correspondenz haben wir jedenfalls anzugeben:

$$\Phi(n) \equiv 0 \pmod{4}, \tag{2}$$

worauf wir

$$\Phi(n) = 4\sigma \tag{3}$$

setzen. Nun aber ist weiter die Frage nach der Existenz einer ganzen Form $g(z_\alpha)$ der σ^{ten} Dimension zu discutieren, die, gleich Null gesetzt, auf der C_4 die drei Punkte c_1, c_3, c_5 bez. in den richtigen Multiplicitäten $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4$ ausschneidet.

Man nehme eine derartige ganze Form $g(z_\alpha)$ zuvörderst als existierend an und bilde, unter Aufnahme einer gleich näher zu bestimmenden ganzen Zahl $\varkappa$, von $g(z_\alpha)$ aus die algebraische *Function:*

$$F(z_\alpha) = z_1^{\varphi_4 - 2\varkappa - \sigma} z_2^{3\varkappa - \varphi_4} z_4^{-\varkappa} \cdot g(z_\alpha). \tag{4}$$

Da die Coordinatenaxen $z_\alpha = 0$ die Curve vierter Ordnung ausschliesslich in den Punkten c_1, c_3, c_5 treffen, so wird auch die Function F höchstens an diesen Stellen verschwinden oder unendlich werden können. Aber man zählt sofort ab, dass F im Punkte c_5 endlich und von Null verschieden ist, während bei c_3 ein Nullpunkt der Ordnung:

$$k = \varphi_2 - 2\varphi_4 - \sigma + 7\varkappa, \tag{5}$$

bei c_1 endlich ein Unstetigkeitspunkt eben dieser Ordnung liegt*).

Man verfüge jetzt über die ganze Zahl $\varkappa$ in der Art, dass k eine Zahl aus der Reihe $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ wird, und bemerke übrigens, dass F eine $|k|$-wertige algebraische Function unseres Gebildes vom Geschlechte $p = 3$ ist, unter $|k|$ den absoluten Betrag von k verstanden.

---

*) Dabei ist natürlich unter einem Nullpunkte der negativen Ordnung $-\nu$ ein Unstetigkeitspunkt der ν^{ten} Ordnung gemeint.

Da aber unser Gebilde $p = 3$ nicht hyperelliptisch ist, so kann $k = \pm 1, \pm 2$ nicht vorkommen. *Drei*wertige algebraische Functionen giebt es freilich; dieselben sind aber nach I p. 554 Specialfunctionen und werden durch solche z_α-Quotienten darzustellen sein, dass Zähler und Nenner, für sich gleich Null gesetzt, in der Ebene der C_4 zwei Gerade darstellen, die sich auf der C_4 schneiden. Da ist nun bei der charakterisierten Lage der Null- und Unstetigkeitspunkte von F geometrisch evident, dass wir diese Function nicht als Quotient zweier linearen Verbindungen der z darstellen können; es bleibt somit nur noch die eine Möglichkeit $k = 0$. Setzen wir aber in (5) das hiermit erhaltene Resultat $k = 0$ ein und benutzen für σ zugleich seinen Ausdruck (3), so kommt, wenn wir auch die Congruenz (2) nochmals aufnehmen sollen, *als notwendige Bedingungen für die Existenz der Form $g(z_\alpha)$ und damit als notwendige Bedingungen für den Eintritt einer Schnittsystem-Correspondenz bei der Ordnung n:*

$$(6)\qquad \begin{aligned} \varphi_1(n) + \varphi_2(n) + \varphi_4(n) &\equiv 0, \quad (\text{mod. } 4),\\ \varphi_1(n) + 4\varphi_2(n) + 2\varphi_4(n) &\equiv 0, \quad (\text{mod. } 7). \end{aligned}$$

Aber die hiermit aufgeschriebenen Bedingungen sind für das Auftreten der Schnittsystem-Correspondenzen auch bereits hinreichend. Wir werden nämlich, wenn die Congruenzen (6) bestehen, $\varkappa$ aus:

$$(7)\qquad 28\varkappa = \varphi_1 - 3\varphi_2 + 9\varphi_4$$

als *ganze* Zahl berechnen und mögen daraufhin:

$$(8)\qquad g(z_\alpha) = z_1^{2\varkappa+\sigma+\varphi_4} z_2^{\varphi_4 - 3\varkappa} z_4^{\varkappa}$$

nach Massgabe von (4) ansetzen. Damit haben wir eine (vielleicht noch nicht ganze) rationale Verbindung σ^{ter} Dimension der z_α gebildet, welche auf der C_4 nirgends unendlich wird und nur an den drei Stellen c_1, c_3, c_5 jeweils in der richtigen Multiplicität verschwindet. Als *ganze Form* auf der singularitätenfreien C_4 muss sich aber der in (8) gegebene rationale Ausdruck $g(z_\alpha)$ nötigenfalls mit Hülfe der Curvengleichung $f(z_\alpha) = 0$ auch als *ganze rationale* Verbindung der z_α schreiben lassen (cf. pg. 501). Also das Resultat: *Eine nullwertige Modularcorrespondenz siebenter Stufe ist auf der C_4 stets und nur dann als Schnittsystem-Correspondenz darstellbar, wenn ihre Ordnung n die beiden Bedingungen* (6) *befriedigt.* Die niedersten Ordnungen n, bei denen wir mit Schnittsystem-Correspondenzen zu thun haben, sind daraufhin die folgenden:

$$(9)\qquad n = 3, 6, 12, 15, 19, 24, 27, 30, 31, 33, 38, \cdots$$

Insbesondere für Primzahltransformation $n = q$ haben wir stets und

nur dann Schnittsystem-Correspondenzen, wenn q eine der Gestalten:

$$q = 28h + 3, \quad 28h + 19, \quad 28h + 27$$

aufweist.

Häufig tritt in dem durch (8) gegebenen Ausdrucke $g(z_\alpha)$ bei einer der Grössen z_α noch ein negativer Exponent auf; die Ordnungen $n = 19$ oder $n = 31$ liefern hierzu Beispiele. Mit Hülfe der Gleichung $f(z_\alpha) = 0$ lassen sich diese Ausdrücke dann aber, wie wir bereits andeuteten, stets vermöge elementarer Rechnung in *ganze* rationale Gestalt überführen; z. B. für die beiden genannten Ordnungen findet man so:

$$(10) \qquad \begin{aligned} n = 19, \quad g(z_\alpha) &= z_1^5 + z_1^2 z_2 z_4^2 - z_2^4 z_4, \\ n = 31, \quad g(z_\alpha) &= z_1^2 z_2^4 z_4^2 - z_1 z_2^2 z_4^5 + z_2^7 z_4 + z_4^8. \end{aligned}$$

§ 8. Invariantentheoretische Hülfsmittel zur Bildung der Correspondenzgleichungen.

Endlich noch eine letzte Vorbereitung für die Aufstellung der algebraischen Correspondenzgleichungen bei den drei oft genannten Curven:

Bei der Aufstellung der Modulargleichungen des Ikosaeders im vierten Kapitel des vierten Abschnitts erzielten wir durch Heranholung invariantentheoretischer Hülfsmittel eine nicht unwesentliche Abkürzung der Rechnung. Ähnlich liegen die Verhältnisse hier bei den von uns ausgesonderten Modularcorrespondenzen, nur dass natürlich gegen früher diejenigen Complicationen eintreten, welche im Fortgang von der binären zur ternären Invariantentheorie begründet sind.

Dass sich die allgemeinen Erörterungen von p. 127 ff. hier sofort übertragen, wird man leicht überblicken. Haben wir bei einer unserer drei Gruppen Γ_μ für die Ordnung n eine Schnittsystem-Correspondenz, die durch $\Phi(z_i \mid y_i) = 0$ auf der zugehörigen ebenen Curve dargestellt ist, so werden wir zu allen μ Correspondenzen dieser Ordnung etwa dadurch gelangen, dass wir bei stehendem y_i die z_i allen μ inäquivalenten Substitutionen V unterwerfen. War aber $R = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ das gerade zu Grunde gelegte Schema und wendet man auf die z_i und y_i bez. simultan die Substitutionen V und $V' \equiv RVR^{-1}$ an, so wird dadurch unsere anfänglich ausgewählte Correspondenz in sich selbst transformiert. Wollen wir demnach, wie früher, die Vereinigung von V und V' als eine *Simultan-Substitution* bezeichnen, so existiert *eine ganze Gruppe G_μ von μ Simultan-Substitutionen der durch $\Phi(z_i \mid y_i) = 0$ dargestellten Modularcorrespondenz in sich.*

Aber die Verwendung dieses Ergebnisses erfordert hier im Gebiete der ternären Invariantentheorie noch eine Zwischenbetrachtung. Indem wir nämlich auf $\Phi(z_i \mid y_i)$ die biternäre Substitution (V, V') ausüben, wird im allgemeinen $\Phi(z_i \mid y_i)$ nicht direct in sich selbst übergehen, vielmehr eine andere Gestalt $\Phi'(z_i \mid y_i)$ annehmen (die natürlich gleichfalls geeignet ist, gleich Null gesetzt unsere Schnittsystem-Correspondenz darzustellen). Hier werden nun die Entwicklungen aus § 3 fundamental; denn es ergiebt sich aus denselben, dass die Identität bestehen muss:

$$(1)\qquad \Phi'(z_i \mid y_i) = c \cdot \Phi(z_i \mid y_i) + f(z_i) \cdot \gamma_1(z_i \mid y_i) + f(y_i) \cdot \gamma_2(z_i \mid y_i).$$

Wie wir dieselbe für unsere Zwecke verwenden wollen, zeigen wir am Beispiele der Γ_{168}. Die G_{168} der Simultan-Substitutionen lässt sich aus zwei Operationen S, T bez. der Perioden 7 und 2 erzeugen, die zudem bekanntermassen die Bedingung $(ST)^3 = 1$ befriedigen. Bei der Substitution S ist der in (2) gemeinte Factor c notwendig eine 7[te] Einheitswurzel, für T aber eine 2[te]. Das Product beider Einheitswurzeln muss aber eine ebensolche *dritten* Grades vorstellen, und darum sind die zu S und T gehörenden Coefficienten c einfach $= 1$; demgemäss sind für die gesamte G_{168} die Coefficienten c mit 1 identisch. Wenn wir demnach jetzt alle 168 aus Φ durch die Substitutionen (V, V') hervorgehenden Ausdrücke zusammenaddieren, so wird eine Summe der Gestalt:

$$(2)\qquad 168\,\Phi(z_i \mid y_i) + f(z_i) \cdot \gamma_1'(z_i \mid y_i) + f(y_i) \cdot \gamma_2'(z_i \mid y_i)$$

entspringen, die, gleich Null gesetzt, unsere Schnittsystem-Correspondenz ebenso gut darstellt wie $\Phi(z_i \mid y_i) = 0$. Nennen wir aber den Ausdrück (2) jetzt gleich selbst wieder $\Phi(z_i \mid y_i)$, *so haben wir damit eine biternäre Form erreicht, welche bei* a l l e n *168 Substitutionen* (V, V') *genau in sich selbst übergeht, die also eine absolute Invariante der Gruppe* G_{168} *der Simultan-Substitutionen vorstellt.* —

Indem wir auch weiter noch bei der Γ_{168} verweilen, werden wir zur Verwertung dieses Resultates eine besondere Untersuchung darüber anstellen müssen, auf wieviel wesentlich verschiedene Arten die Gruppe G_{168} isomorph auf sich selbst bezogen werden kann, um solchergestalt alle möglichen Zuordnungen V, V' zu Simultan-Substitutionen zu gewinnen. Hier gestalten sich nun die Verhältnisse aufs neue gerade so wie bei $n = 5$ (cf. p. 135), so dass es genügen wird, kurz das Resultat anzugeben: *Es giebt überhaupt nur zwei im Sinne von p. 134 ff. wesentlich verschiedene Arten, die G_{168} isomorph auf sich selbst zu beziehen.* An erster Stelle nennen wir den Fall der *Cogredienz*, wo

jede Substitution V sich selbst zugeordnet ist; er liegt für die quadratischen *Reste* n von 7 vor, wenn wir uns des Schemas $\begin{pmatrix}\sqrt{n}, & 0\\ 0, & \sqrt{n}\end{pmatrix}$ bedienen wollen. Zweitens folgt der Fall der *Contragredienz*, bei welchem den Substitutionen S und T bez. S^{-1} und T zugeordnet sind; dieser Fall kommt für die quadratischen *Nichtreste* n von 7 beim Gebrauche des Schemas $\begin{pmatrix}\sqrt{-n}, & 0\\ 0, & -\sqrt{-n}\end{pmatrix}$ in Betracht. In beiden Fällen ist übrigens, wie man sofort bestätigt, die Correspondenz mit sich selbst invers. — Von den particulären hierbei zu Grunde liegenden Schemen gelangt man dann zu den jedesmaligen 167 übrigen Correspondenzen durch Ausübung der ternären Substitutionen auf die eine Variabelenreihe.

Für die Gewinnung der biternären Formen $\Phi(z_i \mid y_i)$ im Falle der Schnittsystem-Correspondenzen ist hiermit ein invariantentheoretischer Ansatz aufgestellt. Man hat, um völlig systematisch zu verfahren, sowohl im Falle der Cogredienz, wie in dem der Contragredienz vorab nach dem *„vollen System"* biternärer Formen zu suchen, die den Charakter absoluter Invarianten gegenüber der G_{168} besitzen. In den Formen dieses Systems ist alsdann $\Phi(z_i \mid y_i)$ als ganze rationale Verbindung derselben anzusetzen. Wir werden dies indessen nur an einer sehr beschränkten Zahl von Beispielen n thatsächlich durchführen; man vergleiche den folgenden Paragraphen. —

Für die zu den Gruppen Γ_{96} und Γ_{384} gehörenden Curven C_4 und C_8 hat Hr. Fiedler (l. c., p. 74 ff.) bewiesen, dass auch dort die einzelne Schnittsystem-Correspondenz durch Nullsetzen einer Simultan-Invariante rein dargestellt werden kann. Die Anzahl der wesentlich verschiedenen isomorphen Beziehungen der Gruppe G_{384} auf sich selbst ist dabei *vier* je nach dem Reste, welchen die ungerade Zahl n mod. 8 besitzt; insbesondere liegt für $n = 8h + 1$ die Cogredienz, für $n = 8h + 7$ die Contragredienz vor, während man die beiden übrigen Möglichkeiten $n = 8h \pm 5$ etwa als Fälle der Digredienz bezeichnen wird. Bei der G_{96} hat man wieder nur die *zwei* Fälle der Cogredienz und Contragredienz zu unterscheiden, und zwar je nachdem $n = 4h + 1$ oder $n = 4h + 3$ ist. —

Hinzuzusetzen haben wir noch, dass die invariantentheoretischen Principien einmal bei grösserer Variabelenzahl, andrerseits aber auch für die Correspondenzen von nicht-verschwindender Wertigkeit ihre Bedeutung keineswegs völlig verlieren. Mögen wir im letzteren Betracht hier ein Beispiel anführen, welches wir wieder der siebenten

Stufe entnehmen. Die bei $n = 4$ zum Schema $\begin{pmatrix}2, & 0\\ 0, & 2\end{pmatrix}$ gehörende Correspondenz besitzt die Wertigkeit 2, und sie ist 6-6-deutig. Die Ausdehnung der Überlegungen der §§ 2, 3 auf diesen Fall ergiebt leicht, dass wir die fragliche Correspondenz auf der C_4 durch eine Relation *zweiten* Grades in jeder der beiden Variabelenreihen darstellen können. In der That hat man, wie wir ohne Beweis anführen, als fertige Correspondenzgleichung:

$$(3) \qquad y_1^2 z_1 z_4 + z_1^2 y_1 y_4 + y_4^2 z_4 z_2 + z_4^2 y_4 y_2 + y_2^2 z_2 z_1 + z_2^2 y_2 y_1 = 0.$$

Dass wir aber hier linker Hand eine Simultan-Invariante der G_{168} vor uns haben, ist unmittelbar evident; sie ist einfach die *quadratische Polare* eines Punktes y_α in Bezug auf $f(z_\alpha) = 0$ oder auch umgekehrt eines Punktes z_α in Bezug auf $f(y_\alpha) = 0$. Damit ist übrigens auch direct geometrisch offenbar, dass für einen Punkt z_α der C_4 die in y gedeutete Gleichung (3) auf der C_4 jenen Punkt z_α immer selbst, doppelt gezählt, ausschneidet; denn der Polarkegelschnitt eines Punktes einer Curve berührt letztere in diesem Punkte.

§ 9. Aufstellung einiger biternärer Invarianten für die G_{168} siebenter Stufe.

Vorstehende Entwicklungen mögen nun an ein paar Beispielen erläutert werden. Indem wir dabei wieder mit der Γ_{168} beginnen, sind nach (9) p. 689 die niedersten Fälle n, bei denen Schnittsystem-Correspondenzen eintreten, $n = 3, 6, 19, 12$. Wir haben diese Ordnungen n gleich in eine solche Anordnung gebracht, dass die Dimensionen σ der zugehörigen biternären Formen Φ ansteigen; man hat nämlich bei $n = 3, 6, 19, 12$ bez. die Dimensionen $\sigma = 1, 3, 5, 6$, (sofern wir uns bei $n = 12$ auf die irreducibele Correspondenz beschränken wollen).

Wir haben die Betrachtung von vornherein um so lieber auf diese vier Ordnungen eingeschränkt, als dieselben ausnahmslos zum Falle der Contragredienz gehören. Das volle Formensystem der Simultan-Invarianten der G_{168} im Falle der Contragredienz ist aber bereits seit lange durch Hrn. Gordan angegeben worden*). Wir brauchen übrigens unter den zahlreichen Gliedern des fraglichen vollen Systems für unsere Zwecke nur jene Formen herauszugreifen, welche

*) Man sehe die beiden bezüglichen Arbeiten Gordan's in Bd. 17 der Math. Ann. (1880), sowie namentlich die der ersten Arbeit beigegebene tabellarische Zusammenstellung des vollen Formensystems.

in keiner der beiden Variabelenreihen eine Dimension > 6 aufweisen; dadurch verringert sich die Zahl der wirklich zur Geltung kommenden Formen sehr erheblich. Überdies bemerke man, dass $\Phi(z_\alpha \mid y_\alpha)$ bei Vertauschung der beiden Variabelenreihen direct in sich selbst übergehen muss. Denn, wie wir die Vorbereitungen getroffen haben, geht die einzelne Correspondenz durch Inversion in sich selbst über; dass dann aber auch $\Phi(z_\alpha \mid y_\alpha)$ als symmetrische Function beider Variabelenreihen angenommen werden darf, folgert man mit Hülfe eines Gedankenganges, wie wir ihn seinerzeit (p. 56) bei den Modulargleichungen $f(J', J) = 0$ ausführlich gaben.

Um jetzt die für $n = 3, 6, 19, 12$ zu benutzenden Formen wirklich zu bilden, bemerke man erstlich, dass im fertigen Ausdruck von $\Phi(z_\alpha \mid y_\alpha)$ in diesen Formen Glieder mit dem Factor

$$f(z_\alpha) = z_1^3 z_4 + z_4^3 z_2 + z_2^3 z_1,$$

oder auch mit $f(y_\alpha)$ fortbleiben können; denn diese Factoren sind auf der Curve C_4 mit Null identisch, und andrerseits beeinträchtigen wir, indem wir die fraglichen Glieder fortlassen, die Invarianteneigenschaft von $\Phi(z_\alpha | y_\alpha)$ in keiner Weise.

Nächst $f(z_\alpha)$ ist die niederste einfach-ternäre Form $\mathsf{X}(z_\alpha)$, wenn wir diese Bezeichnung im Sinne von I p. 733 brauchen sollen; die Dimension von $\mathsf{X}(z_\alpha)$ ist 6, und als fertige Gestalt dieser Form haben wir:

$$\mathsf{X}(z_\alpha) = 5 z_1^2 z_2^2 z_4^2 - z_1^5 z_2 - z_2^5 z_4 - z_4^5 z_1.$$

Aus den vorausgehenden Bemerkungen kann man übrigens mit Hülfe der Gordan'schen Tabelle leicht folgern, das $\mathsf{X}(z_\alpha)$ in den Correspondenzgleichungen immer nur mit $\mathsf{X}(y_\alpha)$ multipliciert vorkommt. *Als erste bei den ausgewählten Ordnungen n zu benutzende Form merken wir uns somit für die Dimension $\sigma = 6$ an:*

$$\mathsf{H}(z_\alpha \mid y_\alpha) = \mathsf{X}(z_\alpha) \cdot \mathsf{X}(y_\alpha). \tag{1}$$

Demnächst entnehmen wir der Gordan'schen Tabelle eine Form der vierten Dimension in den z_α und der zweiten in den y_α, welche wir durch die viergliedrige Determinante definieren:

$$\Theta(z_\alpha \mid y_\alpha) = 16 \begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & f_{14}, & y_1 \\ f_{21}, & f_{22}, & f_{24}, & y_2 \\ f_{41}, & f_{42}, & f_{44}, & y_4 \\ y_1, & y_2, & y_4, & 0 \end{vmatrix};$$

$f_{\alpha,\beta}$ soll dabei die zweite Ableitung von $f(z_\alpha)$ nach z_α und z_β sein. Die ausführliche Gestalt dieser Form $\Theta(z_\alpha \mid y_\alpha)$ ist die folgende:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \Theta(z_\alpha \mid y_\alpha) = & (z_1^4 - 4z_1z_2z_4^2)y_2^2 + (z_2^4 - 4z_2z_4z_1^2)y_4^2 \\ & + (z_4^2 - 4z_4z_1z_2^2)y_1^2 + (2z_1z_4^3 - z_1^2z_2^2)2y_2y_4 \\ & + (2z_4z_2^3 - z_4^2z_1^2)2y_2y_1 + (2z_2z_1^3 - z_2^2z_4^2)2y_4y_1. \end{aligned}$$

Auch hier folgert man (mit Hülfe der Tabelle) wieder leicht, dass nur das Product $\Theta(z_\alpha \mid y_\alpha)\Theta(y_\alpha \mid z_\alpha)$ für uns zur Geltung kommt, und *wir merken uns damit als zweite Form wieder, für die Dimension* $\sigma = 6$:

$$(3) \qquad Z(z_\alpha \mid y_\alpha) = \Theta(z_\alpha \mid y_\alpha) \cdot \Theta(y_\alpha \mid z_\alpha).$$

Hierüber hinaus kommen nur noch die drei Diagonalglieder der Gordan'schen Tabelle in Betracht, welche l. c. in der symbolischen Schreibweise u_x, f_φ, Θ_H heissen; die Dimensionen dieser drei Formen sind bez. $\sigma = 1, 3, 5$ in jeder der beiden Variabelenreihen.

Indem wir zu unserer Schreibweise z_α, y_α zurückgehen, haben wir erstlich an Stelle von u_x in einfachster Weise die *bilineare* Verbindung:

$$(4) \qquad (z, y) = z_1y_1 + z_2y_2 + z_4y_4,$$

die wir den Formen (1) und (3) ohne weiteres anreihen. Dagegen würde die Umrechnung der Formen f_φ, Θ_H aus der von Hrn. Gordan gegebenen symbolischen Gestalt in die explicite einen unverhältnissmässigen Aufwand von Rechnung erfordern. Wir wollen der Gordanschen Tabelle also nur die Angabe entnehmen, dass zwei äquidimensionale Formen der Grade 3 und 5 existieren, und schlagen übrigens für deren Bildung ein directes Verfahren ein. Wir sagen:

Ist $g(z_\alpha)$ *eine einfach-ternäre Invariante unserer* G_{168} *von der Dimension* $(\sigma + 1)$, *so gewinnen wir in:*

$$(5) \qquad \frac{\partial g(z_\alpha)}{\partial z_1}\frac{\partial g(y_\alpha)}{\partial y_1} + \frac{\partial g(z_\alpha)}{\partial z_2}\frac{\partial g(y_\alpha)}{\partial y_2} + \frac{\partial g(z_\alpha)}{\partial z_4}\frac{\partial g(y_\alpha)}{\partial y_4}$$

eine doppelt-ternäre Simultan-Invariante, welche in jeder Variabelenreihe die Dimension σ *aufweist und übrigens bei Vertauschung von* y *und* z *unverändert bleibt.* Ersteres wird sofort offenbar, wenn man nur aus der Formel des Euler'schen Satzes:

$$(\sigma + 1) \cdot g(z_\alpha) = z_1\frac{\partial g(z_\alpha)}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial g(z_\alpha)}{\partial z_2} + z_4\frac{\partial g(z_\alpha)}{\partial z_4}$$

den (in der Invariantentheorie wohlbekannten) Schluss ziehen will, dass sich die drei Ableitungen $\frac{\partial g}{\partial z_1}, \frac{\partial g}{\partial z_2}, \frac{\partial g}{\partial z_4}$ *contragredient* zu den z_α substituieren. Man nehme nun $g(z_\alpha)$ in (5) einmal mit $f(z_\alpha)$, sodann mit der schon oben benutzten Form $X(z_\alpha)$ identisch und findet solchergestalt zwei Simultan-Invarianten, welche gerade die Dimensionen

$\sigma = 3$ und 5 in der einzelnen Variabelenreihe aufweisen und die zudem bei Vertauschung beider Reihen in sich selbst übergehen. Wir bezeichnen diese beiden Invarianten durch $A(z_\alpha \mid y_\alpha)$ und $B(z_\alpha \mid y_\alpha)$ und finden ihre explicite Gestalt zu:

$$(6)\qquad A = \sum_\alpha (z_\alpha^3 + 3z_{2\alpha}z_{4\alpha}^2)(y_\alpha^3 + 3y_{2\alpha}y_{4\alpha}^2),$$

$$(7)\quad B = \sum_\alpha (5z_\alpha^4 z_{2\alpha} + z_{4\alpha}^5 - 10z_\alpha z_{2\alpha}^2 z_{4\alpha}^2)(5y_\alpha^4 y_{2\alpha} + y_{4\alpha}^5 - 10y_\alpha y_{2\alpha}^2 y_{4\alpha}^2).$$

Es ist nun die Sachlage die, dass uns die beiden Invarianten A, B die Gordan'schen Formen f_φ und Θ_H vollständig ersetzen. Es müssen nämlich nach den Gordan'schen Entwicklungen A und B in den bisherigen Formen $(z, y), f, f_\varphi, \Theta_H$. mit Hülfe constanter Coefficienten $a, b, \alpha, \ldots$ in der Gestalt:

$$A = af_\varphi + b\cdot(z, y)^3,$$
$$B = \alpha\Theta_H + \beta f(z_\alpha)f(y_\alpha)(z, y) + \gamma f_\varphi\cdot(z, y)^2 + \delta\cdot(z, y)^5$$

darstellbar sein, wie man aus den Dimensionen der hier in Betracht kommenden Formen leicht bestätigt. Wären nun die beiden Coefficienten a, α nicht beide von Null verschieden, so enthielte A bez. B den Factor (z, y) und müsste mit Null identisch sein, falls wir

$$y_1 = z_2 = z_4 = 0$$

nehmen. Letzteres ist aber weder für A noch B der Fall, und also ist $a \gtrless 0$ und $\alpha \gtrless 0$; dann aber lassen sich f_φ und Θ_H auch ihrerseits durch A, B, $f(y_\alpha)$, $f(z_\alpha)$, (z, y) ausdrücken.

Sonstige Formen kommen zufolge der Gordan'schen Tabelle für die vier ausgewählten Transformationsgrade nicht in Betracht, und wir haben demgemäss das Resultat: *Die linke Seite der Correspondenzgleichung ist bei den Ordnungen* $n = 3, 6, 19, 12$ *in den fünf Formen* (z, y), A, B, Z, H *rational und ganz darstellbar.*

§ 10. Endgültige Berechnung der Correspondenzgleichungen siebenter Stufe für $n = 3, 6, 19, 12$.

Indem wir jetzt für die vier Ordnungen $n = 3, 6, 19, 12$ die Gleichungen $\Phi(z_\alpha \mid y_\alpha) = 0$ in den fünf Formen (z, y), A, B, Z, H mit numerischen Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ ansetzen wollen, benutzen wir den Umstand, dass in den drei Fällen $n = 3, 6, 19$ die betreffenden Gleichungen irreducibel sein müssen; auch bei $n = 12$ behalten wir die Beschränkung auf die irreducibele Correspondenz bei, so dass wir hier mit einer Correspondenzgleichung sechsten Grades zu thun haben.

Wir bekommen nun die nachfolgenden Ansätze:

$n=3,\quad (z,y)=0,$
$n=6,\quad \mathsf{A}+\alpha\cdot(z,y)^3=0,$
$n=19,\quad \mathsf{B}+\alpha\cdot\mathsf{A}\cdot(z,y)^2+\beta\cdot(z,y)^5=0,$
$n=12,\ \alpha\cdot\mathsf{Z}+\beta\cdot\mathsf{H}+\gamma\cdot\mathsf{B}\cdot(z,y)+\delta\cdot\mathsf{A}^2+\varepsilon\cdot\mathsf{A}\cdot(z,y)^3+\zeta\cdot(z,y)^6=0,$

und hier konnten wir im zweiten und dritten Ansatze die Coefficienten der ersten Glieder direct gleich 1 setzen; denn wären diese Coefficienten etwa gleich Null, so würden die betreffenden Gleichungen ersichtlich nicht irreducibel sein.

Für $n=3$ hat die Gleichung bereits fertige Gestalt gewonnen und stimmt in der That mit der bezüglichen vorläufigen Angabe in § 6 überein. Für die drei übrigen Gleichungen werden wir jetzt weiter überlegen müssen, wie wir die unbestimmt gebliebenen Coefficienten $\alpha, \beta, \ldots$ berechnen mögen.

In diesem Betracht gehe man erstlich auf die Entwicklungen in § 7 zurück, wo wir durch $g(z_\alpha)$ diejenigen $\Phi(n)$ Punkte der C_4 ausschnitten, welche dem Eckpunkt $z_1=z_4=0$ des Coordinatendreiecks zugeordnet waren. Inzwischen wolle man hierbei nicht übersehen, dass die eben angesetzten Gleichungen sich auf das Schema

$$\begin{pmatrix}\sqrt{-n}, & 0\\ 0, & -\sqrt{-n}\end{pmatrix}$$

beziehen, während der Berechnung von $g(z_\alpha)$ in § 7 das Schema $\begin{pmatrix}n, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}$ zu Grunde lag. Die Folge ist, dass $\Phi(z_1, z_2, z_4 \mid 0, 1, 0)$ nicht notwendig auf $g(z_\alpha)$ direct zurückführt, sondern möglicherweise auf einen jener beiden Ausdrücke, welche aus $g(z_\alpha)$ durch cyclische Permutation der z_α entspringen. Welcher unter diesen Fällen vorliegt, wird man immer in kürzester Weise dadurch entscheiden, dass man verlangt, die rechte Seite der gleich folgenden Identität (1) solle gegenüber S dasselbe multiplicative Verhalten zeigen, wie die linke. — Indem wir $g(z_\alpha)$ in diesem Sinne richtig gewählt denken, besteht eine Identität:

$$\Phi(z_1, z_2, z_4 \mid 0, 1, 0) = c\cdot g(z_\alpha) + h(z_\alpha)\cdot f(z_\alpha), \tag{1}$$

wo $h(z_\alpha)$ eine homogene ganze Verbindung $(\sigma-4)^{\text{ter}}$ Dimension ist, die natürlich nur in den Fällen $\sigma>4$ eintritt.

Diese Identität liefert uns nun in folgender Art eine Anzahl von Gleichungen zur Bestimmung der numerischen Coefficienten $\alpha, \beta, \ldots$ in den am Eingang des Paragraphen aufgeschriebenen Ansätzen: Die

Formen (z, y), A, ... nehmen für den Fall $y_1 = y_4 = 0$, $y_2 = 1$ die besonderen Gestalten an:

$$(z, y) = z_2, \mathsf{A} = z_2^3 + 3z_1^2 z_4, \mathsf{B} = z_2^5 + 5z_1 z_4^4 - 10 z_1^2 z_2^2 z_4,$$
$$\mathsf{Z} = z_1^4 z_4^2 - 4 z_1 z_2 z_4^4, \mathsf{H} = 0.$$

Tragen wir dies in die obigen Ansätze ein, so kommt z. B. für $n = 19$:

$$(2) \qquad z_2^5 + 5z_1 z_4^4 - 10 z_1^2 z_2^2 z_4 + \alpha(z_2^5 + 3z_1^2 z_2^2 z_4) + \beta z_2^5$$
$$= c(z_2^5 + z_1^2 z_2^2 z_4 - z_1 z_4^4).$$

Es tritt nämlich hier eine lineare Form $h(z_\alpha)$, mit $f(z_\alpha)$ multipliciert, nicht auf; denn alle Terme der Gleichung (2) nehmen gegenüber S den Factor ε^5 an, ein Verhalten, welches von keinem der drei Producte $z_\alpha f(z)$ gilt. Aus der Identität (2) folgt nun sofort:

$$\alpha + \beta + 1 = c, \quad 3\alpha - 10 = c, \quad 5 = -c,$$

womit sich die endgültigen Werte $\alpha = \frac{5}{3}$, $\beta = -\frac{23}{3}$ ergeben. Auch im Falle $n = 6$ kommen wir auf dem hiermit skizzierten Wege zum Ziele und finden $\alpha = -1$. Dagegen erhalten wir bei $n = 12$ nur erst zwei Gleichungen für die sechs unbekannten Zahlen; hier also werden wir auf unser altes Mittel zurückgreifen, dass wir den Ansatz $\Phi(z_i \mid y_i) = 0$ nach ansteigenden Potenzen von r entwickeln und dann den Coefficienten jeder Potenz mit Null identisch setzen. Auf diesem Wege können wir dann auch in den höheren Fällen stets zum Ziele kommen. Freilich wird es dabei vorkommen können, dass ein oder mehrere Coefficienten fortgesetzt unbestimmt bleiben, wie viele Glieder der Potenzentwicklung nach r wir auch heranziehen mögen. Dann werden zwischen den Simultan-Invarianten, aus denen wir in jenen höheren Fällen die Form $\Phi(z_\alpha \mid y_\alpha)$ aufbauten, algebraische Relationen bestehen. Natürlich wird man, um beim einzelnen $\Phi(z_\alpha \mid y_\alpha)$ derartige unbestimmt bleibende Coefficienten als solche thatsächlich zu erkennen, doch immer nur eine begrenzte Anzahl von Gliedern der betreffenden Potenzentwicklung nach r zu untersuchen haben, worüber man das Nähere aus den Sätzen über die Wertigkeit ganzer Modulformen im Einzelfalle ohne Schwierigkeit feststellen wird.

Die hiermit bezeichnete Complication durch das Auftreten algebraischer Relationen zwischen den Formen des vollen Systems tritt aber in unserem Falle $n = 12$ noch keineswegs auf. Wir berechnen hier also die Coefficienten $\alpha, \beta, \ldots$ ohne weiteres in der angedeuteten Art und *finden überhaupt als fertige Gestalten der Correspondenzgleichungen in unseren vier Fällen:*

$$n = 3, \quad (z, y) = 0,$$
$$n = 6, \quad \mathsf{A} - (z, y)^3 = 0,$$
$$n = 19, \quad 3\mathsf{B} + 5\mathsf{A} \cdot (z, y)^2 - 23(z, y)^5 = 0,$$
$$n = 12, \quad 45\mathsf{H} - 9\mathsf{B} \cdot (z, y) - 5\mathsf{A}^2 - 35\mathsf{A} \cdot (z, y)^3 + 49(z, y)^6 = 0.$$

§ 11. Mitteilung einiger Correspondengleichungen für die Gruppen Γ_{96} und Γ_{384}.

Für die beiden Gruppen 8[ter] und 16[ter] Stufe sind die vollen Systeme der Simultan-Invarianten in den sämtlichen dabei zu unterscheidenden Fällen durch Hrn. Fiedler l. c. abgeleitet worden. Die weitaus grösste Anzahl der wirklich berechneten Correspondenzgleichungen gehört aber auch hier zum Falle der Contragredienz, d. i. bei der Γ_{96} zu den Ordnungen $n = 4h + 3$, bei der Γ_{384} zu $n = 8h + 7$. Mag es also genügen, wenn sich unser Referat nur auf den hiermit gekennzeichneten Bereich erstreckt, zumal da wir bei ihm durchaus die einfachsten Verhältnisse antreffen.

Bei der Γ_{96} besteht das volle Formensystem im Falle der Contragredienz aus den drei Verbindungen:

$$\left\{\begin{aligned} \mathsf{A}_1 &= z_1 y_1 + z_2 y_2 + z_3 y_3, \\ \mathsf{A}_2' &= z_2 z_3 y_2 y_3 + z_3 z_1 y_3 y_1 + z_1 z_2 y_1 y_2, \\ \mathsf{A}_3 &= z_1 z_2 z_3 y_1 y_2 y_3 \end{aligned}\right. \tag{1}$$

der Dimensionen $\sigma = 1, 2, 3$. Wir erzielen indessen eine Vereinfachung der entspringenden Gleichungen, wenn wir die zweite Form, A_2', durch

$$\mathsf{A}_2 = \mathsf{A}_1^2 - 4\mathsf{A}_2' \tag{2}$$

ersetzen. Hierher gehörige Beispiele fertiger Modularcorrespondenzgleichungen sind:

$$n = 3, \quad \mathsf{A}_1 = 0,$$
$$n = 11, \quad \mathsf{A}_1^3 - 16\mathsf{A}_3 = 0,$$
$$n = 19, \quad \mathsf{A}_1^5 - 16\mathsf{A}_3(4\mathsf{A}_2 + 3\mathsf{A}_1^2) = 0,$$

bei deren Ableitung durchaus die Gesichtspunkte des vorigen Paragraphen ihre Geltung bewahren.

Bei der Gruppe Γ_{384} gelangt Hr. Fiedler im Falle $n = 8h + 7$ gleichfalls zu einem vollen System von *drei* Formen, die überdies gestaltlich mit den drei Formen (1) genau übereinstimmen. Sie mögen

indessen, der veränderten Bedeutung der z_i, y_i entsprechend, jetzt B_1, B_2', B_3 heissen, und wir führen genau wie in (2) die Form B_2 durch die Gleichung $B_2 = B_1^2 - 4B_2'$ ein. Hier hat nun Hr. **Fiedler** die Berechnung der fertigen Correspondenzgleichungen bis zu sehr beträchtlichen Ordnungen n getrieben; wir reproducieren seine Ergebnisse nachfolgend im vollen Umfange:

$$\begin{aligned}
n &= 7, \quad B_1 = 0,\\
n &= 15, \quad B_1B_2 + 4B_3 = 0,\\
n &= 23, \quad B_1^3 - 4B_3 = 0,\\
n &= 31, \quad B_2^2 - 4B_1B_3 = 0,\\
n &= 39, \quad B_1^5B_2 + 8B_1^4B_3 - 20B_1^2B_2B_3 - 144B_1B_3^2 - 4B_2^2B_3 = 0,\\
n &= 47, \quad B_2^3 - 4B_1^3B_3 - 24B_1B_2B_3 - 128B_3^2 = 0,\\
n &= 55, \quad B_1^7B_2 + 8B_1^6B_3 - 40B_1^4B_2B_3 - 16\cdot 19B_1^3B_3^2 - 28B_1^2B_2^2B_3\\
&\qquad - 96B_1B_2B_3^2 - 4B_2^3B_3 + 512B_3^3 = 0,\\
n &= 71, \quad B_1^9 - 84B_1^4B_2B_3 - 36B_1^2B_2^2B_3 - 112B_1^3B_3^2 - 48B_1^6B_3\\
&\qquad - 4B_2^3B_3 - 96B_1B_2B_3^2 - 64B_3^3 = 0,\\
n &= 79, \quad B_2^5 - 4B_1^7B_3 - 40B_1^5B_2B_3 - 112B_1^4B_3^2 - 112B_1^3B_2^2B_3\\
&\qquad - 13\cdot 32B_1^2B_2B_3^2 - 84B_1B_2^3B_3 - 3\cdot 128B_2^2B_3^2 + 512B_1B_3^3 = 0.
\end{aligned}$$

Von den mod. 8 nicht mit 7 congruenten Ordnungen hat Herr Fiedler noch $n = 21$ und $n = 35$ behandelt; doch wolle man die betreffenden Gleichungen a. a. O. nachsehen. —

In den mitgeteilten Correspondenzgleichungen haben wir nun eine grosse Reihe jener *irrationalen Modulargleichungen* vor uns, wie wir sie oben (p. 154 ff.) bereits ausführlich betrachteten. Um dies an unseren jetzigen Gleichungen äusserlich zur Evidenz zu bringen, müssen wir dieselben unter Einführung von $\sqrt[8]{\lambda}$, $\sqrt[8]{1-\lambda}$ etc. in die nichthomogene Gestalt umsetzen; indessen gebrauchen wir zum besseren Anschluss an die überlieferten Formeln hierbei statt $\sqrt[8]{\lambda}$, $\sqrt[8]{1-\lambda}$ lieber die Bezeichnung $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$, die wir nach I p. 665 durch:

$$\sqrt[4]{k'} : 1 : \sqrt[4]{k} = z_1 : e^{-\frac{\pi i}{8}} z_2 : e^{-\frac{\pi i}{4}} z_3 \tag{3}$$

definieren. Die transformierten Moduln nennen wir, wie schon früher (p. 157), $\sqrt[4]{l}$, $\sqrt[4]{l'}$, setzen jedoch im Gegensatze zu (3):

$$\sqrt[4]{l'} : 1 : \sqrt[4]{l} = y_1 : e^{\frac{9\pi i}{8}} y_2 : e^{\frac{\pi i}{4}} y_3. \tag{4}$$

An Stelle der zunächst bei der Transformation entspringenden y_1, y_2, y_3

haben wir solchergestalt $y_1, -\frac{1+i}{\sqrt{2}}y_2, iy_3$ gesetzt. Der hiermit vollzogene Wechsel stellt aber eine Operation der G_{384} vor, und also kommt unsere Massnahme einfach auf einen Wechsel des Schemas der Transformation zurück. Der Vorteil aber ist, dass die Producte $B_1 z_2^{-1} y_2^{-1}$, $B_2' z_2^{-2} y_2^{-2}$ und $B_3 z_2^{-3} y_2^{-3}$, die wir übrigens gleich selbst wieder B_1, B_2', B_3 nennen, die einfachen Gestalten annehmen:

$$
(5)\qquad \begin{cases} B_1 = \sqrt[4]{kl} + \sqrt[4]{k'l'} - 1, \\ B_2' = \sqrt[4]{klk'l'} - \sqrt[4]{kl} - \sqrt[4]{k'l'}, \\ B_3 = -\sqrt[4]{klk'l'}. \end{cases}
$$

Den Ausdruck B_2 definieren wir natürlich nach wie vor durch die Gleichung $B_2 = B_2' - 4B_1^2$. Die expliciten Gestalten der zur Γ_{384} gehörenden irrationalen Modulargleichungen entspringen nun einfach durch Eintragung der Ausdrücke (5) in die oben mitgeteilten Gleichungen.

Entsprechend hat man bei der Γ_{96} die nachfolgenden nicht-homogenen Gestalten der drei Formen A:

$$
(6)\qquad \begin{cases} A_1' = \sqrt{kl} + \sqrt{k'l'} - 1, \\ A_2' = \sqrt{klk'l'} - \sqrt{kl} - \sqrt{k'l'}, \\ A_3 = -\sqrt{klk'l'}. \end{cases}
$$

Hier liefert nun in der That die bei $n = 3$ eintretende Gleichung $A_1 = 0$ die *Legendre'sche Modulargleichung* aufs neue, die wir auf anderem Wege bereits p. 154 gewonnen hatten. Die bei $n = 7$ eintretende Gleichung $B_1 = 0$ liefert die *Gützlaff'sche Modulargleichung* von (3) p. 155.

Die bei $n = 11$ für die Γ_{96} gefundene Gleichung $A_1^3 = 16A_3$ wollen wir noch durch Ausziehen der dritten Wurzel umgestalten; sie liefert alsdann die irrationale Modulargleichung:

$$
(7)\qquad \sqrt{kl} + \sqrt{k'l'} + 2\sqrt[3]{2}\sqrt[6]{klk'l'} = 1,
$$

die wir als Correspondenzgleichung derjenigen ausgezeichneten Untergruppe $\Gamma_{3\cdot 96}$ der Stufe 24 anzusprechen haben, welche aus der Γ_{96} durch Zusatz von $\sqrt[3]{kk'}$ entspringt. Man findet weiter in entsprechender Weise für den Transformationsgrad $n = 23$ von $B_1^3 = 4B_3$ aus die Gleichung:

(8) $$\sqrt[4]{kl} + \sqrt[4]{k'l'} + \sqrt[3]{4}\,\sqrt[12]{klk'l'} = 1\,{}^{*}),$$

die wir offenbar als Correspondenzgleichung 48[ter] Stufe zu rubricieren haben.

Die Gleichung (7) lässt sich aus Formeln entwickeln, welche Schröter in seiner p. 158 genannten Schrift *„De aequationibus modularibus“* abgeleitet hat, während die Gleichung (8) zuerst von Hrn. Hurwitz angegeben worden ist**).

Zu der genannten Gruppe $\Gamma_{3\cdot 384}$ der Stufe 48 bez. zu ihrem Modulsystem $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$, $\sqrt[12]{kk'}$ gehört auch noch eine Relation, welche Hr. Hurwitz l. c. für $n = 47$ berechnet hat; dieselbe lautet:

(9) $$\begin{aligned}&[2(\sqrt[4]{kl} + \sqrt[4]{k'l'} - 1) - \sqrt[3]{4}\,\sqrt[12]{klk'l'}]^2\\ &= 8(\sqrt{kl} + \sqrt{k'l'} + 1) - 7\sqrt[3]{16}\,\sqrt[6]{klk'l'}.\end{aligned}$$

Aus der oben für $n = 47$ mitgeteilten Gleichung lässt sich nach Eintragung der Werte (5) die eben mitgeteilte Formel vermöge einer kurzen Zwischenentwicklung ableiten. — Natürlich stellen die Relationen (7), (8), (9) Correspondenzen auf den Raumcurven des R_3 vor, welche den Modulsystemen $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$, $\sqrt[6]{kk'}$ bez. $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$, $\sqrt[12]{kk'}$ entsprechen. —

Mit den hier behandelten Beispielen ist der Bereich der in Rede stehenden Untersuchungen übrigens in keiner Weise abgeschlossen. Wir würden zumal durch Ausdehnung unserer Betrachtungen auf Correspondenzen mit einer nicht verschwindenden Wertigkeit zahlreiche neue Gestalten irrationaler Modulargleichungen gewinnen. Doch müssen wir in diesem Betracht auf die oft genannten Entwicklungen von Schröter, Krause u. A. verweisen.

Indem wir hiermit nun auch diese letzte Anwendung der Theorie der Modulfunctionen abschliessen, sei es gestattet, noch einmal die wesentliche Absicht anzugeben, welche dem Ganzen der jetzt beendeten Darstellung zum Grunde liegt. Trotz aller der vielen Einzeluntersuchungen, die wir durchzumachen hatten, war es doch überall nicht

*) Die Gleichungen (8) und (9) sind bereits oben (p. 157) vorläufig mitgeteilt; doch sind damals die numerischen Coefficienten der dritten Glieder linker Hand unrichtig angegeben worden.

**) Siehe die betreffende Mitteilung in den Mathem. Annalen Bd. 17 p. 69 (1879). Vergl. auch Schröter in Bd. V der Acta Math., p. 208 (1884).

das einzige und wesentliche Ziel für uns, in Richtung der Specialforschung möglichst weit vorzudringen. Vielmehr sei sofort zugegeben, dass Geometrie und Zahlentheorie sowie einigermassen auch Functionentheorie und Gruppentheorie zumeist nur in ihren elementaren Teilen zur Verwendung kamen. Aber dass sich alle jene verschiedenen Disciplinen in der Theorie der Modulfunctionen, wie wir sie entwickelten, zu einem von lebendiger Anschauung getragenen Ganzen organisch verbinden, darin vor allem scheint der Wert dieser Theorie zu bestehen.

Dass übrigens diese Art mathematischer Betrachtungsweise, wie sie nun auf die elliptischen Modulfunctionen Anwendung fand, noch sehr viel weitertragend ist, deuteten wir schon einmal am Schlusse von Bd. I an. In der That ist es die dort bezeichnete Theorie der automorphen Functionen allgemeinster Art, in welche die Fortsetzung unserer bisherigen Entwicklungen unmittelbar hineinführt. So soll uns denn das jetzt Erreichte zur Grundlage für die Behandlung der allgemeinen automorphen Functionen werden!

Freilich erscheint unsere jetzige Darstellung nicht in allen Punkten der Verallgemeinerung fähig. Bei den automorphen Functionen allgemeinerer Art fehlen uns alle jene Hülfsmittel, die wir für die Modultheorie aus dem Anschluss an die doppelt-periodischen Functionen gewannen. Diese letzteren aber zogen wir (zumal im vorliegenden zweiten Bande) gern heran, um beziehungsreiche Eigenschaften der Modulfunctionen hervortreten zu lassen sowie auch um concrete Formeln zur Hand zu haben. Damit aber entsprangen (wenn es erlaubt ist, noch einmal ein paar Einzelheiten zu berühren) zwei wesentliche Erleichterungen für unsere Deduction: Einmal hätten wir nicht nötig, den Existenzbeweis der Function $J(\omega)$ von der Abbildung aus vermöge Riemann'scher Principien zu erbringen, indem wir ja seinerzeit vielmehr von der bereits bekannten Function $J(\omega)$ aus deren Abbildung auf die ω-Ebene aufsuchten. Fürs zweite brauchten wir keine principielle Untersuchungen über die analytischen Bildungsgesetze der Modulformen anzustellen, da uns die Darstellungen für g_2, g_3, Δ in Bd. I sowie späterhin die Darstellungen der Moduln höherer Stufen durch die ϑ-Reihen etc. ja unmittelbar von der Theorie der doppeltperiodischen Functionen geliefert wurden. Die allgemeine Theorie der automorphen Functionen entbehrt ein entsprechendes Hülfsmittel in beiden Hinsichten. Aber man braucht dies nicht als einen Nachteil der in Rede stehenden Theorie ansehen: vielmehr gewinnt ihre Darstellung eben dadurch, dass sie keine Anleihe bei einer ihr an sich fremden Disciplin macht, einen mehr einheitlichen Charakter.

Die grosse Breite der bisherigen Darstellung wird übrigens erlauben, bei der Behandlung der automorphen Functionen weit kürzer und abstracter vorzugehen. In der That sollten ja die Modulfunctionen die Einführung in die allgemeine Theorie vermitteln, und wir wollen sie künftighin zur Erläuterung der allgemeinen Verhältnisse immer zur Hand halten. So mag durch die Ausführlichkeit des vorliegenden Werkes hoffentlich Dieses erreicht sein, dass Jeder, der in die in Rede stehenden Theorieen eindringen will, hier alle dazu nötigen Prämissen beisammen findet.

Sachregister.

*) II, 284 soll bedeuten: Zweiter Band, Seite 284.

Zusätze und Verbesserungen.

Erster Band.

p. 155, in Formel (4) ist im letzten Gliede g_3 statt g_4 zu setzen.
p. 158, in Formel (2) ist im Exponentialfactor λ statt λ_1 zu setzen.
p. 161, in Formel (5) linker Hand überall $\pi\omega$ an Stelle von ω im Argument der ϑ-Functionen zu setzen.
p. 162, in Formel (6) linker Hand überall π an Stelle von 1 im Argument der ϑ-Functionen zu setzen.
p. 251, der nach Stephen Smith durchgeführte Ersatz einer quadratischen Form positiver Determinante durch den zugehörigen Halbkreis der ω-Halbebene

ist dem Wesen nach bereits früher durch Hrn. Hermite aufgestellt und zu vielfachen Anwendungen benutzt worden. Hermite weist nämlich der einzelnen Form positiver Determinante unendlich viele Formen der gleichen negativen Determinante als harmonisch zu, und zwar sind die letzteren Formen (um es in unserer geometrischen Ausdrucksweise zu sagen) alle jene, deren repräsentierende Punkte auf dem in Smith's Sinne zur vorgelegten Form $D > 0$ gehörenden Halbkreise liegen. Wegen der Hermite'schen Behandlungsweise vergl. man z. B. die bezüglichen Ausführungen im Verlaufe der Abhandlung *„Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres"* Crelle's Journal Bd. 41.

p. 621, Zeile 6, das Komma auf der rechten Seite der Formel ist durch ein Multiplicationszeichen zu ersetzen.

p. 630, in der zweiten Formel (7) muss das zweite Glied $-20\xi_8{}^3\xi_4{}^3$ lauten.

Zweiter Band.

p. 157 sind die numerischen Coefficienten der Formeln (8) mehrfach falsch angegeben, was nach den bezüglichen Formeln von p. 701 u. f. zu corrigieren ist.

p. 187, vorletzter Absatz: die singulären Stellen ω der nicht-ambigen Classen gehen nicht zu *vier,* sondern zu *zwei* bei den Transformationen 1, A, W, AW des Polygons F_ψ in einander über, insofern jene Stellen Fixpunkte der Transformation W sind.

p. 189, damit die Anzahl der Fixpunkte der Substitution W auf dem Transformationspolygon F_ψ gleich der a. a. O. angegebenen Classenanzahl ist, müssen die ambigen Formclassen stets und nur dann *doppelt* gezählt werden, wenn ihre repräsentierenden Punkte ω im Polygon F_ψ *nicht* auf der Symmetrielinie der Transformation A von F_ψ in sich gelegen sind; vergl. auch p. 458.

p. 213, die in der Note namhaft gemachte Arbeit von Gierster ist im 17ten und nicht im 20ten Bande der Mathem. Annalen abgedruckt.

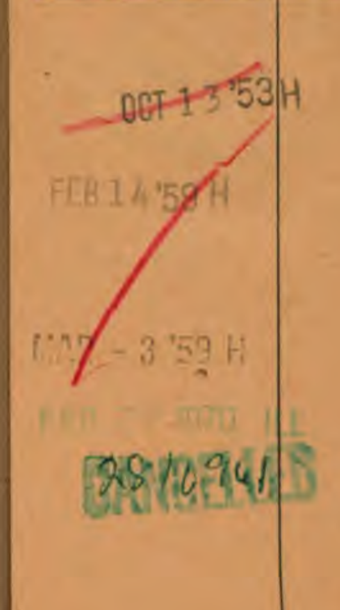
p. 214, in den vier ersten Congruenzen (8) ist rechter Hand das doppelte Vorzeichen $\pm$ zu nehmen.

p. 233, um den im ersten Absatz mitgeteilten Satz ausführlich zu beweisen, muss man die Classenanzahlen $H_{+1}(\Delta)$, $H_{-1}(\Delta)$ auf recurrentem Wege durch Inversion der Classenzahlrelationen berechnen.

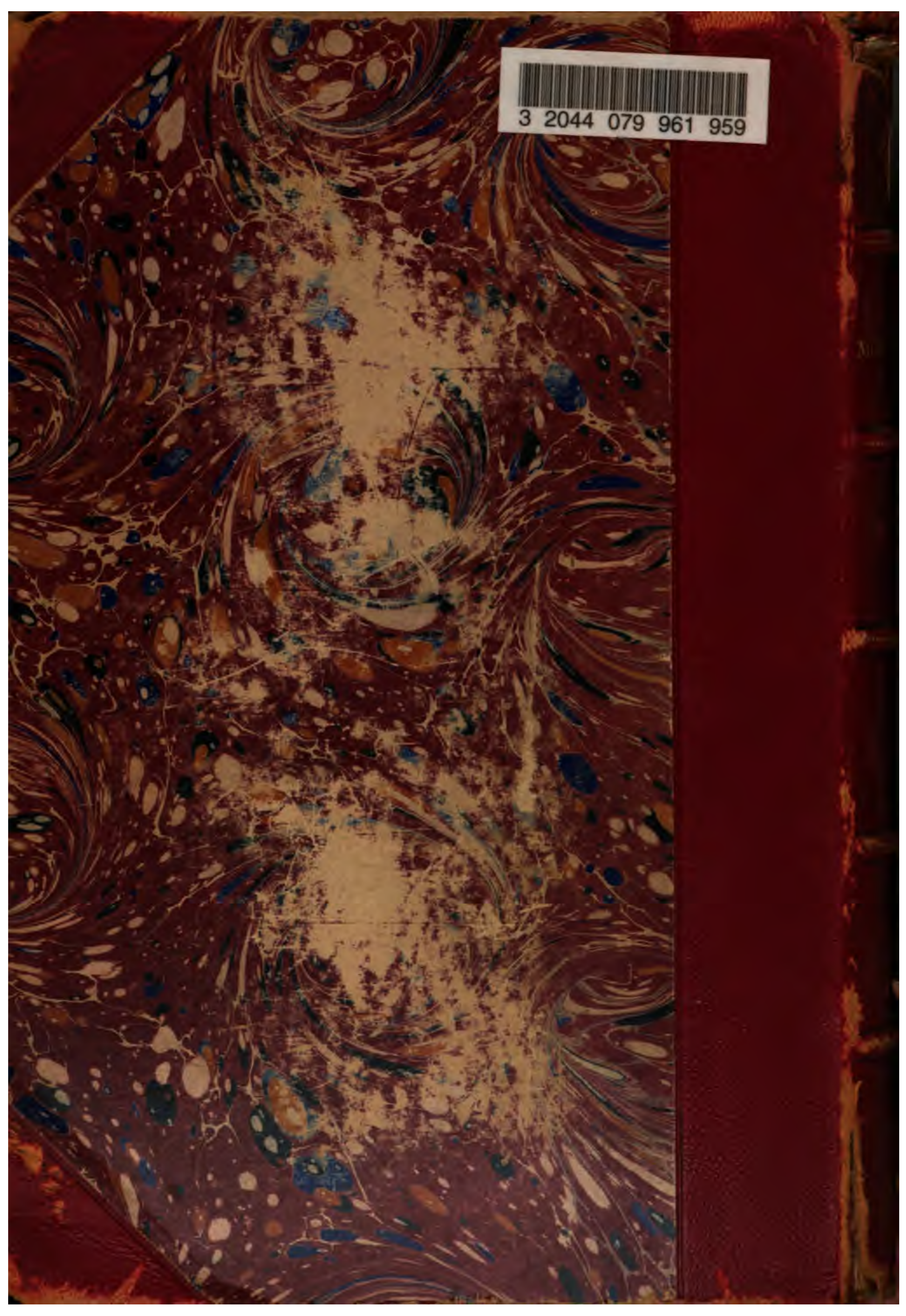
p. 299, im *zweiten* Gliede des Exponenten der Formel (12) muss der Nenner 2 statt 8 stehen; cf. (1) p. 297.



Aug 11, 189[illegible]






3 2044 079 961 959